数理解析研究所講究録
1026 巻 1998 年 63-75

p 進 Hodge 理論について

辻 雄 (京大数理研) (Takeshi Tsuji)

発表では前半の 2/3 で p 進 Hodge 理論の紹介をしたが, [T4] においてすでに一度簡単な紹介を書いたので, ここでは後半の 1/3 でふれた特異点も許した p 進体上の完備多様体の p 進étale cohomology が常に potentially semi-stable 表現になるという定理の証明の概略を報告する. なお p 進 Hodge 理論を概観したい人は[I] を読むとい良い. また crystalline, semi-stable, de Rham 表現について (B_{crys}, B_{st}, B_{DR} の定義とその性質も含む) 詳しく知りたい人は[Fo1], [Fo2], [Fo3] を読む以外ないであろう. その他 p 進 Hodge 理論に関連する参考文献については[I] に詳しい.

複素数体上の特異点を許した多様体の Hodge 理論は, 広中の特異点解消を使って特異点のない多様体達による proper hypercovering をとることにより, 特異点のない場合に帰着された ([De]). p 進体上の場合特異点解消はないが, それより弱い de Jong の alteration [DJ] を使って (有限次拡大による base change を許し, hypercovering を有限の長さで切れば) semi-stable reduction を持つ多様体達で (より厳密にはそれらの base change も許す) で proper hypercovering をとることができ, 上の定理は最終的に hypercovering の各成分の p 進 Hodge 理論 (C_{st}) に帰着される. 定理の証明には, C_{st} の証明 ([H-Ka],[Ka3],[T3]) を逐一 simplicial な場合に拡張していく必要があるが, その際étale hypercovering を使う議論は排除する必要がある. 特に syntomic cohomology の定義及び syntomic cohomology からétale cohomology への射の構成は, [T3]§3 の手法から[Fo-M] の log 版を作る方法にかえた (§2, §3 参照). (なお syntomic site およびその crystalline cohomology との関係はすでに C.Breuil により研究されていることを注意しておく[Br].) 最後に, 最近 G.Faltings が, 彼の almost étale 拡大の手法を semi-stable reduction の場合に拡張することにより, C_{st} の別証明およびその一般化を与えたことを報告しておく ([Fa]).

K を剰余体が正標数 $p>0$ の完全体である完備離散付値体とし, その整数環を O_K, 剰余体を k と書く. k を係数とする Witt 環を W と書き, その分数体を K_0 であらわす. k, W, K_0 の Frobenius をすべて同じ記号 σ であらわす. $S=\mathrm{Spec}\,(O_K)$, $\eta=\mathrm{Spec}\,(K)$, $s=\mathrm{Spec}\,(k)$ とおき, 閉点 s に伴う S 上の log 構造を N, N の s への逆像を L であらわす. η には N の逆像すなわち自明な log 構造を与える. 以後我々は, (S,N) 上の smooth fine saturated log scheme (X,M) で, X が S 上 proper, X の special fiber が被約なものを考える. $(X_\eta,M_\eta):=(X,M)\times_{(S,N)}\eta$, $(X_s,M_s):=(X,M)\times_{(S,N)}(s,L)$ とおく. (最後の条件は (X,M) が (S,N) 上 universally saturated といっても, (X_s,M_s) が (s,L) 上 of Cartier type といっても同じである.) 例えば, S 上の proper flat regular scheme X でその special fiber が X 上の被約正規交叉因子であるものに, special fiber に伴う log 構造 $M=\mathcal{O}_X\cap j_*\mathcal{O}_{X_\eta}^*$ $(j:X_\eta\hookrightarrow X)$ を与えたものは, 上の性質を満たす. この報告では W 上の環, scheme, log scheme などの mod p^n reduction はすべて下つき添字の n であらわすことにする.

§1 Crystalline cohomology と de Rham cohomology

まず兵藤, 加藤が定義した (X,M) の crystalline cohomology (兵藤 - 加藤 cohomology と呼ぶ人もいる) ([H], [H-Ka]) を簡単に復習する.

射 $\Gamma(s,L)\to k\xrightarrow{[\,]}W_n$ ([ ] は Teichimüller representative) に伴う $\mathrm{Spec}\,(W_n)$ 上の log 構造を $W_n(L)$ であらわす. 特に $W_1(L)=L$ である. (X,M) の crystalline cohomology は

$$\mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n H^q_{\mathrm{crys}}((X_s, M_s)/(W_n, W_n(L))) \tag{1.1}$$

で定義され, K_0 上の有限次元ベクトル空間になる. 以後これを簡単に D^q と書く. (X_s, M_s) の絶対 Frobenius より, D^q 上の σ- 半線形な自己同型 φ (Frobeinus という) を得る. また D^q は, $(W_n, W_n(L))$ 2 個の W_n 上の fiber 積への対角射に関して HPD-stratification に似た構造を持ち, これより $N\varphi = p\varphi N$ をみたす D^q の K- 線型な自己準同型 (monodromy という) を得る. φ が自己同型であることから, N が巾零であることが従う.

"M_s の L 上水平な因子" から定まる $\mathcal{O}_{(X_s,M_s)/(W_n,W_n(L))}$ の ideal $K_{(X_s,M_s)/(W_n,W_n(L))}$ を係数に持つ crystalline cohomology を用いて, crystalline cohomology with proper support D^q_c も定義できる. M_η が自明なときは $D^q = D^q_c$ である. X の S 上の相対次元が定数 d であるときは, trace 射 Tr: $D^{2d}_c \to K_0$ があって, pairing

$$D^q \otimes_{K_0} D^{2d-q}_c \xrightarrow{\cup} D^{2d}_c \xrightarrow{\mathrm{Tr}} K_0 \tag{1.2}$$

が完全になる (Poincaré 双対定理) ([H],[T1]).

注 1.3 X が S 上 smooth で M_η が自明なときは, D^q は log 構造を考えない $\mathbb{Q}\otimes H^q_{\mathrm{crys}}(X_s/W)$ と一致する. しかし X が S 上 smooth でないときは, 一般に log 構造を考えない crystalline cohomology は有限次元にすらならない. semi-stable reduction を持つ場合でも上の D^q のような良い cohomology が存在することは, C_{st} の一部として Fontaine-Jannsen により予想されていた.

(X_η, M_η) の de Rham cohomology を $H^q(X_\eta, \Omega^{\cdot}_{X_\eta}(\log M_\eta))$ で定義し, 以後簡単に D^q_{DR} と書く. [De-I] と同様の議論により, Hodge spectral sequence

$$E_1^{a,b} = H^b(X_\eta, \Omega^a_{X_\eta}(\log M_\eta)) \Longrightarrow D^{a+b}_{\mathrm{DR}} \tag{1.4}$$

が退化する ([T3]4.7.9). この spectral sequence より D^q_{DR} の減少 filtration $Fil^r D^q_{\mathrm{DR}}$ ($r \in \mathbb{Z}$) (Hodge filtration という) が定まる. de Rham cohomology は crystalline cohomology を用いて次のように書くこともできる.

$$\begin{array}{ccl} D^q_{\mathrm{DR}} & \cong & \mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n H^q_{\mathrm{crys}}((X_n, M_n)/(S_n, N_n), \mathcal{O}_{(X_n,M_n)/(S_n,N_n)}) \\ \cup & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cup \\ Fil^r D^q_{\mathrm{DR}} & \cong & \mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n H^q_{\mathrm{crys}}((X_n, M_n)/(S_n, N_n), J^{[r]}_{(X_n,M_n)/(S_n,N_n)}). \end{array} \tag{1.5}$$

