数理解析研究所講究録
971巻 1996年 50-61

Galois 拡大の number knot について

お茶の水女子大学理学部　堀江　充子 (MITSUKO HORIE)

有限次代数体の Galois 拡大 L/k に対して，J_L，J_k 及び $L^\times$，$k^\times$ をそれぞれ L，k の idele 群 及び 乗法群とし，$N_{L/k}$ を J_L から J_k へのノルム写像とする．自然な（対角的な）埋め込み $k^\times \longrightarrow J_k$，$L^\times \longrightarrow J_L$ によって，$N_{L/k}$ は通常のノルム写像 $L^\times \longrightarrow k^\times$ を引き起こし，可換図式

$$\begin{array}{ccc} L^\times & \longrightarrow & J_L \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N_{L/k}} \\ k^\times & \longrightarrow & J_k \end{array}$$

が得られるが，

$$\nu_{L/k} = (N_{L/k}(J_L) \cap k^\times)/N_{L/k}(L^\times)$$

とおき，この剰余群を L/k の number knot と呼ぶ．

この小論では，L 及び k を動かしたときの number knot $\nu_{L/k}$ の変化について考察する．

§1. 準備.

有理数体を $\mathbf{Q}$，有理整数環を $\mathbf{Z}$，全ての自然数の集合を $\mathbf{N}$ とし，$\mathbf{Z}$ で有理整数環の加法群も表す.

よく知られているように，number knot の構造はコホモロジー群を用いて記述される（後述の定理A参照）ので，まずコホモロジー群に関する知識を整理しておく.

有限群 G と G の作用する加群 A が与えられたとき，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，A における G の n 次元ホモロジー群を $H_n(G, A)$ と書き，任意の $r \in \mathbf{Z}$ に対し，Tate の意味 ([9] 参照) での A における G の r 次元コホモロジー群を $H^r(G, A)$ と書く．従って，

$$H^0(G, A) = A^G/N_G(A), \qquad H^{-1}(G, A) = {}_GA/\sum_{\sigma \in G}(1-\sigma)A,$$
$$H^{-n}(G, A) = H_{n-1}(G, A), \qquad 2 \leq n \in \mathbf{N}.$$

ここに N_G は

$$N_G(a) = \sum_{\sigma \in G} \sigma a, \qquad a \in A$$

で定められる準同型写像 $A \longrightarrow A$ であり，

$$A^G = \{a \in A \mid \sigma a = a \quad (\sigma \in G)\}, \qquad {}_GA = \mathrm{Ker}\, N_G$$

である．なお，ホモロジー群を記述する場合，標準鎖複体の非斉次形を用いることにする．すなわち，各整数 $m \geq 0$ に対し G^m を G の m 個の直積とし P_{G^m} を G^m で生成される左 G 自由加群（特に $P_{G^0} = \mathbf{Z}$ ）とするとき，各 $n \in \mathbf{N}$ に対し準同型 $\partial_n : A \otimes_G P_{G^n} \longrightarrow A \otimes_G P_{G^{n-1}}$ を

$$\partial_n(a \otimes_G (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)) = (\sigma_1^{-1}a) \otimes_G (\sigma_2, \cdots, \sigma_n) - a \otimes_G (\sigma_1\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_n) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} a \otimes_G (\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}\sigma_n) + (-1)^n a \otimes_G (\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}),$$
$$a \in A, \qquad (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in G^n$$

によって定めれば，

$$H_n(G, A) = \mathrm{Ker}\, \partial_n / \mathrm{Im}\, \partial_{n+1}, \qquad n \in \mathbf{N}$$

である．また，加法群 $\mathbf{Z}$ は常に自明な G 加群とみなし，$A = \mathbf{Z}$ の場合の $\mathbf{Z} \otimes_G P_{G^n}$，$n \in \mathbf{N}$，の元 $a \otimes_G (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ (但し，$a \in \mathbf{Z}$; $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in G$) を単に $a(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ と書くことにする．

