数理解析研究所講究録
976巻 1997年 86-96

Π^0_∞-BCTの保存性について

東北大理学研究科　山崎　武 (Takeshi Yamazaki)

WKL_0がRCA_0のΠ^1_1-conservative extensionであることを示したHarringtonの証明法を応用し，BrownとSimpsonは$RCA_0+\Pi^0_\infty$-BCTもRCA_0のΠ^1_1-conservative extensionとなることを証明した[1]．この小論ではBrownとSimpsonの結果を更に拡張し，またΣ^b_1-NIAと呼ばれる体系[4]上で同様の結果が得られることを示す．

1　RCA_0とΠ^0_∞-BCT

RCA_0はdiscrete ordered semiringの公理系にΣ^0_1-INDとΔ^0_1-CAを加えた二階算術の体系である．またΠ^0_∞-BCTは次のように定義される．

定義　Π^0_∞-BCTは次のschemeのことである：任意のΠ^0_∞-formula $\varphi(x,y)$に対して

$$\forall n \forall \sigma \in 2^{<N} \exists \tau \in 2^{<N}(\sigma \subseteq \tau \wedge \varphi(n,\tau)) \rightarrow \exists f \in 2^N \forall n \exists k \varphi(n, f[k]).$$

ここで，$2^{<N}$は0と1の有限列全体の集合，2^NはNから$\{0,1\}$への関数全体のクラス，$f[k]$は$<f(0), f(1), \ldots, f(k-1)>$のことである．

Π^0_∞-BCTはおおまかにいって，Cantor空間においてΠ^0_∞-formulaで一様に定義できる稠密な開集合は共通の元をもつことを主張したものである．可分Banach空間における開写像定理や閉グラフ定理の証明に用いられるBaire category theoremはWKL_0では証明できない[1]．ここで，WKL_0は「任意の無限$\{0,1\}$-木は無限pathを持つ」というweak König's lemmaをRCA_0に加えた体系である．Π^0_∞-BCTはこれを証明するために導入さ

れた．しかし，Baire category theorem を証明するにはΠ^0_∞-formula をΠ^0_1-formula に制限してもよい (これが必要十分条件になっている [2])．

ところで，WKL_0に関する Harrington の結果にもとづき，Tanaka[6] は次のような予想をたてた．

予想 1　任意のΠ^0_∞-formula φ について，$WKL_0 \vdash \exists! X\varphi(X)$ ならば $RCA_0 \vdash \exists! X\varphi(X)$ である．

例えば，path が一本しかない recursive な無限 $\{0,1\}$-木については，その path は recursive にとれる．このことは容易にRCA_0の上で形式化できる．また，Jockusch と Soare の結果 [5] を使うと十分に強い induction の仮定の下でこの予想は成り立つ．これと同様なことがΠ^0_∞-BCT でもいえる．そこで，次の予想も考えられる．

予想 2　任意のΠ^0_∞-formula φ について，$RCA_0 + \Pi^0_\infty$-BCT$\vdash \exists! X\varphi(X)$ ならば $RCA_0 \vdash \exists! X\varphi(X)$ である．

ところで，$\exists! X\varphi(X)$ となる代表的なものはΠ^0_∞-formula に対する内包公理であるが，この場合に関して予想 2 が成り立つことを以下で証明する．

定理 1.1　任意のΠ^0_∞- formula φ について，$RCA_0 + \Pi^0_\infty$-BCT$\vdash \exists X\forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$ ならば $RCA_0 \vdash \exists X\forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$ である．

$I\Sigma^0_1$の可算モデル (M, S) について $(M, \Delta^0_1\text{-Def})$ は RCA_0のモデルとなる．ここで，Δ^0_1-Def は (M, S) においてΔ^0_1-definable な集合をすべてを集めたものである．特に，S が有限のときのΔ^0_1-Def を**有限生成的な second part** と呼ぶことにする．また，RCA_0の可算モデル (M, S) において $D \subset 2^{<N}$が **dense** であるとは，任意の$\sigma \in 2^{<N}$についてある $\tau \in D$が存在して $(M, S) \models \sigma \subseteq \tau$が成り立つことをいう．また Dが (M, S)**-definable** とは，Dが (M, S) においてあるΠ^0_∞-formula によって定義できることとする．このとき，全ての (M, S)-definable dense set に対して $\exists k(G[k] \in D)$ となる G がとれる．この G を (M, S)**-generic** と呼ぶ．以下では，モデルは全て可算モデルとして議論する．