M_η が自明でない点の集合に台をもつ被約閉部分 scheme に対応する $\mathcal{O}_{X_\eta}$ の ideal K_{X_η} を用いて, de Rham cohomology with proper support $H^m(X_\eta, K_{X_\eta}\Omega^{\cdot}_{X_\eta}(\log M_\eta))$ も定義でき, これを $D^q_{\mathrm{DR,c}}$ と書く. X_η の次元が定数 d であるとき, Trace 射 Tr: $D^{2d}_{\mathrm{DR,c}} \to K$ があって, 次の pairing は完全になる (Poincaré 双対定理) ([T1]).

$$D^q_{\mathrm{DR}} \otimes_K D^{2d-m}_{\mathrm{DR,c}} \xrightarrow{\cup} D^{2d}_{\mathrm{DR,c}} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} K. \tag{1.6}$$

定理 1.7 ([H-Ka](5.1)) K の素元 π を決めるごとに, (X, M) について *functorial* で *cup* 積と可換な自然な同型

$$\rho_\pi : K \otimes_{K_0} D^q \xrightarrow{\sim} D^q_{\mathrm{DR}}$$

がある. さらに $u \in O_K^*$ に対して $\rho_{\pi u} = \rho_\pi \circ \exp(\log(u)N)$ をみたす.

注 1.8 cohomology with proper support についても同様の定理が成り立つと思われるが, 今の所未確認である.

射の構成法 ρ_π を簡単に復習しよう. まず D^q と D^q_{DR} を結びつける cohomology $\mathcal{D}^q$ を導入する. 因子 "$T = 0$" に伴う Spec $(W_n[T])$ 上の log 構造を $\mathcal{L}(T)$ と書き, $T \mapsto \pi$ で定義される exact closed immersion $(S_n, N_n) \hookrightarrow (\mathrm{Spec}\,(W_n[T]), \mathcal{L}(T))$ の PD-envelope を $i_{E_n,\pi} : (S_n, N_n) \hookrightarrow (E_n, M_{E_n})$ とする. E_n の座標環を R_{E_n} とかき, $R_E = \varprojlim_n R_{E_n}$, $R_{E_{\mathbb{Q}_p}} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} R_E$ とおく. R_{E_n} は具体的に $R_{E_n} = W[T, T^{ne}/n!\ (n \geq 1)]) \otimes_W W_n$ とかける. ただし $e = [K : K_0]$ とする. $T \mapsto 0$ により exact closed immersion $i_{E_n,0} : (\mathrm{Spec}\,(W_n), W_n(L)) \hookrightarrow (E_n, M_{E_n})$ が定義できる. さて, cohomology $\mathcal{D}^q$ は

$$\mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n H^q_{\mathrm{crys}}((X_n, M_n)/(E_n, M_{E_n})) \cong \mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n H^q_{\mathrm{crys}}((X_1, M_1)/(E_n, M_{E_n}))$$

で定義する. (X_1, M_1) の絶対 Frobenius より $\mathcal{D}^m$ の自己準同型 φ を得る. また $\mathcal{D}^q$ は (S_n, N_n) から $(\mathrm{Spec}\,(W_n[T]), \mathcal{L}(T))$ 2 個の W_n 上の fiber 積への埋め込みに関して HPD-stratification の構造をもち, これより $N\varphi = p\varphi N$ をみたす自己準同型を得る. さて, 射 $i_{E_n,0}$, $i_{E_n,\pi}$ に関する底変換により, 2 つの準同型

$$D^q \xleftarrow{\mathrm{pr}_0} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\mathrm{pr}_\pi} D^q_{\mathrm{DR}} \tag{1.9}$$

を得る. pr_0 は Frobenius, monodromy と可換である.

補題 1.10 ([H-Ka](5.2), [T3]§4.4) *Frobenius* と可換な pr_0 の K_0- 線型な *section* s がただ一つ存在し, さらに s は *monodromy operator* とも可換で, 次の同型を誘導する.

$$R_{E_{\mathbb{Q}_p}} \otimes_{K_0} D^q \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^q \tag{1.11}$$

定理の同型 ρ_π は K_0- 線型写像 $\mathrm{pr}_\pi \circ s$ の K- 線型化である.

§2 Syntomic cohomology.

syntomic cohomology は, crystalline cohomology, de Rham cohomology と étale cohomology を仲介する cohomology として, Fontaine-Messing により導入されたものである ([Fo-M]). 彼らは log 構造がない普通の S 上 proper smooth な scheme に対して syntomic cohomology を定義しているが, ここでは log 構造付きの場合を考える.

$f : (T, M_T) \to (S, M_S)$ を fine log schemes の射とする. f の underlying schemes の射が flat で, f が log scheme の意味で locally complete intersection である (すなわち, X 上étale 局所的に (S, M_S) 上 smooth integral な fine log scheme (Y, M_Y) への exact closed immersion で, underlying schemes において regular immersion になっているようなものが存在する) とき, 射 f は syntomic であるという ([Ka3](2.5)). また, f がさらに次の 2 条件を満たしている時, ここでは, f は狭義 syntomic であるということにする.

(2.1) f の underlying schemes の射が locally quasi-finite である．

(2.2) 準同型 $(f^*M_S)^{\mathrm{gp}} \to M_T^{\mathrm{gp}}$ の cokernel が torsion である．

syntomic および狭義 syntomic な射はそれぞれ，合成および底変換に関して閉じている．狭義 syntomic な射による被覆を用いて，fine log scheme (S, M_S) の big syntomic site $(S, M_S)_{\mathrm{SYN}}$ および small syntomic site $(S, M_S)_{\mathrm{syn}}$ を定義する．fine log schemes の射 $f: (S', M_{S'}) \to (S, M_S)$ による底変換を用いて，順像関手 $f_{\mathrm{SYN}*}: (S', M_{S'})^{\sim}_{\mathrm{SYN}} \to (S, M_S)^{\sim}_{\mathrm{SYN}}$，$f_{\mathrm{syn}*}: (S', M_{S'})^{\sim}_{\mathrm{syn}} \to (S, M_S)^{\sim}_{\mathrm{syn}}$，およびその left adjoints f^*_{SYN}，f^*_{syn} を得る． f^*_{SYN} は左完全で従って組 $f_{\mathrm{SYN}} = (f_{\mathrm{SYN}*}, f^*_{\mathrm{SYN}})$ は topos の射を与えるが，f^*_{syn} の方は左完全かどうか分からない．これは，small syntomic site では fiber 積が一般には存在しないことに起因する．しかしながら，狭義 syntomic 被覆を用いて $(S, M_S)_{\mathrm{syn}}$ を M. Artin の意味での topology （[A]I(0.1)）とみなせば，f による底変換 $(S, M_S)_{\mathrm{syn}} \to (S', M_{S'})_{\mathrm{syn}}$ は topology の射となり（[A]II(4.5)），例えば Leray spectral sequence が存在する（[A](4.10)(4.11)）．

命題 2.3 $(S, M_S)_{\mathrm{SYN}}$ 上の層 $\mathcal{F}$ に対して，その $(S, M_S)_{\mathrm{syn}}$ への制限も同じ記号で書くと，次の *canonical* な同型がある．

$$H^q((S, M_S)_{\mathrm{SYN}}, \mathcal{F}) \cong H^q((S, M_S)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{F})$$

