数理解析研究所講究録
969巻 1996年 198-204

フックス型超局所微分作用素に対するグルサ問題とその応用

東京大学大学院数理科学研究科

(Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

山崎　晋 (Susumu Yamazaki)

整型 (又は実解析的) 範疇の Goursat 問題には幾つかの研究が成されており, 特に C. Wagschal [W] はこの問題を積分-微分方程式系に拡張し, Cauchy-Kovalevskaja 型定理 (即ち一意可解性定理) を示している. 併し乍ら, 超局所解析に於いては Goursat 問題の研究は現在の所見当たらない様である. そこで本講では, 多変数 Fuchs 型超局所微分作用素 (microdifferential operator) に依る整型函数及び超局所函数 (microfunction) の枠内の Goursat 問題を考察する.

(一つの変数に関する) Fuchs 型の概念は先づ偏微分作用素の場合に M. S. Baouendi-C. Goulaouic [Ba-G] に依って導入され, 又 Cauchy-Kovalevskaja 型定理も示された. これに続いて N. S. Madi [M] は Fuchs 型作用素を多変数に拡張し整型函数に於ける Goursat 問題の Cauchy-Kovalevskaja 型定理を証明した.

一方 Baouendi-Goulaouic に引き続き, 多くの数学者に依り Fuchs 型作用素に対して初期値問題のほぼ満足すべき結果が得られている. 例えば 田原 [Ta] は Volevič の意味の Fuchs 系を扱い, 複素領域に於いて Cauchy-Kovalevskaja 型定理を示した. 彼はその超局所解析への応用として, "Fuchs 型双曲系" の仮定下で佐藤超函数 (Sato hyperfunction, 以下単に超函数と呼ぶ) の枠内での初期値問題の一意可解性を示し, 又超局所微分作用素の "Fuchs 型超局所双曲系" に対し超局所函数の枠内での斉次初期値

問題の可解性定理を証明した. 更に大阿久 [O1] は Fuchs 型双曲型超局所微分作用素に対して柏原-河合 [K-K] の方法の延長に依り超局所函数の枠内での非斉次初期値問題の可解性定理を証明し, 又 [O2] に於いて Fuchs 型超局所微分作用素に対して F–mild の仮定下で一意性を示した.

そこで本講では上の結果の自然な拡張として, 多変数 Fuchs 型超局所微分作用素を定義し, 超局所微分作用素の整型函数に対する Bony–Schapira の作用を用いた Goursat 問題の Cauchy–Kovalevskaja 型定理を述べる. 更に応用として, 作用素に対する或る種の双曲型に類似する条件の下で初期値が充分 "滑らか" な場合に超局所函数の枠内での Goursat 問題の可解性定理を述べる.

先づ記号を幾つか準備する. $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. 又, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{C}^d$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ なる変数を用いる事とし $\mathbf{1}_d := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$ とする. 二つの ベクトル $R = (R_1, \ldots, R_d)$, $R' = (R'_1, \ldots, R'_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して次の記号を用いる:

$$R' \leqslant R \underset{\text{def.}}{\iff} \text{任意の } j \text{ に対して } R'_j \leqslant R_j,$$

$$R' < R \underset{\text{def.}}{\iff} R' \leqslant R \text{ 且つ } R' \neq R,$$

$$R' \prec R \underset{\text{def.}}{\iff} \text{任意の } j \text{ に対して } R'_j < R_j.$$

$r = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して $[r]_+ := ([r_1]_+, \ldots, [r_d]_+)$ $([r_j] := \max\{r_j, 0\})$ と置く. $m = (m_1, \ldots, m_d)$, $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$ $(m \geq k)$ を固定する. $R = (R_1, \ldots, R_d) \in \mathbb{R}^d$に対して $B(R) := \{\tau \in \mathbb{C}^d; |\tau_j| < R_j \, (1 \leq j \leq d)\}$ とする. $V \subset \mathbb{C}^n$ を原点の相対 compact 開近傍とし, 正数 h_0 に対して $U = \{(z, \zeta) \in T^*\mathbb{C}^n\,;\, z \in V,\ \zeta_1 = 1,\ |\zeta_j| <$

$h_0\,(2 \le j \le n)\}$ と置く.