補題 1.2　$(M,S)\models \mathrm{RCA}_0$かつ Sは有限生成的であるとする．そして，free variable が x のみのΠ^0_∞-formula $\varphi(x)$(ただし，$M\cup S$の元をパラメータに含んでよい) が $(M,S)\models \neg\exists X\forall x(x\in X\leftrightarrow\varphi(x))$ を満たすとする．このとき，$S'(\supseteq S)$ で次のことが成り立つものが存在する．

(i)$(M,S')\models\mathrm{RCA}_0$.

(ii)S'は有限生成的である．

(iii) ある $A\in S'$が存在して，任意の $(M$,S)-definable dense set Dについて $(M,S')\models \exists k(A[k]\in D)$.

(iv)$(M,S')\models\neg\exists X\forall x(x\in X\leftrightarrow\varphi(x))$.

[証明]　S は $\{B_1,B_2,\dots,B_m\}$ によって生成されているとする．G を (M,S)-generic とし，S'として $\{B_1,B_2,\dots,B_m,G\}$ によって生成される second part とる．このとき，Brown と Simpson[1] から $(M,S')\models\mathrm{RCA}_0$であり，任意の (M,S)-definable dense set Dについて $(M,S')\models\exists k(G[k]\in D)$ となる．

そこで，(iv) が成り立つことをみればいい．今，$\{\varphi_i(x)\}_{i\in\omega}$を $(M,\{B_1,B_2,\dots,B_m,G\})$ の元を含む free variable が x だけのΣ^0_1-formula を全て並べたものとする．すると，各$\varphi_i(x)$ はΣ^0_0-formula θ_iによって $\exists k\theta_i(x,k,B_1[k],B_2[k],\dots,B_m[k],G[k])$ となっていると考えていい．そこで，$E_{i,j}\subset 2^{<N}$を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\sigma\in E_{i,j}\Leftrightarrow \exists x\forall\tau\supseteq\sigma(((&\neg\varphi(x)\wedge\exists k_1\le lh(\tau)\theta_i(x,k_1,B_1[k_1],B_2[k_1],\dots,B_m[k_1],\tau[k_1]))\\ &\vee(\varphi(x)\wedge\forall l_1\le lh(\tau)\neg\theta_i(x,l_1,B_1[l_1],B_2[l_1],\dots,B_m[l_1],\tau[l_1])))\\ &.\vee.((\neg\varphi(x)\wedge\forall l_2\le lh(\tau)\neg\theta_j(x,l_2,B_1[l_2],B_2[l_2],\dots,B_m[l_2],\tau[l_2]))\\ &\vee(\varphi(x)\wedge\exists k_2\le lh(\tau)\theta_j(x,k_2,B_1[k_2],B_2[k_2],\dots,B_m[k_2],\tau[k_2])))).\end{aligned}$$

また，$D_{i,j}\subset 2^{<N}$を次のように定義する．

$$\sigma\in D_{i,j}\Leftrightarrow\sigma\in E_{i,j}\vee\neg\exists\tau\in E_{i,j}(\tau\supseteq\sigma).$$

$D_{i,j}$は (M,S)-definable dense である．したがって，$\sigma_0\in D_{i,j}\wedge\exists k(\sigma_0=G[k])$ となる σ_0がとれる．

このとき，$\sigma_0 \in E_{i,j}$であることを次に示す．いま，$\sigma_0 \notin E_{i,j}$と仮定すると，$\sigma_0 \in D_{i,j}$より，任意の$\tau \supseteq \sigma_0$に対して次のことが(M,S)で成り立つ．

$$\forall x \exists \tau' \supseteq \tau((\varphi(x) \leftrightarrow \exists k \theta_i(x,k,B_1[k],B_2[k],\dots,B_m[k],\tau[k]))$$

$$\wedge(\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists l \theta_j(x,l,B_1[l],B_2[l],\dots,B_m[l],\tau[l])))$$