これは，埋め込み関手 $\iota: (S, M_S)_{\mathrm{syn}} \to (S, M_S)_{\mathrm{SYN}}$ が M. Artin の意味で topology の射であり，ι_* が exact であることから分かる．

命題 2.4 (cf. [Fo-M]III1.2) $i: (S', M_{S'}) \to (S, M_S)$ を *underlying schemes* の射が *nilimmersion* である *exact closed immersion* とするとき，$i_{\mathrm{syn}*}$ は完全である．

これは次の補題より従う．

補題 2.5 i を上の命題と同様とする． このとき任意の *syntomic* （*resp.* 狭義 *syntomic*）な $(S', M_{S'})$*-fine log scheme* $(T', M_{T'})$ は，T' 上*étale* 局所的に *syntomic* （*resp.* 狭義 *syntomic*）な (S, M_S)*-fine log scheme* (T, M_T) への持ち上げを持つ．

さて，W_n 上の fine log scheme (Y, M_Y) で Y が W_n 上 locally of finite type であるものを考えよう．良く知られているように，crystalline topos からétale topos への射影

$$u_{(Y,M_Y)/W_n}: ((Y, M_Y)/W_n)^{\sim}_{\mathrm{crys}} \longrightarrow Y^{\sim}_{\mathrm{\acute{e}t}} \tag{2.6}$$

による構造層およびその PD-ideal の r-th divided power の derived direct image は，Y 上étale 局所的に次のようにかける（[Be]V Th.2.3.2., [Ka2](6.4)）．Y 上étale 局所的に W_n 上 smooth な fine log scheme (Z, M_Z) への closed immersion $i: (Y, M_Y) \hookrightarrow (Z, M_Z)$ をとり，その PD-envelope を (D, M_D)，$\mathcal{O}_D$ の PD-ideal を J_D と書くと，canonical な同型

$$Ru_{(Y,M_Y)/W_n*} J^{[r]}_{(Y,M_Y)/W_n} \cong J_D^{[r-\cdot]} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \Omega^{\cdot}_Z(\log M_Z) \quad (r \in \mathbb{Z}) \tag{2.7}$$

がある．ここで，r が負の時は $J^{[r]}_{(Y,M_Y)/W_n}$，$J^{[r]}_D$ はそれぞれ，$\mathcal{O}_{(Y,M_Y)/W_n}$，$\mathcal{O}_D$ を表わすとする．（特に (Y, M_Y) が W_n 上 smooth な時は，(Z, M_Z) として自分自身をとれ，右辺は $\sigma_{\geq r}\Omega^{\cdot}_Y(\log M_Y)$ になる．ここで $\sigma_{\geq r}$ は次数 r 以上の項を残して残りの項は 0 とおいて得られる複体を表わす．）この表示を用いると，次のようにして $R^q u_{(Y,M_Y)/W_n*} J^{[r]}$

$(r \geq 0, q \geq 1)$ は狭義 syntomic 局所的には消えることが分かる．まず (Z, M_Z) として，Spec $(W_n[\mathbb{N}^d])$ に $\mathbb{N}^d \hookrightarrow W_n[\mathbb{N}^d]$ で log 構造をいれたものがとれる．i 番目が 1 で他は 0 の $\mathbb{N}^d$ の元を e_i とし，その $\Gamma(Z, M_Z)$ での像も同じ記号で書くと，$\Omega^1_Z(\log(M_Z))$ は $d\log(e_i)$ $(1 \leq i \leq d)$ を基底とする $\mathcal{O}_Z$ 上の自由加群である．$\mathbb{N}^d$ の p^n 倍写像から得られる射 $v\colon (Z, M_Z) \to (Z, M_Z)$ は狭義 syntomic 被覆であり，v に関する引き戻し

$$v^*\Omega^q_Z(\log M_Z) \longrightarrow \Omega^q_Z(\log M_Z) \quad (q \geq 1)$$

は 0 となる．従って狭義 syntomic 被覆 v の (Y, M_Y) への引き戻しを $w : (Y', M_{Y'}) \to (Y, M_Y)$ とすると，w に関する引き戻し

$$w^* R^q u_{(Y,M_Y)/W_n *} J^{[r]}_{(Y,M_Y)/W_n} \longrightarrow R^q u_{(Y',M_{Y'})/W_n *} J^{[r]}_{(Y,M_Y)/W_n} \quad (r \geq 0)$$

は消える．また，(Y, M_Y) が W_n 上 syntomic であるときは，$J^{[r]}_D$, $J^{[r]}_D/J^{[r+1]}_D$ は W_n 上 flat になる．これらの事実をより洗練された形でのべると次のようになる．

狭義 syntomic 被覆を用いて big crystalline site $((Y, M_Y)/W_n)^{\sim}_{\mathrm{CRYS,SYN}}$ を定義すると（補題 2.5 の性質を用いて），射影

$$(2.8) \qquad U_{(Y,M_Y)/W_n,\mathrm{SYN}} : ((Y, M_Y)/W_n)^{\sim}_{\mathrm{CRYS,SYN}} \longrightarrow (Y, M_Y)^{\sim}_{\mathrm{SYN}};$$

$$\Gamma((Y', M_{Y'}), U_{(Y,M_Y)/W_n,\mathrm{SYN}*}\mathcal{F}) = \Gamma(((Y', M_{Y'})/W_n)_{\mathrm{CRYS,SYN}}, \mathcal{F}),$$
$$\Gamma((Y', M_{Y'}) \hookrightarrow (T, M_T), U^*_{(Y,M_Y)/W_n,\mathrm{SYN}}\mathcal{G}) = \Gamma((Y', M_{Y'}), \mathcal{G})$$

が定義でき，$J^{[r]}_{(Y,M_Y)/W_n}$ $(r \geq 0)$ の高次順像層は消える．また，(Y, M_Y) が W_n 上 syntomic であるときは，$U_{(Y,M_Y)/W_n,\mathrm{SYN}*}J^{[r]}$, $U_{(Y,M_Y)/W_n,\mathrm{SYN}*}J^{[r]}/J^{[r+1]}$ $(r \geq 0)$ の small syntomic site $(Y, M_Y)_{\mathrm{syn}}$ への制限は W_n 上 flat となる．

étale 被覆（log étale ではない）を用いて定義した big crystalline site を $((Y, M_Y)/W)_{\mathrm{CRYS}}$ と書くと，ちょうど flat site と étale site における quasi-coherent sheaf の cohomology の一致の証明と同様にして，自然な topos の射

$$(2.9) \qquad \alpha : ((Y, M_Y)/W_n)^{\sim}_{\mathrm{CRYS,SYN}} \longrightarrow ((Y, M_Y)/W_n)^{\sim}_{\mathrm{CRYS}}$$

に関して，$R\alpha_* J^{[r]}_{(Y,M_Y)/W_n} \cong J^{[r]}_{(Y,M_Y)/W_n}$ となることが分かる．また自然な topos の射

$$(2.10) \qquad p_{(Y,M_Y)/W_n} : ((Y, M_Y)/W_n)^{\sim}_{\mathrm{CRYS}} \longrightarrow ((Y, M_Y)/W_n)^{\sim}_{\mathrm{crys}}$$

の順像関手 $p_{(Y,M_Y)/W_n *}$ は完全である（cf. [Be]III Prop. 4.1.4）．これらより特に射影 $p_{(Y,M_Y)}\colon (Y, M_Y)^{\sim}_{\mathrm{syn}} \longrightarrow Y_{\mathrm{\acute{e}t}}$ に対して

$$(2.11) \qquad Rp_{(Y,M_Y)*}((U_{(Y,M_Y)/W_n,\mathrm{SYN}*}J^{[r]})|(Y, M_Y)_{\mathrm{syn}}) \cong Ru_{(Y,M_Y)/W_n *}J^{[r]}$$