さて Fuchs 型微分作用素の多変数への一般化は, Y. Laurent-T. Monterio Fernandes [La-MF] 及び Z. Szmydt-B. Ziemian [Sz-Zi] のものもあるが, ここでは N. S. Madi [M] の意味の Fuchs 型微分作用素を基にして超局所微分作用素に拡張する:

定義. $[U] \times [B(R)]$ ([ ] は閉包を表す) の近傍で定義された有限階超局所微分作用素 $P(z, \tau; \partial_\tau, \partial_z)$ が重み (k, m) の Fuchs 型とは P は高々 $|m|$ 階 であり次の形を持つ時に謂う:

$$P(z, \tau; \partial_z, \partial_\tau) = \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant m} P_\alpha(z, \tau; \partial_z) {\partial_\tau}^\alpha,$$

ここで各 P_α は以下の条件を満たす:

(1) 各 P_α は τ を整型助変数に持つ超局所微分作用素 (特に階数 $\mathrm{ord}\, P_\alpha$ は高々 $|m| - |\alpha|$);

(2) $P_m = \tau^k$;

(3) 各 P_α は

$$P_\alpha(z, \tau; \partial_z) = \tau^{[\alpha - m + k]+} P_\alpha^1(z, \tau; \partial_z) + \tau^{[\alpha - m + k + \mathbf{1}_d]+} P_\alpha^2(z, \tau; \partial_z)$$

の形であって $\mathrm{ord}\, P_\alpha^1(z, \tau; \partial_z) \leqslant 0$. ∎

注意. 上の定義に於いて Fuchs 型という概念は z 変数の座標変換, 更にはより一般に $(z; \zeta)$ 変数の被量子化接触変換 (quantized contact transform) で不変である事に注意する.

$T = (T_1, \cdots .T_d)$ を d 個の不定元とする. P が重み (k, m) の Fuchs 型の時 その決

定多項式 (indicial polynomial) を

$$\mathcal{C}_P(z;\zeta;T) := \sum_{m-k\leq\alpha\leq m} \sigma_0(P^1_\alpha)(z,0;\zeta)\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=0}^{\alpha_i-1}(T_i-j)$$

で定義する (但し $\prod_{k=0}^{-1}(T_i-j):=1$ とする).

或る $c\in\mathbb{C}$ を取り $\Sigma:=\{z\in\mathbb{C}^n;\ z_1=c\}$ とし, 開凸集合 $\Omega\subset V$ が Bony-Schapira [Bo-Sc] の意味で h_0-Σ-平坦とする. この時, [Bo-Sc] と 同様にして任意の $\Omega\times B(R)$ 上の整型函数 $f(z,\tau)$ に対して 整型助変数付きの 超局所微分作用素 の整型函数への作用 $P_\Sigma f(z,\tau)\in\mathcal{O}(\Omega\times B(R))$ が well-defined が従う.

$z_0\in\Omega\cap\Sigma$ を固定し$\Omega_s:=\{s(z-z_0)+z_0\in\mathbb{C}^n;\ z\in\Omega\}$ と置く.

さて, 次の条件を考える:

[A-1]. 或る定数 $C>0$ と $[U]$ の近傍 W とが存在して任意の $(z;\zeta)\in[W]$ 及び$\beta\in\mathbb{N}_0^d$ $(\beta\geq m-k)$ に対して $|\mathcal{C}_P(z;\zeta;\beta)|\geq C(\beta+\mathbf{1}_d)^m$.

注意. $d=1$ の時, 条件 [A-1] は通常の特性根条件となる ([M] を参照). 又, 類似の条件が Fuchsian ellipticity の名で [Sz-Zi] に依って考察されている事に注意する.