これを$\psi(\tau)$とする．すると，$(M,S) \models \psi(\sigma_0)$より任意の$x \in M$に対して，

$$(a) \quad (M,S) \models \varphi(x) \rightarrow \exists \tau \supseteq \sigma_0 \exists l \leq lh(\tau)\theta_i(x,l,B_1[l],B_2[l],\dots,B_m[l],\tau[l]).$$

また，任意の$\tau \supseteq \sigma_0$について$(M,S) \models \psi(\tau)$だから，同じく任意の$x \in M$に対して，

$$(b) \quad (M,S) \models \neg\varphi(x) \rightarrow \forall \tau \supseteq \sigma_0 \forall l \leq lh(\tau)\neg\theta_i(x,l,B_1[l],B_2[l],\dots,B_m[l],\tau[l]).$$

したがって，

$$(M,S) \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \exists \tau \supseteq \sigma_0 \exists l \leq lh(\tau)\theta_i(x,l,B_1[l],B_2[l],\dots,B_m[l],\tau[l])).$$

同様にして，

$$(M,S) \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \forall \tau \supseteq \sigma_0 \forall l \leq lh(\tau)\neg\theta_j(x,l,B_1[l],B_2[l],\dots,B_m[l],\tau[l])).$$

Sは$\{B_1,B_2,\dots,B_m\}$によって生成されているので，これは$(M,S) \models \neg\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$に反する．よって，$\sigma_0 \in E_{i,j}$となる． 以上より，$\exists k(\sigma_0 = G[k])$だから，

$$(M,S') \models \exists x(\neg(\varphi(x) \leftrightarrow \exists k \theta_i(x,k,B_1[k],B_2[k],\dots,B_m[k],G[k]))$$

$$\vee\neg(\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists l \theta_j(x,l,B_1[l],B_2[l],\dots,B_m[l],G[l]))).$$

今，ある$X \in S'$によって$(M,S') \models \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$とする．すると，$S'$は$\{B_1,B_2,\dots,B_m,G\}$で生成されているので，X はある$\varphi_i(x)$と$\neg\varphi_j(x)$によって$(M,S') \models \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi_i(n) \leftrightarrow \neg\varphi_j(n))$となる．これは，先の結果に矛盾する．したがって，(iv)が示された．□

補題 1.3 $(M,S) \models \mathrm{RCA}_0$かつ$S$は有限生成的であるとする．更に，$\varphi(x)$を free variable

が x のみのΠ^0_∞-formula (ただし，$M \cup S$の元をパラメータに含んでよい) とする．このとき，

$(M, S) \models \neg\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$

ならば，$S'(\supseteq S)$ で $(M, S') \models \mathrm{RCA}_0 + \Pi^0_\infty\text{-BCT}+\neg\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$ となるものが存在する．

[証明] $(M, S) \models \mathrm{RCA}_0$かつ S は有限生成的であり，$\Pi^0_\infty$-formula φ は補題の仮定を満たすものとする．

このとき，補題1.2 を用いて帰納的に定義することで，有限生成的な second part の増加列 $(S_i)_{i\in\omega}$を以下の性質を満たすようにとれる．

(i) 各 S_iは有限生成的かつ $(M, S_i) \models \mathrm{RCA}_0$.

(ii) 任意の i について，ある $X \in S_{i+1}$が存在して X は任意の (M, S_i)-definable dense set Dについて $(M, S_{i+1}) \models \exists k(X[k] \in D)$.

(iii) 任意の i について，$(M, S_i) \models \neg\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$.

そこで，$S' = \bigcup_{i\in\omega} S_i$とする．このとき，$(M, S') \models \mathrm{RCA}_0 + \Pi^0_\infty$-BCT となる．また，ある $A \in S'$で $(M, S') \models \forall x(x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$ とする．すると，ある i について $A \in S_i$だから $(M, S_i) \models \forall x(x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$ となる．これは (iii) に反する．よって，$(M, S') \models \neg\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$ □

[定理 1 の証明] $\neg\mathrm{RCA}_0 \vdash \exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$ とする．ここで，$\varphi(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ とかいたとき，全ての set variable は $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ で出尽くされているとする．すると，完全性定理により RCA_0 の可算モデル (M, S) で，ある $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\} \subset S$で

$$(M, S) \models \neg\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x, B_1, B_2, \ldots, B_m))$$