となることが分かる．（右辺 (2.7) の左辺である.）

さて，話しを $(X, M) \to (S, N)$ へ戻そう．(X, M) の mod p^n reduction (X_n, M_n) に上の議論を適用して，$(X_n, M_n)_{\mathrm{SYN}}$ 上の層 $\mathcal{O}^{\mathrm{crys}}_n$, $J^{[r]}_n$ $(r \in \mathbb{Z})$ を

$$(2.12) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}^{\mathrm{crys}}_n & := & U_{(X_n,M_n)/W_n,\mathrm{SYN}*}\mathcal{O}_{(X_n,M_n)/W_n} \\ \cup & & \cup \\ J^{[r]}_n & := & U_{(X_n,M_n)/W_n,\mathrm{SYN}*}J^{[r]}_{(X_n,M_n)/W_n} \end{array}$$

で定義し, これらの small syntomic site $(X_n, M_n)_{\mathrm{syn}}$ への制限も同じ記号で書く.

$$\Gamma((U, M_U), \mathcal{O}_n^{\mathrm{crys}}) = H^0(((U, M_U)/W_n)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}) = H^0(((U_1, M_{U_1})/W_n)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O})$$

だから, $\mathcal{O}_n^{\mathrm{crys}}$ は Frobenius 自己準同型 φ を持つ. $\mathcal{O}_m^{\mathrm{crys}}$, $J_m^{[r]}$ $(m < n)$ の $(X_n, M_n)_{\mathrm{SYN}}$, $(X_n, M_n)_{\mathrm{syn}}$ への順像も同じ記号で書く（命題2.5 に注意）. 定義より, 整数 $m \leq n$ に対し canonical な同型

$$H^q((X_n, M_n)_{\mathrm{syn}}, J_m^{[r]}) \cong H^q(((X_m, M_m)/W_m)_{\mathrm{crys}}, J^{[r]}_{(X_m,M_m)/W_m}) \tag{2.13}$$

がある. 特に $r = 0$ のとき, これは Frobenius と可換である. また (X_n, M_n) は W_n 上 syntomic であるから, $J_n^{[r]}$, $J_n^{[r]}/J_n^{[r+1]}$ $(r \geq 0)$ は small syntomic site では W_n 上 flat であり, 自然な射 $J_{n+1}^{[r]} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to J_n^{[r]}$ は同型となる.

補題 2.14 整数 $0 \leq r \leq p-1$ に対して $\varphi(J_n^{[r]}) \subset p^r \mathcal{O}_n^{\mathrm{crys}}$.

これは, 整数 $i \geq 0$ に対して $p^{[i]} \in p^{\min\{i,p-1\}}\mathbb{Z}_p$ となることから容易に従う.

命題 2.15 (cf. [Fo-M]III1.1 Lemma) 整数 $n > r \geq 0$ に対して, $(p^r - \varphi)(J_n^{[r]}) \supset p^r \mathcal{O}_n^{\mathrm{crys}}$.

これは極めて繁雑な計算を要するまったく自明ではない命題である.

以後 small syntomic site 上で考える. 整数 $m > r \geq 0$ に対して

$$\widetilde{J_m^{<r>}} := \{x \in J_m^{[r]} | \varphi(x) \in p^r \mathcal{O}_m^{\mathrm{crys}}\} \tag{2.16}$$

とおくと, 整数 $n \geq 1$, $r \geq 0$ に対して, $\widetilde{J_{n+s}^{<r>}} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $(s \geq r)$ は s のとり方によらず, また W_n 上 flat である. この層を $J_n^{<r>}$ と書く. $J_{n+1}^{<r>} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = J_n^{<r>}$ である. また, 補題2.14 より, $0 \leq r \leq p-1$ の時は, $J_n^{<r>} = J_n^{[r]}$ となる. 準同型 $\varphi_r : J_n^{<r>} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{crys}}$ を次の可換図式で定義し, $1 - \varphi_r : J_n^{<r>} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{crys}}$ の kernel を S_n^r とおく.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{J_{n+r}^{<r>}} & \xrightarrow{\varphi} & p^r \mathcal{O}_{n+r}^{\mathrm{crys}} \\ \downarrow & & \wr\uparrow \text{“}p^r\text{”} \\ J_n^{<r>} & \xrightarrow{\varphi_r} & \mathcal{O}_n^{\mathrm{crys}}. \end{array} \tag{2.17}$$

命題2.15 より, 次の完全列を得る.

$$0 \longrightarrow S_n^r \longrightarrow J_n^{<r>} \xrightarrow{1-\varphi_r} \mathcal{O}_n^{\mathrm{crys}} \longrightarrow 0 \tag{2.18}$$

また, $J_m^{[r]}$ の積構造 $J_m^{[r]} \otimes J_m^{[s]} \to J_m^{[r+s]}$ より S_n^r の積構造 $S_n^r \otimes S_n^s \to S_n^{r+s}$ が導かれる.

命題2.4 より cohomology $H^q((X_m, M_m)_{\mathrm{syn}}, S_n^r)$ $(m \geq n + r)$ は m のとり方によらないので, 以後これを簡単に $H^q((X, M)_{\mathrm{syn}}, S_n^r)$ と書く. また, この n に関する射影極限をとったものを $H^q((X, M)_{\mathrm{syn}}, S_{\mathbb{Z}_p}^r)$ その $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p}$ をとったものを $H^q((X, M)_{\mathrm{syn}}, S_{\mathbb{Q}_p}^r)$ と書く. これらを (X, M) の syntomic cohomology と呼ぶ. $J_n^{[r]}$, $J_n^{<r>}$ についても同

様に定義する． 定義から $H^q((X,M)_{\mathrm{syn}}, J_{\mathbb{Q}_p}^{<r>})$ は $H^q((X,M)_{\mathrm{syn}}, J_{\mathbb{Q}_p}^{[r]})$ と同型であり，従って自然な準同型

$$H^q((X,M), S^r_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow H^q((X,M)_{\mathrm{syn}}, J_{\mathbb{Q}_p}^{[r]})^{\varphi=p^r} \cong H^q_{\mathrm{crys}}((X,M)/W, J^{[r]})^{\varphi=p^r}_{\mathbb{Q}_p}$$

がある．

最後に，$\overline{K}/K$ の各部分有限次拡大 K' への (X,M) の底変換 (X',M') の syntomic site $(X'_n, M'_n)_{\mathrm{syn}}$ の帰納極限を $(\overline{X}_n, \overline{M}_n)_{\mathrm{syn}}$ と書くと，対応する topos では射影極限になり（SGA4 VI8），各 $(X'_m, M'_m)_{\mathrm{syn}}$ 上の層 S^r_n, $J^{[r]}_n$ より $(\overline{X}_m, \overline{M}_m)_{\mathrm{syn}}$ 上の層 S^r_n, $J^{[r]}_n$ が定まる．従って上と同様に $H^m((\overline{X}, \overline{M})_{\mathrm{syn}}, S^r_n)$ などが定義される．

§3 Syntomic cohomology とétale cohomology

syntomic cohomology とétale cohomology の関係について述べよう． W 上の fine log schemes の射が，狭義 syntomic かつ generic に (log) étale であるとき，synotmic-étale であるという．syntomic-étale 被覆を用いて (X,M) の small syntomic-étale site $(X,M)_{\text{syn-ét}}$ を定義する．