改めて G を有限群, A を G 加群とし, H を G の部分群とする時, 任意の $r\in\mathbf{Z}$ に対して, $\mathrm{Res}=\mathrm{Res}^{(r)}_{G,H;A}$ で restriction map $H^r(G,A)\longrightarrow H^r(H,A)$ を表し, $\mathrm{Cor}=\mathrm{Cor}^{(r)}_{G,H;A}$ で corestriction map $H^r(H,A)\longrightarrow H^r(G,A)$ を表す. T を 左剰余類 $H\backslash G$ の完全代表系とし, 各 $\sigma\in G$ に対し, $\overline{\sigma}$ を $H\overline{\sigma}=H\sigma$ で一意的に定まる T の元とすれば, 特に各整数 $m\geq 0$ に対し $\mathrm{Res}^{(-m-1)}_{G,H;A}$ は $m=0$ の場合 $a\mapsto\sum_{\tau\in T}\tau a$, $a\in A$, により, $m\geq 1$ の場合

$$a\otimes_G(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)\mapsto$$
$$\sum_{\tau\in T}\tau a\otimes_H(\tau\sigma_1\overline{\tau\sigma_1}^{-1},\overline{\tau\sigma_1}\sigma_2\overline{\tau\sigma_1\sigma_2}^{-1},\cdots,\overline{\tau\sigma_1\cdots\sigma_{m-1}}\sigma_m\overline{\tau\sigma_1\cdots\sigma_m}^{-1}),$$
$$a\in A,\qquad(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)\in G^m,$$

により定まる準同型 $A\otimes_G P_{G^m}\longrightarrow A\otimes_H P_{H^m}$ から導かれる. 同時に $\mathrm{Cor}^{(-m-1)}_{G,H;A}$ は

$$a\otimes_H(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)\mapsto a\otimes_G(\sigma_1,\cdots,\sigma_m),\qquad a\in A,\quad(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)\in H^m$$

により定まる準同型 $A\otimes_H P_{H^m}\longrightarrow A\otimes_G P_{G^m}$ から導かれる.

更に, H が G の正規部分群であるとき各整数 $m\geq 0$ に対して, deflation map

$$\mathrm{Defl}:H^{-m}(G,A)\longrightarrow H^{-m}(G/H,A^H)$$

は $m=0$, $m=1$, ないし $m\geq 2$ の場合に応じて, それぞれ

$$a\mapsto a,\qquad a\in A^G$$

により定まる準同型 $A^G\longrightarrow(A^H)^{G/H}$,

$$a\mapsto N_H(a),\qquad a\in {}_GA$$

により定まる準同型 ${}_GA \longrightarrow {}_{G/H}(A^H)$，ないし

$$a \otimes_G (\sigma_1, \cdots, \sigma_{m-1}) \mapsto N_H(a) \otimes_{G/H} (\sigma_1 H, \cdots, \sigma_{m-1} H),$$
$$a \in A, \qquad (\sigma_1, \cdots, \sigma_{m-1}) \in G^{m-1}$$

により定まる準同型 $A \otimes_G P_{G^{m-1}} \longrightarrow A \otimes_H P_{H^{m-1}}$ から導かれる（河田 [3]，Weiss[10]，…）．

次に $A_H = A/\sum_{\tau \in H}(1-\tau)A$ とおき，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，residuation map

$$\mathrm{Resid} : H_n(G, A) \longrightarrow H_n(G/H, A_H)$$

を

$$a \otimes_G (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \mapsto (a + \sum_{\tau \in H}(1-\tau)A) \otimes_{G/H} (\sigma_1 H, \cdots, \sigma_n H),$$
$$a \in A, \qquad (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in G^n$$

により定まる準同型 $A \otimes_G P_{G^n} \longrightarrow A_H \otimes_{G/H} P_{(G/H)^n}$ から導かれる準同型として定義する（中山 [6]）．