となるものが存在する．このとき，S'を $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ で生成される second part とすると，

$$(M, S') \models \mathrm{RCA}_0 + \neg\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x, B_1, B_2, \ldots, B_m)).$$

したがって，補題1.3 により次の性質を満たす (M, S'') がとれる．

$$(M, S'') \models \mathrm{RCA}_0 + \Pi^0_\infty\text{-BCT}+\neg\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x, B_1, B_2, \ldots, B_m)).$$

したがって，定理は証明された．□

2 Σ_1^b-NIA 上とΠ_∞^0-BCT

P=NP 問題と関係のある形式的体系として，Ferreira は $\{0,1\}$ の有限列を対象にした体系を考えた．特に，以下で主要な体系となるΣ_1^b-NIA は Bounded arithmetic の Buss の体系 S_2^1に対応している．例えば，$\Sigma_1^b - NIA \vdash \forall x \exists y \varphi(x,y)$ となるΣ_1^b-formula$\varphi(x,y)$ に対しては，任意の$\sigma \in 2^{<\omega}$で$\varphi(\sigma, f(\sigma))$ となる多項式時間計算可能な関数 fがある [3]．ここではまず，Ferreira による二階言語について述べる．Ferreira による二階言語は 3 つの constant symbols ε,0,1 と 2 つの binary function symbols $\frown$, $\times$と binary relation$\subseteq$からなる．自然な解釈として$\frown$は concatenation を，$\subseteq$は initial subwordeness をそれぞれ意味する symbol であり，$x \times y$は x を yの長さの分だけ繰り返しつなげたものと考える．

この言語上でまず以下の 14 個の公理を Basic axioms として定義する．ただし，$x \frown y$ は略して xyとかく．

$$
\begin{array}{ll}
x\varepsilon = x, & x \times \varepsilon = \varepsilon, \\
x(y0) = (xy)0, & x \times y0 = (x \times y)x, \\
x(y1) = (xy)1, & x \times y1 = (x \times y)x, \\
x0 = y0 \to x = y, & x1 = y1 \to x = y, \\
x \subseteq \varepsilon \leftrightarrow x = \varepsilon, & x0 \neq y1, \\
x0 \neq \varepsilon, & x1 \neq \varepsilon, \\
x \subseteq y0 \leftrightarrow x \subseteq y \lor x = y0, & x \subseteq y1 \leftrightarrow x \subseteq y \lor x = y1.
\end{array}
$$

$\exists z \subseteq y(zx \subseteq y)$ を $x \subseteq^* y$とかき，x は yの **subword** という．また，atomic formula から命題論理記号と $\forall x \subseteq^* t(\cdots)$, $\exists x \subseteq^* t(\cdots)$ という形の 量化記号のみを用いて作られる formula を **sw.q.-formula** と呼ぶ．更に，$1 \times x \subseteq 1 \times y$ を $x \leq y$とかき，sw.q.-formula から 命題論理記号と $\forall x \leq t(\cdots)$, $\exists x \leq t(\cdots)$ という形の 量化記号のみを用いて作られる formula をΣ_∞^b**-formula** と呼ぶ．ただし，t は x を含まない term である．特に sw.q.-

formulaφ で $\exists x \leq t\varphi$ とかける formula をΣ_1^b-formula と呼ぶ．また二階算術のときと同様にしてΠ_1^0-formula なども定義できる．

次に，Σ_1^b-NIA の定義を与える．

定義 Σ_1^b-NIA は以下の公理からなる．

(i)Basic axioms.

