数理解析研究所講究録
1027巻 1998年 33-38

フルタ不等式の補完領域上における単調性について

MONOTONICITY OF THE FURUTA INEQUALITY ON ITS COMPLEMENTARY DOMAIN

前橋工科大学　亀井栄三郎
Maebashi Institute of Technology
Eizaburo KAMEI

1. 序. フルタ不等式が発見されて既に１０年以上の歳月が流れる。この間、この不等式はいろいろな形で点検されながら**進化**、**深化**を遂げ、今その**真価**はさまざまな分野において発揮されている。1987年[8]において発表されたフルタ不等式の最初の形は次のようなものである。

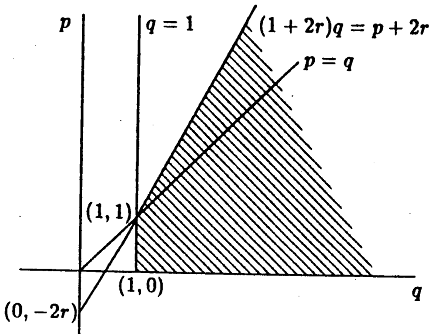
フルタ不等式: ([8],cf.[9]) *If* $A \geq B \geq 0$, *then for each* $r \geq 0$,

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq (B^r B^p B^r)^{\frac{1}{q}}$$

and

$$(A^r A^p A^r)^{\frac{1}{q}} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}}$$

holds for p *and* q *such that* $p \geq 0$ *and* $q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$.



Figure

p,q,r についてこの図における領域がbest possbleであることの証明は棚橋[19]において示されている。フルタ不等式において $r=0$ としたとき 次の Löwner-Heinz 不等式を得ることができる。

Löwner-Heinz 不等式: If $A \geq B \geq 0$, then

$$A^\alpha \geq B^\alpha \ for\ \alpha \in [0,1].$$

久保一安藤[17]による作用素平均を用いてフルタ不等式を表わすと次のようになる。

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq A \ and\ B \leq B^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} A^p,\ \ for\ p \geq 1\ and\ t \leq 0.$$

ここで使われている記号 $\natural_\alpha$ は *α-power mean* と呼ばれるもので

$$A \natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}},\ \ for\ \alpha \in [0,1]$$

によって与えられる。この *α-power mean* を用いてフルタ不等式の別証明を与えることで次の結果を得ることができた(cf.[7],[14])。

Satellite theorem of the Furuta inequality：If $A \geq B \geq 0$, then for $p \geq 1$ and $t \leq 0$,

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \ \leq B \leq A \leq B^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} A^p.$$

2. 補完領域. フルタ不等式と同じ形の不等式が成り立つ領域が存在することを最初に指摘したのは吉野[21]である。我々はこの指摘を受けて次のような結果を得た([4])。

If $A \geq B > 0, 0 \leq t < p$ and $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$, then

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq A.$$

ここで使われている記号 $\natural_s$ は $s \in \mathcal{R}$ に対して $A \natural_s B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^s A^{\frac{1}{2}}$ で与えられる。これは $s \in [0,1]$ のとき $\sharp$ と一致する。

一方 $0 \leq t < p \leq \frac{1}{2}$ の場合についての議論は棚橋[20]によってはじめられた。彼はここで

$0 \leq t < p \leq \frac{1}{2}$ に対し、$A \geq B \geq O$ ならば $A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq A$ は成立するか、

という問題を提出している。これを**棚橋の問題**と呼ぶ。

我々はこの問題に対する解答ではないが、$\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ の場合の別証明とともに $0 \leq t < p \leq \frac{1}{2}$ の場合についても統一的な証明を与えることで次のようにまとめることができた([16])。

Let $A \geq B > 0$ and $0 \leq t < p \leq 1$. Then

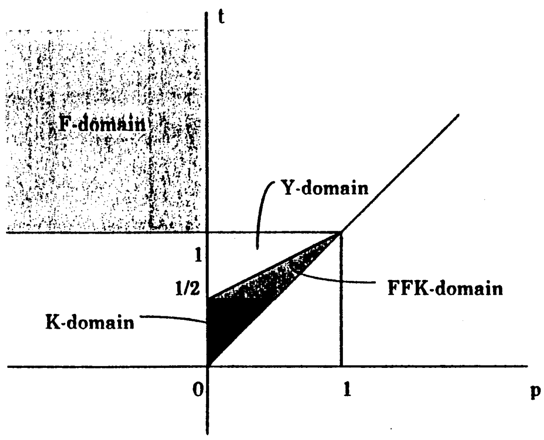
(i) for $\frac{1}{2} \leq p$,

(1) $$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq B \leq A,$$

(ii) for $p \leq \frac{1}{2}$,

(2) $$A^t \natural_{\frac{2p-t}{p-t}} B^p \leq B^{2p} \leq A^{2p}.$$

さらにこれを operator function の観点から次のように一般化することができた([5],[6])。



Figure

Theorem F.F.J.K. Let $A \geq B > 0$, $0 \leq t < p \leq 1$ and $\alpha \in (0,1]$.