(X,M) の p-adic completion $(\widehat{X}, \widehat{M})$ に対しても，次のように small syntomic-étale site が定義できる．まず，integral な log 構造の理論はそのままうまく locally noetherian formal scheme へ拡張でき，log scheme の formal completion も自然に定義できることを注意しておく． $f\colon (\mathfrak{T}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{T}}) \to (\mathfrak{S}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{S}})$ を underlying formal schemes が Spf(W) 上 locally of finite type な fine log formal schemes の間の射とする． f の各 mod p^n reduction が狭義 syntomic であるとき，f は狭義 syntomic であるという．étale, smooth, syntomic も同様に定義する． また，f が $\mathfrak{T}$ 上étale 局所的に $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{S}})$ 上 smooth な fine log formal affine scheme $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{Y}})$ への exact closed immersion で次の条件をみたすものをもつとき，f は generic にétale であるという．条件：A を $\mathfrak{Y}$ の座標環，I を $\mathfrak{S}$ を定義する ideal とするとき，自然な写像

$$K_0 \otimes_W I/I^2 \to K_0 \otimes_W \Gamma(\mathfrak{Y}, \Omega_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{S}}(\log(\mathfrak{M}_{\mathfrak{Y}}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}))) \tag{3.1}$$

が同型である．generic にétale な射は合成，fine log formal schemes の圏での base change に関して閉じている． あとは前と同様 f が狭義 syntomic かつ generic にétale なとき f は syntomic-étale であると定義し，syntomic-étale 被覆を用いて syntomic-étale site $(\widehat{X}, \widehat{M})_{\text{syn-ét}}$ を定義する． 次の補題より，exact closed immersion $i_n\colon (X_n, M_n) \to (\widehat{X}, \widehat{M})$ に対して，順像関手 $i_{n,\mathrm{syn}*}\colon (X_n, M_n)^{\sim}_{\mathrm{syn}} \to (\widehat{X}, \widehat{M})^{\sim}_{\text{syn-ét}}$ は完全である．したがって，S^r_n の $(\widehat{X}, \widehat{M})_{\text{syn-ét}}$ での順像も同じ記号で書くことにすれば，syntomic cohomology は S^r_n の syntomic-étale cohomology と一致する．

補題 3.2 (cf. [Fo-M]III4.1 Prop.) $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{S}})$ を *Spf*(W) 上 *locally of finite type* な *fine log formal scheme*, (S_n, M_{S_n}) をその *mod* p^n *reduction* とするとき，(S_n, M_{S_n}) 上狭義 *syntomic* な任意の *fine log scheme* (Y_n, M_{Y_n}) は，(Y_n, M_{Y_n}) 上狭義 *syntomic* 局所的に $(\mathfrak{S}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{S}})$ 上の *syntomic-étale* な *fine log formal scheme* に持ち上がる．

注 3.3 狭義 syntomic の定義で条件 (2.2) をはずすと，この定理は成り立たないように思われる．

最後に integral étale 被覆を用いて small integral étale site $(X_\eta, M_\eta)_{\text{int-ét}}$ を定義す

る．すると次のような topos の可換図式がある．

$$
(3.4)\qquad
\begin{array}{ccccc}
(\widehat{X},\widehat{M})^{\sim}_{\text{syn-ét}} & \xrightarrow{i_{\text{syn-ét}}} & (X,M)^{\sim}_{\text{syn-ét}} & \xleftarrow{j_{\text{syn-ét}}} & (X_\eta,M_\eta)^{\sim}_{\text{int-ét}} \\
\downarrow{\scriptstyle \widehat{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p_\eta} \\
X^{\sim}_{s,\text{ét}}=\widehat{X}^{\sim}_{\text{ét}} & \xrightarrow{i_{\text{ét}}} & X^{\sim}_{\text{ét}} & \xleftarrow{j_{\text{ét}}} & X^{\sim}_{\text{ét}}.
\end{array}
$$

$i^*_{\text{syn-ét}}$ が左完全になること以外は自明である．

補題 3.5 (cf. [Fo-M]III4.3 Prop.) $(\widehat{X},\widehat{M})$ 上の任意の *syntomic-étale fine log formal scheme* $(\mathfrak{Y},\mathfrak{M}_{\mathfrak{Y}})$ は，$\mathfrak{Y}$ 上*étale* 局所的にある (X,M) 上の *syntomic-étale fine log scheme* の *p-adic formal completion* と $(\widehat{X},\widehat{M})$ 上同型である．

補題より $i^*_{\text{syn-ét}}\mathcal{F}$ は前層 $(\widehat{Y},\widehat{M_Y})\mapsto \varinjlim \mathcal{F}((Y',M_{Y'}))$ の層化である (cf. [Fo-M]4.4)．ただし，(Y,M_Y) は (X,M) 上の "十分小さな" syntomic-étale fine log affine scheme を走り，$(Y',M_{Y'})$ は可換図式

$$
\begin{array}{ccc}
(Y^h,M_{Y^h}) & \longrightarrow & (Y',M_{Y'}) \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & (Y,M_Y)
\end{array}
$$

で，Y' は affine，g はétale，$g\otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は同型，$g^*M_Y\cong M_{Y'}$ であるものを走る．ここで，Y^h は Y の p-adic henselization，M_{Y^h} は M_Y の逆像である．$(Y',M_{Y'})$ 達は filtered category をなすから，特に $i^*_{\text{syn-ét}}$ が左完全になることがわかる．またこの具体的な表示から次の命題を得る．

命題 3.6 (cf. [Fo-M]III4.4 Prop.) $(X,M)_{\text{syn-ét}}$ 上の加群の層の圏から，$(\widehat{X},\widehat{M})_{\text{syn-ét}}$ 上の加群の層 $\mathcal{G}$，$(X_\eta,M_\eta)_{\text{int-ét}}$ 上の加群の層 $\mathcal{H}$ 及び射 $\alpha\colon\mathcal{G}\to i_{\text{syn-ét}*}j^*_{\text{syn-ét}}\mathcal{H}$ の 3 つ組のなす圏への関手 $\mathcal{F}\mapsto(i^*_{\text{syn-ét}}\mathcal{F},j^*_{\text{syn-ét}}\mathcal{F},i^*_{\text{syn-ét}}(adj))$ は圏同値である．

整数 $r\geq 0$ に対し $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\}:=(\mathbb{Z}_p(r)(p^a a!)^{-1})\otimes\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (ただし a は r を $p-1$ で割った商) とおく．$\mathbb{Z}_p(r)$ の積構造から $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\}$ の積構造 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\}\otimes\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{s\}\to\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r+s\}$ が誘導される．$(\widehat{X},\widehat{M})^{\sim}_{\text{syn-ét}}$ 上の S^r_n と $(X_\eta,M_\eta)^{\sim}_{\text{int-ét}}$ 上の $j_{1*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\}$ をはりあわせて $(X,M)^{\sim}_{\text{syn-ét}}$ 上の層 $\mathcal{S}^r_n$ を次のように構成する．(ただし fine log scheme (S,M_S) の log 構造が自明な点のなす開部分 scheme を一般に S_{triv} と書き，j_1 を topos の射 $(X_{\text{triv}})^{\sim}_{\text{ét}}\to(X_\eta,M_\eta)^{\sim}_{\text{int-ét}}$ とする．) 命題3.6 とその上の注意より "十分小さな" $(Y,N)\in(X,M)_{\text{syn-ét}}$ に対し射

$$
(3.7)\qquad S^r_n((Y_{n+r},M_{Y_{n+r}}))\longrightarrow\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\}(Y^h_{\text{triv}})
$$

