数理解析研究所講究録
1028巻 1998年 52-66

Structure of Distribution Null-Solutions to Fuchsian Partial Differential Equations

岐阜大学 工学部 応用情報学科　萬代武史 (Takeshi MANDAI)

1 序

M. S. Baouendi and C. Goulaouic([BG73]) によって定義された重み (weight) $\omega := m - k$ のフックス型偏微分作用素を考える.

$$P = t^k \partial_t^m + \sum_{j=1}^{k} a_j(x) t^{k-j} \partial_t^{m-j} + \sum_{l<m} \sum_{|\alpha| \le m-l} b_{l,\alpha}(t,x) t^{d(l)} \partial_t^l \partial_x^\alpha \ , \tag{1.1}$$

$$0 \le k \le m, \quad d(l) := \max\{0, l-m+k+1\}, \quad (t,x) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \ . \tag{1.2}$$

係数は，実解析的とする．$m = k$ $(\omega = 0)$ の時は, M. Kashiwara and T. Oshima [KO77](Definition 4.2) で "*an operator which has regular singularity in a weak sense along* $\Sigma_0 := \{t = 0\}$" と呼ばれている作用素である．

この作用素には２つの観点から興味がある．１つはもちろん，確定特異点を持つ常微分作用素の自然な拡張になっているということであり，非特性的初期値問題の自然な拡張として，特性的初期値問題がうまく解ける（Cauchy-Kowalewsky の定理の自然な拡張が成り立つ）ということである．Holmgren の定理の拡張なども成り立つ．双曲性を付け加えれば，C^∞ 関数のカテゴリーでもやはり特性的初期値問題が well-posed になるなど，良い性質を持っている．これらについては，以前田原秀敏氏が精力的に研究しておられた．([Tah78],[Tah79],[Tah80],[Tah84], ... , [Tah89] 等.)

もう１つはいわゆる零解 (null-solution) に関してである．

定義 1.1　(0,0) の近傍で定義された超関数 (distribution) u が P の (0,0) における零解であるとは，$Pu = 0, (0,0) \in \operatorname{supp} u \subset \{t \ge 0\}$ を満たすことである．

一般に，初期面が非特性的な場合には，Holmgren の定理（の現代版?）によって，零解は存在しない．又，単純特性的な場合には，C^∞ 零解が存在することが分かっている ([Miz62],[Kom76])．フックス型作用素については，$k=0$ の時は，非特性的で，$k \geq 1$ の時は，特性的だが単純特性的ではない．実際，$k \geq 1$ の時には，十分滑らかな零解は存在しないが，超関数零解は存在することが分かっている ([Iga85], [Man98])．猪狩氏や著者によって作られたこの零解は，x 方向には実解析的になっている．今回の講演では，このような零解全体の構造を明らかにしたい．

今回の結果で最も重要な点は，特性指数（後述）に条件をつけないで考えるという点である．特性指数が実解析的でなくてもよいし，整数差を持ってもよい．基本的なアイデアはほかの場合にも使えるので，t についても（$t \neq 0$ で）正則な解の構造という形で述べる方が良かったかもしれないが，筆者は零解についての興味が大きく，台が片側だけにある解の構造というのも一応は新しいはずなので，この形で述べることにする．

NOTATION:

(i) 整数全体の集合を $\boldsymbol{Z}$，非負整数全体の集合を $\boldsymbol{N}$ と書く．複素数 z の実部を $\operatorname{Re} z$ とする．

(ii) $\vartheta := t\partial_t$ とおく．また，$l \in \boldsymbol{N}$ に対して，$(\lambda)_l := \prod_{j=0}^{l-1}(\lambda - j)$ とおく．

(iii) $\boldsymbol{C}^n$ の領域 Ω で正則な関数全体を $\mathcal{O}(\Omega)$ と書く．

(iv) $\boldsymbol{R}$ の開区間 I 上のテスト関数全体を $\mathcal{D}(I)$ と書き，超関数 (Schwartz distribution) 全体を $\mathcal{D}'(I)$ と書く．急減少 C^∞ 関数全体を $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$，緩増加超関数 (tempered distribution) 全体を $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R})$ と書く．これらの空間の duality を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とする．一般に，完備局所凸線形位相空間 X に対して，X-値超関数 (X-valued distribution) 全体を $\mathcal{D}'(I;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(I), X)$ とおく．但し，$\mathcal{L}(X,Y)$ は X から Y への連続線形写像全体である．([Sch57] 参照)． さらに，$\mathcal{D}'_+(I;X) := \{f \in \mathcal{D}'(I;X);\, f(t) = 0 \text{ in } X \text{ for } t < 0\}$ とおく．また，$N \in \boldsymbol{Z} \cup \{\infty\}$ に対して，