<u>注意</u>　$A = \mathbf{Z}$ のとき，各 $n \in \mathbf{N}$ に対し $H^{-n-1}(G, \mathbf{Z})$ から $H^{-n-1}(H, \mathbf{Z})$ への写像として Defl と Resid の両方が定義され

$$\mathrm{Defl}(\zeta) = |H|\,\mathrm{Resid}(\zeta), \qquad \zeta \in H^{-n-1}(G, \mathbf{Z}).$$

Weiss [10] の中でこの Resid は $\dfrac{\mathrm{Defl}}{|H|}$ と表されている．

以下，L/k を有限次代数体の Galois 拡大とし，$G = \mathrm{Gal}(L/k)$ とおく．更に，k の各素点 v に対し，v の上にある L の素点 V を 1 つずつ選んで固定し，G_v を V の L/k に

関する分解群，L_v を V における L の完備化とする．v が L で不分岐のときには G_v は巡回群なので，$H^{-3}(G_v, \mathbf{Z}) = \{0\}$ となる．このことに注意して，準同型写像

$$\rho_{L/k} : \bigoplus_v H^{-3}(G_v, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{-3}(G, \mathbf{Z})$$

を

$$\rho_{L/k}((\zeta_v)_v) = \sum_v \mathrm{Cor}^{(-3)}_{G,G_v;\mathbf{Z}}(\zeta_v), \qquad \zeta_v \in H^{-3}(G_v, \mathbf{Z})$$

により定義する．更に，C_L によって L の idele 類群を表すものとする．

さて $r \in \mathbf{Z}$ とし ξ を $H^2(G, C_L)$ の標準類とする．また k の各素点 v に対し，ξ_v を $H^2(G_v, L_v^\times)$ の標準類とする．よく知られているように，

$$(\mathfrak{a}, b) \mapsto \mathfrak{a}^b, \qquad \mathfrak{a} \in C_L, \quad b \in \mathbf{Z}$$

によって定義される G-pairing $C_L \times \mathbf{Z} \longrightarrow C_L$ は cup 積 $H^2(G, C_L) \times H^r(G, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{r+2}(G, C_L)$ を与えるが，この cup 積による各 (ξ, ζ)，$\zeta \in H^r(G, \mathbf{Z})$，の像を $\xi \cup \zeta$ と書けば，

$$\Phi_{L/k}(\zeta) = \xi \cup \zeta, \qquad \zeta \in H^r(G, \mathbf{Z})$$

により同型 $\Phi_{L/k} : H^r(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{r+2}(G, C_L)$ が引き起こされる（Tate，[3,9] 参照）．同様に k の素点 v に対して，自明な G_v-pairing $L_v^\times \times \mathbf{Z} \longrightarrow L_v^\times$ の引き起こす cup 積 $H^2(G_v, L_v^\times) \times H^r(G_v, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{r+2}(G_v, L_v^\times)$ による各 (ξ_v, ζ_v)，$\zeta_v \in H^r(G_v, \mathbf{Z})$，の像を $\xi_v \cup_v \zeta_v$ と書けば

$$\Phi_v(\zeta_v) = \xi_v \cup_v \zeta_v, \qquad \zeta_v \in H^r(G_v, \mathbf{Z})$$

により同型 $\Phi_v : H^r(G_v, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{r+2}(G_v, L_v^\times)$ が定まる（Tate，[3] 参照）．特に $\Phi_{L/k} : H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{-1}(G, C_L)$ は，2-cocycle $f \in \xi$ をとったとき

$$a(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto f(\sigma_1, \sigma_2)^a, \qquad a \in \mathbf{Z}, \quad (\sigma_1, \sigma_2) \in G^2$$

で定まる準同型 $\mathbf{Z}\otimes_G P_{G^2} \longrightarrow C_L$ から導かれる同型に他ならない．なお，周知のように

$$\Phi_{L/k} : H^{-2}(G,\mathbf{Z}) \longrightarrow H^0(G,C_L)$$

は類体論の相互法則を与えている．さて，k のすべての素点 v に関する

$$\Phi_v : H^{-3}(G_v,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{-1}(G_v,L_v^{\times})$$