(i) If $\frac{1}{2} \leq p$, then for $\beta \geq (1-t)\alpha + t$ and $\frac{(1-t)\alpha}{p-t} \geq 1$,

(3) $$(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{(1-t)\alpha+t}{\beta}} \leq A^t \natural_{\frac{(1-t)\alpha}{p-t}} B^p \leq B^{(1-t)\alpha+t} \leq A^t \sharp_\alpha B \leq A^{(1-t)\alpha+t}$$

and $f(\beta) = (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{(1-t)\alpha}{\beta}}$ is a decreasing function of β such that $\beta \geq (1-t)\alpha + t$.

(ii) If $p \leq \frac{1}{2}$, then for $\beta \geq (2p-t)\alpha + t$ and $\frac{(2p-t)\alpha}{p-t} \geq 1$,

(4) $$(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{(2p-t)\alpha+t}{\beta}} \leq A^t \natural_{\frac{(2p-t)\alpha}{p-t}} B^p \leq B^{(2p-t)\alpha+t} \leq A^t \sharp_\alpha B^{2p} \leq A^{(2p-t)\alpha+t}$$

and $g(\beta) = (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{(2p-t)\alpha+t}{\beta}}$ is a decreasing function of β such that $\beta \geq (2p-t)\alpha + t$.

3. 結論. 上の Theorem における formulation の不統一性が気にかかっていた。また formulation そのものも複雑である。そこで今回、これらの事柄を次のように整理することができることを報告する。

Theorem. (i) Let $A \geq B > 0$ and $0 \leq t < p \leq 1$. Then for each δ with $t \leq \delta \leq min\{1, 2p\}$,

$$F(\beta) = F_\delta(\beta) = (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}}$$

is a decreasing function of for $\beta \geq \delta$, and

$$(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}} \leq A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq A^\delta. \tag{5}$$

In particular, for each δ with $p \leq \delta \leq min\{1, 2p\}$,

$$(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}} \leq A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq B^\delta \leq A^\delta. \tag{6}$$

(ii) Let $A \geq B > 0$, $1 \leq p$ and $0 \leq t \leq 1$, then

$$F(\beta) = (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}} \leq B \leq A, \tag{7}$$

and $F(\beta)$ is a decreasing function of $\beta \geq p$.

Remark. この Theorem で (5) に $\delta = (1-t)\alpha + t$, $\alpha \in (0, 1]$ を代入すれば (3) が得られ $\delta = (2p-t)\alpha + t$,$\alpha \in (0, 1]$ を代入することで (7) が得られる。

最初にこれまでもしばしば使ってきた次の lemma を与えておく (cf.[5],[7],[12],[16])。

Lemma. *If $A \geq B > 0$ and $p \in \mathbf{R}$, then for $0 \leq t \leq 1$, $t < p$ and $p \leq \delta \leq 2p - t$,*

$$A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq B^\delta.$$

Proof. Since $A^t \natural_s B^p \leq B^{(p-t)s+t}$ for $A \geq B > 0$, $p \in \mathbf{R}$, $1 \leq s \leq 2$ and $0 \leq t \leq 1$, by replacing $s = \frac{\delta-t}{p-t}$ we have the above.

Proof of Theorem. In the beginning, we point out that

$$A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq B^\delta \leq A^\delta \ for \ p \leq \delta \leq 2p. \tag{11}$$

As a matter of fact, since $A^\delta \geq B^\delta > 0$ by (2) and $0 \leq \frac{t}{\delta} < \frac{p}{\delta} \leq 1, \frac{1}{2} \leq \frac{p}{\delta} \leq 1$, we can apply (4) to A^δ and B^δ, that is,

$$A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p = (A^\delta)^{\frac{t}{\delta}} \natural_{\frac{1-\frac{t}{\delta}}{\frac{p}{\delta}-\frac{t}{\delta}}} (B^\delta)^{\frac{p}{\delta}} \leq B^\delta \leq A^\delta.$$

Our proof is done inductively. As the first step, let $\beta \geq \delta$ such that $1 \leq \frac{\beta-t}{\delta-t} \leq 2$, then we use Lemma for $A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p$ and A^δ, we have

$$\begin{aligned} A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p &= A^t \natural_{\frac{\beta-t}{\delta-t}} (A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p) \\ &= (A^\delta)^{\frac{t}{\delta}} \natural_{\frac{\beta-t}{\delta-t}} (A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p) \\ &\leq (A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p)^{(1-\frac{t}{\delta})\frac{\beta-t}{\delta-t}+\frac{t}{\delta}} \\ &= (A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\beta}{\delta}}. \end{aligned}$$

Since $0 \leq \frac{\delta}{\beta} \leq 1$, applying (2) for $\alpha = \frac{\delta}{\beta}$, we have

$$(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}} \leq A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq B^\delta \leq A^\delta.$$