$$C_+^N(I;X) := \{f \in C^N(I;X);\, f(t) = 0 \text{ in } X \text{ for } t < 0\}\ (N \geq 0)\ ,$$

$$C_+^N(I;X) := \{\,\partial_t^{|N|}(f) \in \mathcal{D}'_+(I;X)\,;\, f \in C_+^0(I;X)\,\}\ (N \le 0)$$

とおく．

(v) $z \in \boldsymbol{C}, \mathrm{Re}\, z > -1$ に対して，

$$t_+^z := \begin{cases} t^z & (t > 0) \\ 0 & (t \le 0) \end{cases} ,$$

とおく，これは t の局所可積分関数で，z を正則パラメータに持っている．さらに，$\partial_t(t_+^z) = zt_+^{z-1}$ によって，$z \in \boldsymbol{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$ にまで有理型に拡張でき，$z = -1,-2,\dots$ を1位の極に持つ．すなわち，$t_+^z \in \mathcal{D}'_+(\boldsymbol{R}; \mathcal{O}(\boldsymbol{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}))$. ([GS64]).

(vi) 可換環 R の元を係数とする λ の多項式全体を $R[\lambda]$ と書く．$F(\lambda) \in R[\lambda]$ の次数を $\deg_\lambda F$ と書く．

2 常微分方程式の場合の結果

まず，常微分の場合（$n = 0$ の場合とみなせる）にどうなっているか，簡単に振り返ってみよう．$t = 0$ で確定特異点を持つ微分作用素

$$P = t^k\partial_t^m + \sum_{j=1}^{k} a_j t^{k-j}\partial_t^{m-j} + \sum_{l=0}^{m} b_l(t)t^{d(l)}\partial_t^l ,$$

$$0 \le k \le m,\ a_j \in \boldsymbol{C},\ b_l \in C^\infty(-T_0,T_0) .$$

を考える $(T_0 > 0)$.

$$\mathcal{C}[P](\lambda) = \mathcal{C}(\lambda) := \{t^{-\lambda+\omega}P(t^\lambda)\}|_{t=0} = (\lambda)_m + \sum_{j=1}^{k} a_j(\lambda)_{m-j} \in \boldsymbol{C}[\lambda] ,$$

は P の指数多項式 (indicial polynomial) と呼ばれ，$\mathcal{C}(\lambda) = 0$ の根は特性指数 (characteristic exponent, characteristic index) と呼ばれる．指数多項式 $\mathcal{C}$ は

$$\mathcal{C}(\lambda) = (\lambda)_\omega \widetilde{\mathcal{C}}(\lambda - \omega) ,$$

と分解できる．ここで，$\widetilde{\mathcal{C}}[P](\lambda)=\widetilde{\mathcal{C}}(\lambda):=(\lambda)_k+\sum_{j=1}^{k}a_j(\lambda)_{k-j}\in \boldsymbol{C}[\lambda]$ である．

さて，$\widetilde{\mathcal{C}}(\lambda)=\prod_{l=1}^{d}(\lambda-\lambda_l)^{r_l}$ $(d\in \boldsymbol{N}, r_l\geq 1, (\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ は互いに相異なる）とする．

2.1 形式解

まずは,

$$\mathcal{F}:=\{\,u(t)=t^{\rho}\sum_{j=0}^{\infty}t^j\sum_{\nu=0}^{q_j}a_{j,\nu}(\log t)^{\nu}\,;\,\rho\in \boldsymbol{C}, q_j\in\ a_{j,\nu}\in \boldsymbol{C}\,\}$$

に属する形式解を考えよう．この場合は，$t^{\omega}P$ を考えればよいので，$\omega=0(k=m)$ としてよい． つまり，$\widetilde{\mathcal{C}}=\mathcal{C}$.