は同型

$$\bigoplus_v H^{-3}(G_v,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{-1}(G,J_L) = \bigoplus_v H^{-1}(G_v,L_v^{\times})$$

を引き起こし，自然な G 準同型 $J_L \longrightarrow C_L$ は準同型

$$H^{-1}(G,J_L) \longrightarrow H^{-1}(G,C_L)$$

を引き起こす．そしてこれらは可換な図式

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_v H^{-3}(G_v,\mathbf{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\rho_{L/k}"] & H^{-1}(G,J_L) \arrow[d] \\
H^{-3}(G,\mathbf{Z}) \arrow[r, "\Phi_{L/k}"] & H^{-1}(G,C_L)
\end{tikzcd}$$

を与える．一方 $N_{L/k}$ は準同型

$$H^{-1}(G,C_L) = {}_G(C_L)/(\prod_{\sigma\in G} C_L^{1-\sigma}) \longrightarrow \nu_{L/k}$$

を引き起こすが，この準同型も $N_{L/k}$ と書くことにすれば，完全系列

$$H^{-1}(G,J_L) \longrightarrow H^{-1}(G,C_L) \xrightarrow{N_{L/k}} \nu_{L/k} \longrightarrow 1$$

を得る．従ってよく知られた次の結果が得られる．

<u>定理A</u>(Scholz[8]，Tate[9]，国吉 [4])　$\nu_{L/k} \cong \mathrm{Coker}(\rho_{L/k})$.

§2. 可換図式.

L/k 及び M/K を有限次代数体の Galois 拡大とし

$$G = \mathrm{Gal}(L/k), \qquad X = \mathrm{Gal}(M/K)$$

とする．L/k と M/K の間に何らかの関係があるとき，二つの完全系列

$$H^{-3}(G,\mathbf{Z}) \overset{\Phi_{L/k}}{\longrightarrow} H^{-1}(G,C_L) \overset{N_{L/k}}{\longrightarrow} \nu_{L/k}\ ,$$
$$H^{-3}(X,\mathbf{Z}) \overset{\Phi_{M/K}}{\longrightarrow} H^{-1}(X,C_M) \overset{N_{M/K}}{\longrightarrow} \nu_{M/K}$$

の間にどのような関係があるかを，以下四つの場合について考察する．

I. $L = M \supset K \supset k$ である場合，$G \supset X$ であるが，各 $r \in \mathbf{Z}$ に対し次の二つの図式が可換であることはよく知られている．

$$\begin{tikzcd} H^r(G,\mathbf{Z}) \arrow[r, "\Phi_{L/k}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & H^{r+2}(G,C_L) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\ H^r(X,\mathbf{Z}) \arrow[r, "\Phi_{L/K}"] & H^{r+2}(X,C_L), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^r(G,\mathbf{Z}) \arrow[r, "\Phi_{L/k}"] & H^{r+2}(G,C_L) \\ H^r(X,\mathbf{Z}) \arrow[r, "\Phi_{L/K}"] \arrow[u, "\mathrm{Cor}"] & H^{r+2}(X,C_L). \arrow[u, "\mathrm{Cor}"] \end{tikzcd}$$

従って次の結果が得られる．

<u>命題1</u>　二つ図式

$$\begin{tikzcd} H^{-3}(G,\mathbf{Z}) \arrow[r, "N_{L/k}\cdot\Phi_{L/k}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \nu_{L/k} \arrow[d] \\ H^{-3}(X,\mathbf{Z}) \arrow[r, "N_{L/K}\cdot\Phi_{L/K}"] & \nu_{L/K}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^{-3}(G,\mathbf{Z}) \arrow[r, "N_{L/k}\cdot\Phi_{L/k}"] & \nu_{L/k} \\ H^{-3}(X,\mathbf{Z}) \arrow[r, "N_{L/K}\cdot\Phi_{L/K}"] \arrow[u, "\mathrm{Cor}"] & \nu_{L/K} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