定理. P が重み (k,m) の Fuchs 型超局所微分作用素であって仮定 [A-1] を満たすとする. この時, 定数 $r_0>0$ 及び $\mathring{R}$ $(0\prec\mathring{R}\leqslant R)$ が存在して次を満たす:

$0<h<h_0$, $0<r<r_0$, $0\prec\widetilde{R}\leqslant\mathring{R}$ なる h, r, $\widetilde{R}$ を任意に取る. Ω を任意の h-Σ-平坦且つ $\operatorname{dia}\Omega\leqslant r$(dia は直径を表す) なる V の開凸集合とする. この時 P と Ω のみに依存する定数 δ が存在して, 任意の$\Omega\times B(\widetilde{R})$ 上の整型函数 $f(z,\tau)$, $g(z,\tau)$ に対して Goursat 問題

$$
(G.P)\begin{cases} P_\Sigma u = f, \\ \\ u - g = O(\tau^{m-k}), \end{cases}
$$

の整型函数解 $u(z,\tau)$ が局所一意に存在し次の集合上整型:

$$
\bigcup_{0<s<1} \Big(\Omega_s \times \Big\{ \tau \in B(\widetilde{R});\ \prod_{j=1}^{d} |\tau_j| < \delta(1-s)^{|m|} \Big\} \Big). \quad \blacksquare
$$

証明は大略 [M] の手法と同様である.

さて, この定理を超局所解析に応用する.

$M := \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^d_t$ としその複素化を $X := \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d = Y \times \mathbb{C}^d = \{(z,\tau)\}$ とする. $N := \mathbb{R}^n \cong M \cap \{t = 0\} \hookrightarrow M$, $L := X \cap \{\mathrm{Im}\, z = 0\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^d$, $\widetilde{\Lambda} := T^*_L X \cong T^*_N Y \times \mathbb{C}^d$, $\Lambda := T^*_M X \cap \widetilde{\Lambda}$ と置く. 通常の様に $T^*_M X$ (resp. $T^*_N Y$) 上の超局所函数の層を $\mathcal{C}_M$ (resp. $\mathcal{C}_N$) と書く. 更に $\widetilde{\Lambda}$ 上の整型助変数付きの超局所函数の層を $\mathcal{CO}_{\widetilde{\Lambda}}$ と書く. ρ を自然写像 $N \underset{M}{\times} T^*_M X \ni (x, 0; \sqrt{-1}(\langle \xi, dx\rangle + \langle \eta, dt\rangle)) \longmapsto (x; \sqrt{-1}\langle \xi, dx\rangle) \in T^*_N Y$ とする.

$p_0 := (0; \sqrt{-1}dx_1) \in T^*_N Y$ とし $P(x,t;\partial_x,\partial_t)$ は$\rho^{-1}(p_0)$ の近傍で定義されているとする. P の主表象 $\sigma_{|m|}(P)$ に対して次の条件を考える:

[A-2]. 或る函数 $\widetilde{P}$ が存在し $\sigma_{|m|}(P)(z,\tau;\zeta,\eta) = \tau^k \widetilde{P}(z,\tau;\zeta,\eta)$ と書け $\widetilde{P}$ は次の条件を満たす:

或る正定数 h_0, M, ν_i ($\nu_i \geqslant 1$) が存在して次の集合上で $\widetilde{P}(z,t;\zeta,\eta)$ は零にならぬ:

$$
\Big\{ (z,t;\zeta,\eta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d;\ |z|,\ |t| < h_0,\ |\zeta_j| < h_0|\zeta_1|\ (2 \leqslant j \leqslant n),
$$
$$
\exists \lambda > M\Big(\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{Im}\, z_j| + \sum_{j=2}^{n} |\mathrm{Im}(\zeta_j/\zeta_1)| \Big),\ |\mathrm{Im}(\eta_i/\zeta_1)| = \nu_i \lambda\ (1 \leqslant i \leqslant d) \Big\}.
$$

注意. [A-2] は次の条件が成り立てば従う:

[A-3]. $\widetilde{P}(x,t;\xi,\eta)=\prod_{j=1}^{d}P_j(x,t;\xi,\eta_j)$ と書け各 P_j は m_j 次且つ t_j-方向に双曲型.