定理 2.1 $k=m$ とし，$\mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}P:=\{u\in\mathcal{F}; Pu=0\}$ とおく．$1\leq l\leq d$, $1\leq p\leq r_l$ なる (l,p) に対して，ある $q_j\in \boldsymbol{N}(j=1,2,\dots)$ と $a_{j,\nu}\in \boldsymbol{C}(j=1,2,\dots;0\leq\nu\leq q_j)$ とがあって，$v_{l,p}=t^{\lambda_l}(\log t)^{p-1}+\sum_{j=1}^{\infty}t^{\lambda_l+j}\sum_{\nu=0}^{q_j}a_{j,\nu}(\log t)^{\nu}$ なる $v_{l,p}\in \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}P$ が存在する．さらに，これら $m(=r_1+\cdots+r_d)$ 個の解が $\mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}P$ の基底となる．特に，$\dim \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}P=m$.

注意 2.2 (1) P の係数が $t=0$ の近傍で正則なら，これら形式解は $t=0$ のある近傍 B で収束して，$B\setminus\{0\}$ の universal covering で正則な解となる．
(2) すべての l について $r_l=1$ で $\{\lambda_l\}$ が整数差を持たないならば，すべての j について $q_j=0$ となる．すなわち，$\log t$ を含む項は出てこない．

2.2 $\mathcal{D}'_+$ に属する解

次に $\mathcal{D}'_+(-T_0,T_0)$ での解を考える．この場合には，$\omega=0$ の場合に帰着することはできない．形式解から想像できるように $t_+^{\lambda_l+j}(\log t)^{\nu}$ が出てくるはずであるが，この超関数は，$\lambda_l+j=-1,-2,\dots$ では定義できない．また，$(\vartheta+1)u=0$ の $\mathcal{D}'_+(\boldsymbol{R})$ での解は $\mathrm{Pf}.\,t_+^{-1}=(\log t_+)'$ ではなく，$\delta(t)$ である．そこで，次の超関数を

用意する.

$$G(z) = G(z;t) := \frac{t_+^z}{\Gamma(z+1)} \in \mathcal{D}'_+(\boldsymbol{R};\mathcal{O}(\boldsymbol{C})) \ . \tag{2.1}$$

分母と分子の極 $(z=-1,-2,\dots)$ が打ち消しあって, z につき $\boldsymbol{C}$ 上正則となる. さらに,

$$G^{(j)}(z) := \partial_z^j(G(z)) \in \mathcal{D}'_+(\boldsymbol{R};\mathcal{O}(\boldsymbol{C})) \ . \tag{2.2}$$

とおく. $\partial_t^h G(z;t) = G(z-h;t)$ $(h \in \boldsymbol{N})$, $G(-d) = \partial_t^d(G(0)) = \delta^{(d-1)}(t)$ $(d = 1,2,\dots)$ である.

定理 2.3 $\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+} P := \{u \in \mathcal{D}'_+(-T_0,T_0)\,;\, Pu = 0\}$ とおく. $1 \le l \le d$, $1 \le p \le r_l$ なる (l,p) に対して, ある $q_j \in \boldsymbol{N}(j=1,2,\dots)$ と $a_{j,\nu} \in \boldsymbol{C}(j=1,2,\dots;\ 0 \le \nu \le q_j)$ とがあって, $u_{l,p} \sim G^{(p-1)}(\lambda_l+\omega) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{q_j} a_{j,\nu}G^{(\nu)}(\lambda_l+\omega+j)$ を満たす $u_{l,p} \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+} P$ が存在する. 但し, $\sim$ は "すべての $N \in \boldsymbol{N}$ に対して $u_{l,p} - G^{(p-1)}(\lambda_l+\omega) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{q_j} a_{j,\nu}G^{(\nu)}(\lambda_l+\omega+j) \in C_+^{\lceil \mathrm{Re}\,\lambda_l \rceil+\omega+N}(-T_0,T_0)$" となることを意味するものとする. ここで, $\lceil a \rceil$ は $M \ge a$ なる整数 M のうちで最大のものである.

さらに, これら $k(= r_1 + \cdots + r_d)$ 個の解が $\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+} P$ の基底となる. 特に, $\dim \mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+} P = k$ である. (同様に $\dim \mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'} P = m + k$ がいえる.)