は可換である．ただし，左から２番目の縦写像は自然な埋め込み $J_k \longrightarrow J_K$ から導かれる準同型であり，右辺の縦写像は $N_{K/k} : J_K \longrightarrow J_k$ から導かれる準同型である．

II. $L \supset M \supset K = k$ である場合，$Y = \mathrm{Gal}(L/M)$ とおけば $X = G/Y$ とみなせる．S を剰余群 G/Y の完全代表系とし，各 $\sigma \in G$ に対して $\overline{\sigma}$ を $\overline{\sigma}Y = \sigma Y$ で一意的に定まる S の元とすれば，

$$(\sigma_1 Y, \sigma_2 Y) \mapsto |Y|(\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}), \qquad (\sigma_1, \sigma_2) \in G^2$$

により定まる準同型 $\mathbf{Z} \otimes_X P_{X^2} \longrightarrow \mathbf{Z} \otimes_G P_{G^2}$ は準同型 $H_2(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H_2(G, \mathbf{Z})$ を導くことが Miller [5] における議論よりわかる．そこでこの準同型を μ_Y と書くことにする．

<u>補題 1</u>　m を負でない整数とするとき，次の二つの図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} H^{-m-2}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{L/k}} & H^{-m}(G, C_L) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Resid}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Defl}} \\ H^{-m-2}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{M/k}} & H^{-m}(X, C_M), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{L/k}} & H^{-1}(G, C_L) \\ \uparrow{\scriptstyle \mu_Y} & & \uparrow \\ H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{M/k}} & H^{-1}(X, C_M). \end{array}$$

ここで右辺の縦写像は

$$\mathfrak{a}M^{\times} \mapsto \mathfrak{a}L^{\times}, \qquad \mathfrak{a} \in J_M$$

により定まる準同型 ${}_X(C_M) \longrightarrow {}_G(C_L)$ が自然に導く準同型である．

従って：

<u>命題 2</u>　二つ図式

$$\begin{array}{ccc} H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Resid}} & & \downarrow \\ H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/k} \cdot \Phi_{M/k}} & \nu_{M/k}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \uparrow{\scriptstyle \mu_Y} & & \uparrow \\ H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/k} \cdot \Phi_{M/k}} & \nu_{M/k} \end{array}$$

は可換である．ここで左から 2 番目の縦写像は恒等写像 $J_k \longrightarrow J_k$ から導かれる準同型であり，右辺の縦写像は J_k の自己準同型

$$\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^{[L:M]} = \mathfrak{a}^{|Y|}, \qquad \mathfrak{a} \in J_k$$

から導かれる準同型である．

注意 命題2の左側の図式の可換性は既に 国吉 [4] の中で述べられている.

III. $M = LK$ かつ $k = L \cap K$ である場合,

$$(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_1|L, \sigma_2|L), \qquad (\sigma_1, \sigma_2) \in X^2$$

により定まる同型 $\mathbf{Z} \otimes_X P_{X^2} \longrightarrow \mathbf{Z} \otimes_G P_{G^2}$ が引き起こす同型 $H_2(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H_2(G, \mathbf{Z})$ をを ψ と書こう.

命題3 次の二つ図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} H^{-3}(G,\mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k}\cdot\Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \downarrow{\scriptstyle [K:k]\psi^{-1}} & & \downarrow \\ H^{-3}(X,\mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/K}\cdot\Phi_{M/K}} & \nu_{M/K}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^{-3}(G,\mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k}\cdot\Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\ \uparrow{\scriptstyle \psi} & & \uparrow \\ H^{-3}(X,\mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/K}\cdot\Phi_{M/K}} & \nu_{M/K} \end{array}$$

ここに各 $n \in \mathbf{Z}$ に対し $n\psi^{-1}$ は勿論

$$\zeta \mapsto n(\psi^{-1}(\zeta)), \qquad \zeta \in H^{-3}(G, \mathbf{Z})$$

により定まる準同型 $H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{-3}(X, \mathbf{Z})$ を表し, 左から2番目の縦写像は自然な埋め込み $J_k \longrightarrow J_K$ の導く準同型, 右辺の縦写像は $N_{K/k} : J_K \longrightarrow J_k$ の導く準同型である.