定理. [A-1] と [A-2] とを仮定する. この時, 任意の整型助変数付き超局所函数

$$f(x,t),\ g(x,t)\in\rho_!(\mathcal{C}\mathcal{O}_{\widetilde{\Lambda}}|_{N\underset{M}{\times}T^*_MX})_{p_0}$$

に対して超局所函数

$$u(x,t)\in\rho_!(\mathcal{C}_M|_{N\underset{M}{\times}T^*_MX})_{p_0}$$

が存在して次の Goursat 問題の解と成る:

$$(G.P)\begin{cases}P(x,t;\partial_x,\partial_t)u(x,t)=f(x,t)\\ \\ \qquad u(x,t)-g(x,t)=O(t^{m-k}).\end{cases}\quad\blacksquare$$

証明は $f(x,t)$ 及び $g(x,t)$ のうまい定義函数を取り, 実軸の楔形近傍で先の定理を用いて解き, 更にその解を 柏原-河合 [K-K] と同様の手法で実軸ぎりぎり迄解析的に延長する事でなされる.

系. P は 解析的微分作用素であり [A-1] 及び [A-3] を仮定する. この時, 任意の整型助変数付き超函数

$$f(x,t),\ g(x,t)\in\mathcal{B}\mathcal{O}_L|_{M,0}$$

に対して次の Goursat 問題の超函数解

$$u(x,t)\in\mathcal{B}_M|_0$$

で t を実解析的助変数に持つものが存在する:

$$(G.P)\begin{cases}P(x,t;\partial_x,\partial_t)u(x,t)=f(x,t)\\ \\ \qquad u(x,t)-g(x,t)=O(t^{m-k}).\end{cases}\quad\blacksquare$$

REFERENCES

[Ba-G] Baouendi, M. S. and Goulaouic, C., *Cauchy Problems with Characteristic Initial Hypersurface*, Comm. Pure and Appl. Math. **26** (1973), 455–475.

[Bo-Sc] Bony J. -M. and Schapira P., *Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivees partielles*, Ann. Inst. Fourier **26** (1976), 81–140.

[K-K] Kashiwara, M. and Kawai, T., *Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 359–404.

[K-K-K] Kashiwara, M., Kawai, T. and Kimura, T., *Foundation of Algebraic Analysis*, Kinokuniya, 1980 (in Japanese); English translation from Princeton, 1986.

[La-MF] Laurent, Y. and Monterio Fernandes, T., *Systèmes Différentiels Fuchsiens le Long d'une Sous-Variété*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988), 397–431.

[M] Madi, N. S., *Problème de Goursat holomorphe a variables Fuchsiennes*, Bull. Sc. Math., 2^e série **111** (1987), 291–312.

[O1] Ôaku T., *The Cauchy-Kovalevskaja theorem for pseudo-differential operators of Fuchsian type and its applications*, R.I.M.S. kôkûroku **361** (1979), 131–150.

[O2] ———, *Microlocal boundary value problem for Fuchsian operators, I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA **32** (1985), 287–317.

[S-K-K] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., *Microfunctions and Pseudo-differential Equations*, Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Komatsu, H. (Ed.), Proceedings Katata 1971, Lecture Notes in Math. **287**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1973, pp. 265–529.

[Sz-Zi] Szmydt, Z. and Ziemian, B., *The Mellin Transformation and Fuchsian Type Partial Differential Equations*, Kluwer, Dodrecht–Boston–London, 1992.

[Ta] Tahara, H., *Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations*, Japan. Math. **5** (1979), 245–347.

[W] Wagschal, C., *Une Généralisation du Problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellment holomorphes*, J. Math. pures et appl. **53** (1974), 99–132.

[Y] Yamazaki, S., *Goursat problem for a microdifferential operator of Fuchsian type and its application*, Thesis presented in Univ. Tokyo (1996).