を構成すればよい．$Y=\operatorname{Spec}(B)$，$Y^h=\operatorname{Spec}(B^h)$ とおく．$B\supset W[\mu_{p^n}]$ としてよい．[T3]§1.5 のように，正則環 B^h_{triv} の最大不分岐拡大における B^h の normalization $\overline{B^h}$ をとり，$A_{\text{crys}}(\overline{B^h})$，$\theta\colon A_{\text{crys}}(\overline{B^h})\twoheadrightarrow\widetilde{\overline{B^h}}\subset\widehat{\overline{B^h}}$ を定義する．$\overline{Y^h}=\operatorname{Spec}(\widetilde{\overline{B^h}})$ とおき，その上に $\overline{B^h}^*_{\text{triv}}\cap\overline{B^h}\to\widetilde{\overline{B^h}}$ に伴う log 構造 $\overline{N^h}$ を与える．すると，$\mathcal{O}^{\text{crys}}_n((\overline{Y^h}_{n+r},\overline{N^h}_{n+r}))=Fil^rA_{\text{crys}}(\overline{B^h})/p^n$，$\widetilde{J^{<r>}_{n+r}}((\overline{Y^h}_{n+r},\overline{N^h}_{n+r}))=Fil^r_pA_{\text{crys}}(\overline{B^h})/p^n$ で (cf. [T3]A1.5)，次の完全列がある ([T3]A3.26, A3.33)．

$$
(3.8)\qquad 0\longrightarrow\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\}(\overline{B^h}_{\text{triv}})\longrightarrow Fil^r_pA_{\text{crys}}(\overline{B^h})/p^n\xrightarrow{1-\varphi_r}A_{\text{crys}}(\overline{B^h})/p^n\longrightarrow 0.
$$

仮定 $W[\mu_{p^n}]\subset B$ より $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\}(\overline{B^h}_{\text{triv}})=\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\}(B^h_{\text{triv}})$ だから，これより求める射 (3.7) を得る．さらに射 (3.7) は積構造と可換で，従って $\mathcal{S}^r_n$ にも積構造が定義される．

補題 3.9 $\mu_{p^n}\subset K$ で M_η が自明なとき, 自然な射 $i^*_{\text{ét}}Rp_*S^r_n \to R\widehat{p}_*S^r_n$ は同型.

証明は[Fo-M]III 6.2 と同様. 仮定をみたさない場合は, $j_{1*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\}\not\cong\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ なので同様の証明はできないが, 成り立つことが期待される. 補題より補題と同じ仮定のもとで射

$$Rp_{n+r*}S^r_n \cong R\widehat{p}_*S^r_n \longrightarrow i^*_{\text{ét}}Rj_{\text{ét}*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\} \tag{3.10}$$

が定義される. ($p_{n+r}\colon (X_{n+r},M_{n+r})^\sim_{\text{syn}}\to (X_{n+r})^\sim_{\text{ét}}=(X_s)^\sim_{\text{ét}}$ とする.)

$\overline{K}/K$ の有限次部分拡大 K' への底変換 (X',M') に関して極限をとることにより $(\overline{X},\overline{M}):=\varprojlim(X',M')$ に対しても, M_η 自明の仮定のもとで同様の射

$$R\overline{p}_{n+r}S^r_n \longrightarrow \overline{i}_{\text{ét}*}R\overline{j}_{\text{ét}*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\} \tag{3.11}$$

を得る. ($\overline{i}\colon X_{\overline{s}}\to\overline{X}$, $\overline{j}\colon X_{\overline{\eta}}\to\overline{X}$, $\overline{p}_{n+r}\colon(\overline{X}_{n+r},\overline{M}_{n+r})^\sim_{\text{syn}}\to(\overline{X}_n)^\sim_{\text{ét}}=(X_{\overline{s}})^\sim_{\text{ét}}$ とおく.)

定理 3.12 (cf. [Ka1], [Ku], [T3]) 整数 $0\le q\le r$ に対し, p,q,r のみで定まる定数 N が存在し, すべての n に対して (3.11) より導かれる射

$$R^q\overline{p}_{n+r*}S^r_n \longrightarrow \overline{i}^*_{\text{ét}}R^q\overline{j}_{\text{ét}*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\} \tag{3.13}$$

の *kernel, cokernel* が p^N で消える.

X が semi-stable reduction を持つ場合は, symbol (ここでは略したが) との可換性さえ示せば, あとは[T3] とほぼ同じ議論により証明できる.

系 3.14 整数 $0\le q\le r$ に対し, *proper base change theorem* と (3.11) より得られる次の写像は同型である.

$$H^q((\overline{X},\overline{M})_{\text{syn}},S^r_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow H^q_{\text{ét}}(X_\eta,\mathbb{Q}_p(r)) \tag{3.15}$$

§4 Syntomic cohomology と crystalline cohomology

次に, syntomoic cohomology と crystalline cohomology D^q との関係についてのべよう. まず syntomoic cohomology の定義より, 積構造を保ち, X について funcotrial な自然な射

$$H^q((\overline{X},\overline{M})_{\text{syn}},S^r_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow H^q_{\text{crys}}((\overline{X},\overline{M})/W,J^{[r]})^{\varphi=p^r}_{\mathbb{Q}_p} \tag{4.1}$$

がある. ここで $H^m_{\text{crys}}((\overline{X},\overline{M})/W,J^{[r]})$ は厳密には

$$\varprojlim_n(\varinjlim_{K'}H^m_{\text{crys}}((X'_n,M'_n)/W_n,J^{[r]}_{(X'_n,M'_n)/W_n}))$$

で定義する. ただし K' は $\overline{K}/K$ の有限次部分拡大を走り, (S',N') を K' の整数環の Spec に closed point から定まる log 構造を与えたものとして, $(X',M')=(X,M)\times_{(S,N)}(S',N')$ とする. また, 添字の $\mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}$ をとったものを表わす. 以下出てくる $(\overline{X},\overline{M})$ や $(\overline{S},\overline{N})$ のいろいろな crystalline cohomology も同様に定義する.

次の, B^+_{crys}, B^+_{st} および B^+_{DR} の $(\overline{S},\overline{N})$ の crystalline cohomology を用いた解釈, および $(\overline{X},\overline{M})$ の crystalline cohomology に対する Künneth formula が鍵となる. まず次の可換図式があったことを思い出しておく.

$$
\begin{tikzcd}
(S_n,N_n) \arrow[r, hook, "\subset", "i_{E_n,\pi}"'] \arrow[dr] & (E_n,M_{E_n}) \arrow[d] & (\mathrm{Spec}\,(W_n),W_n(L)) \arrow[l, hook', "\supset"', "i_{E_n,0}"] \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}\,(W_n) &
\end{tikzcd}
\tag{4.2}
$$

命題 4.3 (1) ([T3]§1.6) ガロア群の作用を保つ自然な同型

$$
\begin{array}{ccc}
B^+_{\mathrm{crys}} & \cong & H^0_{\mathrm{crys}}((\overline{S},\overline{N})/W)_{\mathbb{Q}_p} \\
\cup & & \cup \\
Fil^r B^+_{\mathrm{crys}} & \cong & H^0_{\mathrm{crys}}((\overline{S},\overline{N})/W,J^{[r]})_{\mathbb{Q}_p}
\end{array}
$$

がある. 上の同型はさらに環同型で *Frobenius* を保つ.