注意 M/k が Galois 拡大である場合, $\tilde{X} = \mathrm{Gal}(M/k)$ とおけば, ψ は合成写像

$$H^{-3}(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^{-3}(\tilde{X}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Resid}} H^{-3}(G, \mathbf{Z})$$

に他ならない. $Y = \mathrm{Gal}(M/L)$ とおくとき, II におけるのと同様にして準同型 $\mu_Y : H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{-3}(\tilde{X}, \mathbf{Z})$ を得るが, この場合 $[K : k]^2\psi^{-1}$ が合成写像

$$H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\mu_Y} H^{-3}(\tilde{X}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^{-3}(X, \mathbf{Z})$$

である.

IV. 同型 $\gamma : L \xrightarrow{\sim} M$ が存在し，$\gamma|k$ が同型 $k \xrightarrow{\sim} K$ を与える場合，

$$X = \{\gamma \cdot \sigma \cdot \gamma^{-1} \mid \sigma \in G\}$$

であるから

$$(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\gamma \cdot \sigma_1 \cdot \gamma^{-1},\ \gamma \cdot \sigma_2 \cdot \gamma^{-1}), \qquad (\sigma_1, \sigma_2) \in G^2$$

により準同型 $\mathbf{Z} \otimes_G P_{G^2} \longrightarrow \mathbf{Z} \otimes_X P_{X^2}$ が定義される．一方，γ は自然な同型 $J_k \xrightarrow{\sim} J_K$ を与える．そこでこれらの引き起こす準同型 $H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{-3}(X, \mathbf{Z})$ ないし準同型 $\nu_{L/k} \longrightarrow \nu_{M/K}$ をそれぞれ $\bar{\gamma}$ ないし γ^* と書けば次の結果が容易に得られる．

<u>命題 4</u>　図式

$$\begin{array}{ccc}
H^{-3}(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{L/k} \cdot \Phi_{L/k}} & \nu_{L/k} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \bar{\gamma}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma^*} \\
H^{-3}(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{N_{M/K} \cdot \Phi_{M/K}} & \nu_{M/K}
\end{array}$$

は可換である．

§3. 応用.

前節で与えた可換図式により，Galois 拡大の number knot の変化する様子を見るためには，$\mathbf{Z}$ における Galois 群の -3 次元コホモロジー群の変化する様子を調べればよい．最後に，前節の結果を応用してわかることをいくつか挙げることにする．

L/k を有限次代数体の Galois 拡大とし，K を L に含まれる k の Galois 拡大体とするとき，恒等写像 $J_k \longrightarrow J_k$ が与える準同型 $\nu_{L/k} \longrightarrow \nu_{K/k}$ の核を $\nu_{L/K/k}$ と書く：

$$\nu_{L/K/k} = \mathrm{Ker}(\nu_{L/k} \longrightarrow \nu_{K/k}) = N_{L/k}(J_L) \cap N_{K/k}(K^\times)/N_{L/k}(L^\times).$$

<u>定理1</u>　k を有限次代数体とし，K 及び L を k の有限次 Galois 拡大体で $[K:k]$ と $[L:k]$ が互いに素なものとするとき，$M=KL$ とすれば $\nu_{M/K}\cong\nu_{M/K/k}\cong\nu_{L/k}$ であり

$$\nu_{M/k}=\nu_{M/K/k}\times\nu_{M/L/k}$$

が成り立つ．

<u>注意</u>　定理1の仮定の下で $\nu_{M/k}\cong\nu_{K/k}\times\nu_{L/k}$ となることは既に Razar [7] で示されている（[2] も参照）．

<u>定理2</u>　F/k を有限次代数体の Galois 拡大とし，L は F と k の任意の有限次 Abel 拡大体との合成体とすれば，恒等写像 $J_k\longrightarrow J_k$ から自然に導かれる準同型 $\nu_{L/k}\longrightarrow\nu_{F/k}$ は全射である．