例 2.4 (1) $P = (\vartheta - d + 1)\partial_t = \partial_t(\vartheta - d)$ $(d \in \boldsymbol{N}, d \ge 1)$ を考えると, $m=2, k=1$, $\omega = 1$, $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda(\lambda - d)$ となる. このとき, $\mathrm{Ker}_{\mathcal{F}} P = \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}(tP) = Span\{1, t^d\}$, $\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+} P = Span\{t_+^d\}$, $\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'} P = Span\{t_+^d, t^d, 1\}$.

(2) $P = (\vartheta + d + 1)\partial_t = \partial_t(\vartheta + d)$ $(d \in \boldsymbol{N},\ d \ge 1)$. $m=2$, $k=1$, $\omega=1$, $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda(\lambda + d)$. $\mathrm{Ker}_{\mathcal{F}} P = \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}(tP) = Span\{1, t^{-d}\}$, $\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+} P = Span\{\delta^{(d-1)}\}$, $\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'} P = Span\{\delta^{(d-1)}, 1, (t+i0)^{-d}\}$.

(3) $P = (\vartheta - d + 1)^2\partial_t = \partial_t(\vartheta - d)^2$ $(d \in \boldsymbol{N},\ d \ge 1)$. $m=3$, $k=2$, $\omega = 1$, $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda(\lambda - d)^2$. $\mathrm{Ker}_{\mathcal{F}} P = \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}(tP) = Span\{1, t^d, t^d \log t\}$, $\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+} P = Span\{t_+^d, t_+^d \log t_+\}$, $\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'} P = Span\{t_+^d, t_+^d \log t_+, 1, t^d, t^d \log(t + i0)\}$.

(4) $P=(\vartheta+1)\partial_t=\partial_t\vartheta$. $m=2, k=1, \omega=1, \mathcal{C}(\lambda)=\lambda^2$. $\mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}P=\mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}(tP)=Span\{1,\log t\}, \mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+}P=Span\{t^0_+\}, \mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'}P=Span\{t^0_+,1,\log(t+i0)\}$.

注意 2.5 (1) §2.1 と同様に，すべての l について $r_l=1$ で $\{\lambda_l\}$ が整数差を持たないなら，すべての j について $q_j=0$ である．
(2) この結果を明示的に書いた文献を見つけることができなかったが，既に知られている結果と言ってよいだろう．

2.3 結果の概略

フックス型偏微分作用素 (1.1) についても，前節の定理と似た結果を示すことができる．

$\mathcal{O}_0$ や $(\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+}P)_{(0,0)}$ をそれぞれ対応する空間の germ の空間とする．すなわち，$\mathcal{O}_0:=\mathrm{indlim}_{0\in\Omega\subset\boldsymbol{C}^n}\mathcal{O}(\Omega)$，$(\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+}P)_{(0,0)}:=\mathrm{indlim}_{T>0;0\in\Omega\subset\boldsymbol{C}^n}\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))}P$．このとき，

$$(\mathcal{O}_0)^k\cong(\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+}P)_{(0,0)} \tag{2.3}$$

が成立し，この同型写像をかなり具体的に構成できる．

もう少し具体的に述べよう．作用素 (1.1) を考え，

$$a_j\in\mathcal{O}(\Omega_0),\quad b_{l,\alpha}\in C^\infty(-T_0,T_0;\mathcal{O}(\Omega_0))$$

($T_0>0, \Omega_0$ は $\boldsymbol{C}^n$ の領域で原点 0 を含む）とする．

$$\mathcal{C}(x;\lambda):=(\lambda)_m+\sum_{j=1}^k a_j(x)(\lambda)_{m-j}=\{t^{-\lambda+\omega}P(t^\lambda)\}|_{t=0}\ ,$$

はやはり P の指数多項式と呼ばれ，$\mathcal{C}(x;\lambda)=0$ の根 $\lambda=\lambda(x)$ は特性指数と呼ばれる．指数多項式は

$$\mathcal{C}(x;\lambda)=(\lambda)_\omega\widetilde{\mathcal{C}}(x;\lambda-\omega)$$

と分解される．ここで，

$$\widetilde{\mathcal{C}}(x;\lambda):=(\lambda)_k+\sum_{j=1}^k a_j(x)(\lambda)_{k-j}$$

である．$\widetilde{\mathcal{C}}(0;\lambda)=\prod_{l=1}^{d}(\lambda-\lambda_l)^{r_l}$ $(d\in\boldsymbol{N},\ r_l\geq 1,\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ は相異なる）とする．