(ii)Σ_1^b-notation induction scheme：任意のΣ_1^b-formula $\varphi(x)$ に対し，

$$\varphi(\varepsilon) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x0) \wedge \varphi(x1)) \rightarrow \forall x\varphi(x).$$

Σ_1^b-NIA では $0 \neq 1, (xy)z = x(yz), xy \subseteq xw \rightarrow y \subseteq w, (x \subseteq y \wedge x \neq y) \rightarrow (x0 \subseteq y \vee x1 \subseteq y)$ などといった基本的な性質が証明できる．更に，term によって定義される任意の関数は長さに関して単調増加であることも証明できる．以下の証明ではこれらを暗黙のうちに使うこととする．またここで，**∇_1^b-CA** と呼ばれる内包公理を次のように定義する．

$$\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \neg\psi(x)) \rightarrow \exists X\forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$$

ただし，$\varphi(x), \psi(x)$ はΣ_1^b-formula とする．

特に次の結果によって，Σ_1^b-NIA+∇_1^b-CA はΠ_1^1-sentence に関してΣ_1^b-NIA の conservative extension である．

補題 2.1(Ferreira,1994[4]) (M, S) はΣ_1^b-NIA のモデルとする．このとき，$S'(\supset S)$ で $(M, S') \models \Sigma_1^b$-NIA+$\nabla_1^b$-CA となるものが存在する．

以下，Σ_1^b-NIA+∇_1^b-CA を基本的な二階の公理系として考える．また,「Σ_∞^b-formula $\varphi(x)$ について，$\{x : \varphi(x)\}$ が無限 $\{0,1\}$-木を定義するとき $\{x : \varphi(x)\}$ が path を持つ」という主張をΣ_∞^b-WKL と呼ぶ．正確な定義は [4] による．ここで，$\{x : \varphi(x)\}$ は集合として存在しなくてもよい．Σ_∞^b-WKL については次の結果が知られている．

定理 2.2(Ferreira,1994) Σ_1^b-NIA+∇_1^b-CA+Σ_∞^b-WKL はΠ_2^0-sentence に関してΣ_1^b-NIA の conservative extension である．

また，この定理の証明と同様にして $I\Sigma^0_0+\Sigma^0_0$-CA と WKL にも同じ結果を得る．ただし，WKL の形式化が少し異なることを注意しておく．

次に，二階算術でのΠ^0_∞-BCT に対応するようにΠ^0_∞-BCT を定義する．

定義 Π^0_∞-BCT とは次の scheme のことである：任意のΠ^0_∞-formula $\varphi(x,y)$ に対して

$$(\forall x \forall y \exists z(y \subseteq z \wedge \varphi(x,z)) \rightarrow \exists X(\forall x \exists y \in X\varphi(x,y) \wedge Path(X))$$

ただし，$Path(X)$ とは次のΠ^0_1-formula である．

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \subseteq x \rightarrow y \in X) \wedge \forall u \exists x \equiv u(x \in X) \wedge \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \rightarrow x \subseteq y \vee y \subseteq x)$$

ここで，$x \equiv y$は $x \leq y \wedge y \leq x$ の略記．

このとき，次の結果が得られる．

定理 2.3 Σ^b_1-NIA+∇^b_1-CA+Π^0_∞-BCT はΣ^b_1-NIA のΠ^1_1-sentence に関して conservative extension である．

ここで，この定理を証明するのにいくつかの定義を与えておく．Σ^b_1-NIA の可算モデル (M,S) について，$D \subset M$が **dense** であるとは，任意の$\sigma \in M$にある$\tau \in D$が存在して $(M,S) \models \sigma \subseteq \tau$ が成り立つことをいう．また，Dが (M,S)**-definable** とは，Dが (M,S) においてあるΠ^0_∞-formula で定義できることとする．

このとき，(M,S) の全ての difinable dense set を並べたものを $D_0, D_1, \ldots$ とする．すると，$\sigma_i \in D_i$で$\sigma_i \subseteq \sigma_{i+1}$となる $\{\sigma_i\}_{i\in\omega} \subset M$がとれる．よって，$G \subset M$を $G = \{\sigma \in M : \exists i \in \omega(M,S) \models \sigma \subseteq \sigma_i\}$ とすると，$(M,S) \models \Sigma^b_1$-NIA により $(M, S \cup \{G\}) \models Path(G)$ となる．また，任意の (M,S)-definable dense set Dについて $(M, S \cup \{G\}) \models \exists x(x \in G \wedge x \in D)$ となる．この G を (M,S)**-generic** と呼ぶ．