さて各 $(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，$m\mid n$，に対し

$$\phi_{m,n}(a+n\mathbf{Z})=a+m\mathbf{Z},\qquad a\in\mathbf{Z}$$

により準同型 $\phi_{m,n}:\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ が定義され，射影系

$$(\{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}|\ n\in\mathbf{Z}\},\ \ \{\phi_{m,n}|\ m,\ n\in\mathbf{Z},\ m\mid n\})$$

が得られる．この射影系の射影的極限を $\hat{\mathbf{Z}}$ と書く：

$$\hat{\mathbf{Z}}=\varprojlim_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

$\hat{\mathbf{Z}}$ はすべての素数 p に関する p 進整数環の加法群の直積に位相群として同型である．周知のように，任意の有限次代数体 k に対し，k の Galois 拡大体 $\tilde{k}$ で位相群として

$$\mathrm{Gal}(\tilde{k}/k)\cong\hat{\mathbf{Z}}$$

となるものが存在する．このような代数体 $\tilde{k}$ を k の $\hat{\mathbf{Z}}$ 拡大体と呼ぶ．

<u>定理3</u>　K/k を有限次代数体の Abel 拡大とし，Ω を K と k の任意の $\hat{\mathbf{Z}}$ 拡大体との合成体とすれば，Ω/K の中間体であるほとんど全ての有限次代数体 F と Ω/F の任意の有限次中間体 L に対し $\nu_{L/F/k}=1$ であり従って $\nu_{L/k}\cong\nu_{F/k}$ が成り立つ．

<u>定理4</u>　K を2次体とし，M を極大な K の狭義不分岐 2 巾次巡回拡大体とすれば $\nu_{M/\mathbf{Q}}=1$ であって，L/F を M/K の中間体の拡大とし，$M\neq L$, $F\neq K$ とするとき，$|\nu_{F/\mathbf{Q}}|=|\nu_{L/\mathbf{Q}}|=2$ となる．しかも $J_{\mathbf{Q}}$ の自己準同型

$$\mathfrak{a}\mapsto\mathfrak{a}^{[L:F]},\qquad \mathfrak{a}\in J_{\mathbf{Q}}$$

が与える準同型 $\nu_{F/\mathbf{Q}}\longrightarrow\nu_{L/\mathbf{Q}}$ は同型写像である．

<u>注意</u>　定理2の仮定の下では（定理2により）$\nu_{L/k}$ の生成系（の代表）がそのまま $\nu_{F/k}$ の生成系を与えることになる．定理3についても同様である．逆に定理4の仮定の下では $\nu_{F/\mathbf{Q}}$ の生成元の代表を $[L:F]$ 乗したものが $\nu_{L/\mathbf{Q}}$ の生成元を与えるのである．

文　献

1. 堀江充子, *Hasse norm principle* について, 数理研講究録 **797** (1992), 81–87.
2. W. Jehne, *On knots in algebraic number theory*, J. reine angew. Math. **311/312** (1979), 215–254.
3. 河田敬義, 代数的整数論, 共立出版, 1957.
4. 国吉秀夫, *Cohomology* 群の整数論的性質 *§4. Total-norm-residue*, 数学 **6** (1954), 38.
5. C. Miller, *The second homology group of a group; relations among commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 588–595.
6. T. Nakayama（中山正）, *A remark on fundamental exact sequences in cohomology of finite groups*, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 731–735.
7. M. J. Razar, *Central and genus class fields and the Hasse norm theorem*, Compositio Math. **35** (1977), 281–298.
8. A. Scholz, *Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nicht abelscher Körpererweiterungen. I*, J. reine angew. Math. **172** (1936), 100–107, *II*, J. reine angew. Math., **182** (1940), 217–234.
9. J. T. Tate, *Global class field theory*; in “Algebraic number theory” (J. W. Cassels and Fröhlich, eds.), Academic Press, London/New York, 1967.
10. E. Weiss, *A deflation map*, J. Math. Mech. **8** (1959), 309–329.