Secondary, for $A^\delta \geq (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}}$ and β_1 such that $1 \leq \frac{\beta_1-t}{\beta-t} \leq 2$, Lemma leads the following;

$$\begin{aligned} A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p &= A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{\beta-t}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \\ &= (A^\delta)^{\frac{t}{\delta}} \natural_{\frac{\beta_1-t}{\beta-t}} ((A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}})^{\frac{\beta}{\delta}} \\ &\leq ((A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}})^{(\frac{\beta}{\delta}-\frac{t}{\delta})\frac{\beta_1-t}{\beta-t}+\frac{t}{\delta}} \\ &= (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\beta_1}{\beta}}. \end{aligned}$$

Applying (2) for $\alpha = \frac{\delta}{\beta_1}$, we have $(A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta_1}} \leq (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}}$ and

$$(A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta_1}} \leq (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}} \leq A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq B^\delta \leq A^\delta.$$

As the third step, let β_2 be $1 \leq \frac{\beta_2-t}{\beta_1-t} \leq 2$, then we have

$$(A^t \natural_{\frac{\beta_2-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta_2}} \leq (A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta_1}} \leq A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq B^\delta \leq A^\delta$$

by similar calculation to the above. Repeating this method, we have the inequality (9) and the monotonicity of $F(\beta)$.

(ii) In the case of $1 \leq p$ and $0 \leq t \leq 1$, Lemma leads us to $(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}} \leq B \leq A$, when $p \leq \beta \leq 2p-t$. Secondary, for β_1 such that $\beta \leq \beta_1 \leq 2\beta - t$, we apply Lemma again to A and $(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}}$. Then

$$\begin{aligned} A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p &= A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{\beta-t}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \\ &= A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{\beta-t}} ((A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}})^{\beta} \\ &\leq ((A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}})^{(\beta-t)\frac{\beta_1-t}{\beta-t}+t} \\ &= (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\beta_1}{\beta}}. \end{aligned}$$

Applying (2) to $\alpha = \frac{1}{\beta_1}$

$$(A^t \natural_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta_1}} \leq (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}} \leq B \leq A.$$

Repeating this method like above, we have the conclusion.

Remark. ここで $t \le \delta \le 1$ または $t \le \delta \le 2p$ のとき、上の議論は $\delta \le p$ の場合を含んでいない。この時 $A^t \natural_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p = A^t \sharp_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p$ であり、作用素平均の単調性より $B^\delta \le A^t \sharp_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \le A^\delta$ はすぐに得られる。このことより、(5) は得られるが、(6) までには至らない。

追記. 先にあげた棚橋の問題について、姜健飛および古田、山崎、柳田らによる勢力的な研究の結果、$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \le B$ 、 $A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \le A$ ならない例が発見されたことを付け加えて報告しておく。

参考文献

[1] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, J.Operator Theory,23(1990),67-72.

[2] M.Fujii,T.Furuta and E.Kamei, Operator functions associated with Furuta's inequality, Linear Alg. and Its Appl.,149(1991),91-96.

[3] M.Fujii,T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, Linear Alg. and Its Appl.,179(1993),161-169.

[4] M.Fujii,T.Furuta and E.Kamei, Complements to the Furuta inequality, Proc. Japan Acad.,70(1994), Ser.A,239-242.

[5] M.Fujii,T.Furuta and E.Kamei, Complements to the Furuta inequality,III, Math.Japon.,45(1997),25-32.

[6] M.Fujii,J.F.Jiang and E.Kamei, Complements to the Furuta inequality,IV, Math.Japon.,45(1997),511-518.

[7] M.Fujii and E.Kamei, Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality, Proc.Amer.Math.Soc., 124(1996),2751-2756.

[8] T.Furuta, $A \ge B \ge 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \ge B^{(p+2r)/q}$ for $r \ge 0, p \ge 0, q \ge 1$ with $(1+2r)q \ge p+2r$, Proc.Amer.Math.Soc.,101(1987),85-88.

[9] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, Proc.Japan Acad.,65(1989),126.

[10] T.Furuta, Two operator functions with monotone property, Proc.Amer.Math.Soc.,111(1991),511-516.

[11] T.Furuta, Applications of order preserving operator inequalities, Operator Theory: Advances and Applications,59(1992),180-190.

[12] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Alg. and Its Appl.,219(1995),139-155.

[13] E.Heinz, Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, Math. Ann.,123(1951),415-438.

[14] E.Kamei, Furuta's inequality via operator means, Math.Japon.,33(1988),737-739.

[15] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, Math.Japon.,33(1988),883-886.

[16] E.Kamei, Complements to the Furuta inequality,II, Math.Japon.,45(1997),15-23.

[17] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math.Ann.,246(1980),205-224.

[18] K.Löwner, Über monotone Matrixfunktion, Math.Z.,38(1934),177-216.

[19] K.Tanahashi, Best possibility of the Furuta inequality, Proc.Amer.Math.Soc.,124(1996),141-146.

[20] K.Tanahashi, The Furuta inequality in case of negative powers, RIMS,903(1995),78-96.

[21] T.Yoshino, Introduction to Operator Theory, Pitman Research Notes in Math.Ser.,300,Longman Scientific and Technical,1993.