(2) ([T3]§4.6) (1) の同型と *crystalline cohomology* の *functoriality* から導かれる自然な準同型

$$Fil^r B^+_{\mathrm{crys}}/Fil^s B^+_{\mathrm{crys}} \longrightarrow H^0_{\mathrm{crys}}((\overline{S},\overline{N})/(S,N),J^{[r]}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p} \quad (s>r\geq 0)$$

は同型であり, 従って射影極限をとることによって, 次の同型を得る.

$$
\begin{array}{ccc}
B^+_{\mathrm{DR}} & \cong & \varprojlim_s H^0_{\mathrm{crys}}((\overline{S},\overline{N})/(S,N),\mathcal{O}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p} \\
\cup & & \cup \\
Fil^r B^+_{\mathrm{DR}} & \cong & \varprojlim_s H^0_{\mathrm{crys}}((\overline{S},\overline{N})/(S,N),J^{[r]}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p}
\end{array}
$$

(3) ([Ka3]§3) ガロア群の作用, *Frobenius* および *monodromy* を保つ自然な環同型

$$B^+_{\mathrm{st}} \cong H^0_{\mathrm{crys}}((\overline{S},\overline{N})/(E,M_E))^{N\text{-nilp}}$$

がある. ここで *N-nilp* は *monodromy* N が巾零に作用する元のなす部分群を表わす. さらに, (1) の同型と *crystalline cohomology* の *functoriality* を用いて右辺を B^+_{crys}-*algebra* とみなすとき, 上の同型は B_{crys} 同型である. ((E,M_E) は K の素元 π の取り方によっていることに注意)

(4) ([T3]§4.6) (2), (3) の同型および *functoriality* より導かれる準同型 $B^+_{\mathrm{st}} \to B^+_{\mathrm{DR}}$ は素元 π に対応する埋め込みと一致する.

命題 4.4 (1) ([Ka3]§4, [T3]4.5.4) *functoriality* および *cup* 積を用いて得られる準同型

$$
\begin{aligned}
H^0_{\mathrm{crys}}((\overline{S}_n,\overline{M}_n)/(E_n,M_{E_n})) \otimes_{R_{E_n}} H^q_{\mathrm{crys}}((X_n,M_n)/(E_n,M_{E_n})) \\
\longrightarrow H^q_{\mathrm{crys}}((\overline{X}_n,\overline{M}_n)/(E_n,M_{E_n}))
\end{aligned}
$$

は同型である.

(2) ([T3]§4.7) 命題4.3(2)の同型と *crystalline cohomology* の *funcoriality, cup* 積を用いて得られる準同型

$$B^+_{\mathrm{DR}} \otimes_K D^q_{\mathrm{DR}} \longrightarrow \varprojlim_s H^q_{\mathrm{crys}}((\overline{X}, \overline{M})/(S, N), \mathcal{O}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p}$$

は同型であり, 更に次の同型を導く.

$$Fil^r(B^+_{\mathrm{DR}} \otimes_K D^q_{\mathrm{DR}}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_s H^q_{\mathrm{crys}}((\overline{X}, \overline{M})/(S, N), J^{[r]}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p}.$$

記号を簡単にするために

$$\begin{aligned}
\widehat{B^+_{\mathrm{st}}} &:= H^0_{\mathrm{crys}}((\overline{S}, \overline{N})/(E, M_E))_{\mathbb{Q}_p} \quad (\text{C.Breuil の記法}),\\
\overline{\mathcal{D}}^q &:= H^q_{\mathrm{crys}}((\overline{X}, \overline{M})/(E, M_E))_{\mathbb{Q}_p},\\
\overline{D}^q_{\mathrm{DR}} &:= \varprojlim_s H^q_{\mathrm{crys}}((\overline{X}, \overline{M})/(S, N), \mathcal{O}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p},\\
Fil^r \overline{D}_{\mathrm{DR}} &:= \varprojlim_s H^q_{\mathrm{crys}}((\overline{X}, \overline{M})/(S, N), J^{[r]}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p}.
\end{aligned}$$

とおく. すると上の2つの命題および補題1.10より次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
H^q((\overline{X}, \overline{M})_{\mathrm{syn}}, S^r_{\mathbb{Q}_p}) \arrow[d, "(4.1)"] & & \\
H^q_{\mathrm{crys}}((\overline{X}, \overline{M})/W, J^{[r]})^{\varphi=p^r}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[r] \arrow[d] & Fil^r \overline{D}^q_{\mathrm{DR}} \arrow[d, phantom, "\cap"] & Fil^r(B^+_{\mathrm{DR}} \otimes_K D^q_{\mathrm{DR}}) \arrow[l, "\sim"', "4.3(2)"] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
(\overline{\mathcal{D}}^q)^{\varphi=p^r, N=0} \arrow[r] & \overline{D}^q_{\mathrm{DR}} & B^+_{\mathrm{DR}} \otimes_K D^q_{\mathrm{DR}} \arrow[l, "\sim"', "4.3(2)"] \\
(\widehat{B^+_{\mathrm{st}}} \otimes_{R_{E_{\mathbb{Q}_p}}} \mathcal{D}^q)^{\varphi=p^r, N=0} \arrow[u, "\wr"', "(4.3)(1)"] \arrow[urr] & & \\
(B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D^q)^{\varphi=p^r, N=0} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[uurr, "\iota_\pi \otimes \rho_\pi"'] & &
\end{tikzcd}$$

左の一番下の上向きの同型は命題4.3(3)と補題1.10から得られるものである. このようにして, 次のガロア群の作用と両立する写像を得る.

$$H^q((\overline{X}, \overline{M})_{\mathrm{syn}}, S^r_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow Fil^r(B^+_{\mathrm{DR}} \otimes_K D^q_{\mathrm{DR}}) \cap (B^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D^q)^{N=0, \varphi=p^r} \tag{4.5}$$

§5 C_{st} − Fontaine-Jannsen の予想の証明

系3.14と準同型(4.5)より, $r \geq q$ のとき, ガロア群の作用と両立する準同型

$$H^q_{\text{ét}}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_p(r)) \longrightarrow Fil^r(B^+_{\mathrm{DR}} \otimes_K D^q_{\mathrm{DR}}) \cap (B^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D^q)^{N=0, \varphi=p^r} \tag{5.1}$$

を得る. $\mathbb{Q}_p(-r) \subset B_{\mathrm{st}}$ だから, この準同型より B_{st}- 線型で, ガロア群の作用, Frobenius, monodromy, および, π に対応する埋め込み $\iota_\pi \colon B_{\mathrm{st}} \hookrightarrow B_{\mathrm{DR}}$ に関してテンソル積をとったあとの filtration と可換な準同型

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^q_{\text{ét}}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D^q \tag{5.2}$$

を得る．これは，$r \geq q$ の取り方によらず，また X について functorial で積構造と可換となることがわかる．あとは (5.2) が同型になることを示せば十分である．étale cohomology と crystalline cohomology はともに Poincaré duality を持ち，またその次元が一致する（Lefschez principle, étale cohomology と singular cohomology の比較定理を用いて，（複素数体上の） Hodge 理論に帰着する）ことから，X_η が geometrically connected で d 次元のとき，上の準同型が $q = 2d$ の時 0 にならないことを示すことに帰着される．（厳密には，filtration の間の同型を導くために，さらに，Hodge cohomology に対する Serre duality を用いる必要がある．）$q = 2d$ の時の同型は，次の line bundle の 1st Chern class と (5.2) の compatiblity と若干の巧妙な議論（[Fo-M]III6.3, [T3]4.10.3）により導かれる．