これ以降，Σ^b_1-NIA のモデルは全て可算モデルとして考える．すると，次の補題が証明できる．

補題 2.4 $(M,S) \models \Sigma^b_1$-NIA+∇^b_1-CA，G は (M,S)-generic とする．更に，$\varphi(\vec{x})$ を$\vec{x}$で free variable が全て出尽くされているΣ^b_∞-formula とする (ただし，$M \cup S$の元をパラ

メータに含んでよい)．また，$\vec{a} \subset M$とする．このとき，ある (M, S) のΣ^b_∞-formula ψで次の性質を満たすものが存在する．

(i)φ とψは同じ free variable をもつ．

(ii)$(M, S \cup \{G\}) \models \forall \vec{x} \leq \vec{a}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x}))$.

特に，φ がΣ^b_1-formula ならばψもΣ^b_1-formula にとることができる．

[証明]　φ の論理記号の数による帰納法によって証明する．

Step1:φ が atomic formula のとき．φ が以下のような場合，ψはφ とする．

(a)$t_1 = t_2$もしくは$t_1 \subseteq t_2$とかけるとき

(b)$A \in S$で$t \in A$ とかけるとき

φ が$t(\vec{x}) \in G$ とかけるときはψを次のようにして決める．G は (M, S)-generic であるから，$b \in G$ で $(M, S) \models t(\vec{a}) \equiv b$ となるものがとれて $(M, S \cup \{G\}) \models \forall \vec{x} \leq \vec{a}(t(\vec{x}) \in G \leftrightarrow t(\vec{x}) \subseteq b)$ となる．そこでψをこの $t(\vec{x}) \subseteq b$ ととればψは補題の主張を満たす．

Step 2:φ の一番外側の記号が命題論理記号のとき．もしφ が$\neg\varphi'$ならば，帰納法の仮定よりφ'に対して補題の主張を成り立たせるψ'がある．このとき，ψを$\neg\psi'$とすればいい．もしφ が$\varphi_1 \wedge \varphi_2$ならば，帰納法の仮定より$\varphi_1$,$\varphi_2$に対してそれぞれ補題の主張を成り立たせる$\psi_1$,$\psi_2$がある．このとき，$\psi$を$\psi_1 \wedge \psi_2$とすればいい．

Step 3:φ の一番外側の記号が bounded quantifier のとき．もしφ が$\exists y \subseteq^* t(\vec{x})\varphi'(y, \vec{x})$ ならば，帰納法の仮定より $(M, S) \models t(\vec{a}) \equiv b$ となる $b \in M$について ある (M, S) のΣ^b_∞-formula ψ'で，$(M, S \cup \{\mathrm{G}\}) \models \forall y \leq b \forall \vec{x} \leq \vec{a}(\varphi'(y, \vec{x}) \leftrightarrow \psi'(y, \vec{x}))$ となるものが存在する．このとき，ψを $\exists y \subseteq^* t(\vec{x})\psi'(y, \vec{x})$ ととるとψは補題の主張を満たす．更にφ が $\exists y \leq t(\vec{x})\varphi'(y, \vec{x})$ となっているときも上と同様にして補題の主張を満たすψをとることができる．

また，ψの作りかたからφ がΣ^b_1-formula ならばψもΣ^b_1-formula ととることができる．□

補題 2.5　　$(M, S) \models \Sigma^b_1$-NIA+$\nabla^b_1$-CA とする．このとき，$S'(\supset S)$ で次のことが成り立つものが存在する．

(i)$(M, S') \models \Sigma^b_1$-NIA

(ii) ある $X \in S'$が存在して任意の (M, S)-definable dense set Dについて $(M, S') \models \exists X((X \cap \mathrm{D} \neq \emptyset) \wedge Path(X))$.