命題 5.3 X 上の *line bundle*$\mathcal{L}$ に対して，準同型 (5.2) で $q = 2$ とおいたものは，$t \otimes (c^1_{\text{ét}}(\mathcal{L}|X_\eta) \otimes t^{-1})$ を $1 \otimes c^1_{\text{DR}}(\mathcal{L}|X_\eta)$ に写す．ここで，t は $\mathbb{Q}_p(1)$ の 0 でない任意の元である．

注 5.4 上の命題と splitting principle により，準同型 (5.2) は，X 上の任意の vector bundle の Chern class と可換なことがわかる．

§6 主定理の証明の概略

η 上の proper scheme は必ず S 上の proper scheme にのびるから（永田の定理），最初から S 上の proper scheme X が与えられているとしてよい．整数 m を固定すると de Jong の alteration（[DJ]）より，S を適当な有限次拡大でおきかえれば（potentially semi-stable 表現 になるかのみ考えているからおきかても問題ない），m 番目で truncate された X の proper hypercovering $X^\cdot \to X$ で，各 X^ν $(\nu = 0, 1, \cdots, m)$ がある semi-stable scheme を base change した形であるものがとれる．各 X^ν に sepcial fiber に伴う log 構造 M^ν を入れると，これらは m 番目で truncate された simplicial fine log scheme $(X^\cdot, M^\cdot)$ をなし，その各成分 (X^ν, M^ν) には前の章まで述べてきた議論が適用できる．まずétale cohomology の cohomological descent により，$V^q := H^q_{\text{ét}}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_p)$ は，$q < m$ のとき $H^q_{\text{ét}}(X^\cdot_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_p)$ と一致する．対応する crystalline cohomology D^q $(q < m)$ は，topos $((X^\cdot_s, M^\cdot_s)/(W_n, W_n(L)))_{\text{crys}}$ を用いて§1 と同様に定義する．これが有限次元 K_0- 空間になることは spectral sequence を用いて容易にわかる．Frobenius φ, monodromy N も定義できる．以下ガロア群の作用と可換な B_{st}- 同型

$$B_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^q \cong B_{\text{st}} \otimes_{K_0} D^q \quad (q < m) \tag{6.1}$$

が存在することを示す．（この同型から，左辺のガロア不変部分は D^q と同型でその K_0 上の次元が V^q の $\mathbb{Q}_p$ 上の次元と一致すること，したがって V^q が semi-stable 表現であることが分かる．）

まず§3 の議論を $(X^\cdot, M^\cdot)$ に伴う topos 達に拡張できて，$(X^\cdot_{\overline{s}})_{\text{ét}}$ 上の射

$$R\overline{p}^\cdot_{n+r*} S^r_n \longrightarrow (\overline{i}^\cdot_{\text{ét}})^* R(\overline{j}^\cdot_{\text{ét}})_* \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\{r\} \tag{6.2}$$

を得る．定理 3.2 を各成分 (X^ν, M^ν) に適用すると，この射の $\mathcal{H}^q$ $(q \leq r)$ をとったものの kernel, cokernel の exponent は n に関して一様におさえられる．したがって両辺の cohomology をとって proper base change を使うと，同型

$$H^q((\overline{X}^\cdot, \overline{M}^\cdot)_{\text{syn}}, S^r_{\mathbb{Q}_p}) \cong H^q_{\text{ét}}(X^\cdot_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_p) \cong V^q \quad (r \geq q, q < m) \tag{6.3}$$

を得る．cohomology $\mathcal{D}^q$ $(q < r)$ を $((X^\cdot_n, M^\cdot_n)/(E_n, M_{E_n}))_{\text{crys}}$ を用いて§1 と同様に定義すると，補題 1.10 はこの場合にも成り立つ．実際 section の存在は[H-Ka](2.24) を

simplicialの場合にも証明することに帰着され, これは[T2]のsyntomic siteを用いた議論をlog schemeに拡張することにすることによって証明できる. 同型になることは, 成分ごとの議論に容易に帰着される. また, 命題4.4(1)もsimplicialの場合に成り立つ. 以上より $0 \leq q \leq r$, $q < m$ に対して射

$$(6.4) \quad V^q \cong H^q((\overline{X}^{\cdot}, \overline{M}^{\cdot})_{\mathrm{syn}}, S^r_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow H^q_{\mathrm{crys}}((\overline{X}^{\cdot}, \overline{M}^{\cdot})/W, J^{[r]})^{\varphi=p^r, N=0}_{\mathbb{Q}_p}$$
$$\longrightarrow (\overline{\mathcal{D}}^q)^{\varphi=p^r, N=0} \cong (\widehat{B^+_{\mathrm{st}} \otimes_{R_{E_{\mathbb{Q}_p}}} \mathcal{D}^q})^{\varphi=p^r, N=0} \xleftarrow{\sim} (B^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=p^r, N=0}$$

を得, これより(6.1)の左から右への射を得る. 同型であることは m を大きく（従ってbase changeも無限回繰り返す）していった極限で, spectral sequenceを用いて C_{st} に帰着させて証明する.

References

[A] Artin, M., *Grothendieck Topologies*, (Notes on a Seminar by M. Artin 1962), Harvard University.

[Be] Berthelot, P., *Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Math. 407, Springer, 1974.

[Br] Breuil, C., *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline et cohomologie de Čech*, Bull. Soc. math. France **124** (1996), 587–647.

[De] Deligne, P., *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. IHES **44** (1975), 5–77.

[De-I] Deligne, P. and Illusie, L., *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Inv. math. **89** (1987), 247–270.

[DJ] de Jong, A. J., *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93.

[Fa] Faltings, G., *Almost étale extensions*, Max-Planck-Institut für Mathematik Preprint Series 1998 (3).

[Fo1] Fontaine, J.-M., *Sur certaines types de représentations p-adiques de groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.

[Fo2] Fontaine, J.-M., *Le corps des périodes p-adiques*, Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque **223** (1994), 59–111.

[Fo3] Fontaine, J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque **223** (1994), 113–183.

[Fo-M] Fontaine, J.-M. and Messing, W., *p-adic periods and p-adic etale cohomology*, Contemporary Math. **67** (1987), 179–207.

[H2] Hyodo, O., *On the de Rham-Witt complex attached to a semi-stable family*, Compositio Mathematica **78** (1991), 241-260.

[H-Ka] Hyodo, O. and Kato, K., *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque **223** (1994), 221–268.

[I] Illusie, L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique*, Séminaire Bourbaki 1980/90, Exp. 726, Astérisque **189-190** (1990), 325–374.

[Ka1] Kato, K., *On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing)*, Advanced studies in Pure Math. **10** (1987), 207-251.

[Ka2] Kato, K., *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989, pp. 191–224.

[Ka3] Kato, K., *Semi-stable reduction and p-adic etale cohomology*, Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque **223** (1994), 269–293.

[Ku] Kurihara, M., *A note on p-adic etale cohomology*, Proc. Japan. Academy **63** (1987), 275–278.

[T1] Tsuji, T., *Poincaré duality for logarithmic crystalline cohomology*, preprint.

[T2] Tsuji, T., *Frobenius, the Hodge filtration and the syntomic site*, preprint.

[T3] Tsuji, T., *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, preprint.

[T4] Tsuji, T., p 進 *Hodge* 理論, 第39回代数学シンポジウム報告集 (1994), 146–152.