[証明]　(M,S)-generic G をとって $S'=S\cup\{G\}$ とする．すると，任意の (M,S)-definable dense set Dについて $(M,S')\models(G\cap D\neq\emptyset)\wedge Path(G)$．次に $(M,S')\models\Sigma_1^b$-NIA を示す．ここで，Σ_1^b-formula ψが，$(M,S')\models\psi(\varepsilon)\wedge\forall x(\psi(x)\rightarrow\psi(x0)\wedge\psi(x1))$ であるとする．このとき，$(M,S')\models\forall x\psi(x)$ を示せばよい．任意の Mの元 a に対して補題 2.4 より，(M,S) のΣ_1^b-formulaψ_aで $(M,S')\models\forall x\leq a(\varphi(x)\leftrightarrow\psi_a(x))$ となるものがとれる．このとき，ψ'_aを $x\leq a\rightarrow\psi_a(x)$ とすると，$(M,S)\models\psi'_a(\varepsilon)\wedge\forall x(\psi'_a(x)\rightarrow\psi'_a(x0)\wedge\psi'_a(x1))$ となる．$(M,S)\models\Sigma_1^b$-NIA より $(M,S)\models\forall x\psi'_a(x)$，したがって $(M,S')\models\psi(a)$ である．

Mの元 a は任意にとれるから以上のことから $(M,S')\models\forall x\psi(x)$ となる．□

定理 2.6　$(M,S)\models\Sigma_1^b$-NIA とする．
このとき，$S'(\supset S)$ で $(M,S')\models\Sigma_1^b$-NIA+∇_1^b-CA+Π_∞^0-BCT となるものが存在する．

[証明]　$(M,S)\models\Sigma_1^b$-NIA とする．

このとき，補題 2.1 と補題 2.5 を繰り返し用いて，次のことが成り立つ増加列 $(S_i)_{i\in\omega}$をつくることができる．

(i) $S_0=S$

(ii) 任意の $i\in\omega$について，$(M,S_i)\models\Sigma_1^b$-NIA+∇_1^b-CA

(iii) 任意の $i\in\omega$について，ある $X\in S_{i+1}$が存在して任意の (M,S_i)-definable dense set Dについて $(M,S_{i+1})\models\exists X((X\cap\mathrm{D}\neq\emptyset)\wedge Path(X))$ となるものがある．

したがって，$S'=\bigcup_{i\in\omega}S_i$とすれば $(M,S')\models\Sigma_1^b$-NIA+∇_1^b-CA+Π_∞^0-BCT となる．□

[定理 **2.3** の証明]　定理 2.6 より，Σ_1^b-NIA の任意の可算モデル (M,S) について，$S'(\supset S)$ で $(M,S')\models\Sigma_1^b$-NIA+∇_1^b-CA+Π_∞^0-BCT となるものが存在する．よって，完全性定理から定理 2.3 が証明される．□

また，以上の他にΣ_1^b-NIA+∇_1^b-CA より強い体系 BTFA(base theory for feasible analysis) において次の結果がある．

定理 2.7(Ferreira1994[4])

(i)BTFA はΠ_2^0-sentence に関してΣ_1^b-NIA の conservative extension である．

(ii)BTFA+Σ^b_∞-WKL はΠ^1_1-sentence に関して BTFA の conservative extension である.

これに対して，Π^0_∞-BCT についても以下のことがいえる.

定理 2.8 BTFA+Σ^b_∞-WKL+Π^0_∞-BCT はΠ^1_1-sentence に関して BTFA の conservative extension である.

特に，BTFA，BTFA+Σ^b_∞-WKL は「provably recursive function は feasible なものであるにもかかわらず多くの普通の数学の定理が証明できる体系をみつける」という問題 [Sieg1985] に対して考えられたものであり，その意味で定理 2.8 はより良い結果になっている.

参考文献

[1] D.K.Brown and S.G.Simpson, The Baire category theorem in weak subsystems of second-order arithmetic, JSL 58, Number 2, 1993, 557-578.

[2] M.E.Mytilinaios and T.A.Slaman, On a question of Brown and Simpson, Computability Enumerability Unsolvability, Directions in recursion theory, London Mathematical Society Lecture Note Series 224, Cambridge University Press, 205-218.

[3] F.Ferreira, Polynomialtime computable arithmetic, Contemporary Mathematics Vol 106, AMS, Providence, Rhode Island, 1990, 137-156.

[4] F.Ferreira, A feasible theory for analysis, JSL 59, Number 3, 1994, 1001-1011.

[5] C.G.Jockusch,Jr. and R.I.Soare, Π^0_1 classes and degrees of theories, Trans. Amer. Math. Soc. 173, 1972, 35-56.

[6] K.Tanaka, More on models of WKL_0, preprint.