われわれの結果は次の定理である．

定理 2.6 $\Omega(\ni 0)$ を Ω_0 の部分領域とすると，ある $T'>0$ と Ω の部分領域 $\Omega'(\ni 0)$ があって，$1\leq l\leq d$, $1\leq p\leq r_l$ なる (l,p) に対して，連続線形写像 $u_{l,p}:\mathcal{O}(\Omega)\to\mathcal{D}'_+(-T',T';\mathcal{O}(\Omega'))$ が存在して，次を満たす．

すべての $\varphi\in\mathcal{O}(\Omega)$ に対して，$P(u_{l,p}[\varphi])=0$ であり，ある $q_h\in\boldsymbol{N}(h=1,2,\ldots)$ とある $\varphi_{h,\nu}\in\boldsymbol{C}(h=1,2,\ldots;0\leq\nu\leq q_h)$ に対して，

$$u_{l,p}[\varphi]|_{x=0}\sim\varphi(0)G^{(p-1)}(\lambda_l+\omega)+\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{q_h}\varphi_{h,\nu}G^{(\nu)}(\lambda_l+\omega+h)$$

となる．

逆に，$T>0$ とすると，$Pu=0$ の任意の解 $u\in\mathcal{D}'_+(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ はある $\varphi_{l,p}\in\mathcal{O}(\Omega')$ $(1\leq l\leq d, 1\leq p\leq r_l)$ によって $u=\sum_{l,p}u_{l,p}[\varphi_{l,p}]$ と書ける．

さらに，もし $\varphi_{l,p}\not\equiv 0$ なる (l,p) があれば，$(0,0)\in\operatorname{supp}u$ となる，すなわち，u は零解である．

$u_{l,p}[\varphi]$（の漸近展開）は，後に述べるようにかなり具体的に構成できる．

[Man98] で筆者が構成した解は，$\widetilde{\mathcal{C}}(0;\lambda_l+j)\neq 0$ $(j=1,2,\ldots)$ を満たすようなλ_l に対する $u_{l,0}[1]$ にあたる．

既に述べたように，特性指数が x に関して正則と限らないこと，整数差を持つかもしれないこと，が証明の主な困難である．

3 準備

$\epsilon\geq 0$ を $\operatorname{Re}\lambda_l-\epsilon\notin\boldsymbol{Z}$ $(1\leq l\leq d)$ ととり，$L_l\in\boldsymbol{Z}$ $(1\leq l\leq d)$ を $L_l+\epsilon<\operatorname{Re}\lambda_l<L_l+\epsilon+1$ ととる．

$1\leq l\leq d$ に対して，$\boldsymbol{C}$ 内の単純閉曲線 Γ_l（円周としてよい）で囲まれた領域 D_l を次のようにとる．

(a) $\lambda_l\in D_l$ $(1\leq l\leq d)$,

(b) $\overline{D_l} \cap \overline{D_{l'}} = \emptyset$ $(l \neq l')$,

(c) すべての l について，$\{\lambda_{l'} - j \in \boldsymbol{C}\,;\, 1 \leq l' \leq d, j \in \boldsymbol{N}\} \cap \overline{D_l} = \{\lambda_l\}$.

これは，(c)′ "$j \in \boldsymbol{N}$ かつ $\lambda_{l'} - j \in \overline{D_l}$ とすると，$\lambda_{l'} - j = \lambda_l$ となる" や (c)″ "すべての $\lambda \in \bigcup_{l=1}^{d}(\overline{D_l} \setminus \{\lambda_l\})$ とすべての $j \in \boldsymbol{N}$ に対して，$\widetilde{\mathcal{C}}(0; \lambda + j) \neq 0$ となる" と同値である．

$\{\lambda_{l'} - j \in \boldsymbol{C}\,;\, 1 \leq l' \leq d, j \in \boldsymbol{N}\}$ は離散集合であるので，こういう Γ_l が取れる．

(d) $\overline{D_l} \subset \{\lambda \in \boldsymbol{C}\,;\, L_l + \epsilon < \mathrm{Re}\,\lambda < L_l + \epsilon + 1\}$.

さらに，$\boldsymbol{C}^n$ の領域 $\Omega(\ni 0)$ とモニックな多項式 $E_l(x;\lambda) \in \mathcal{O}(\Omega)[\lambda]$ $(1 \leq l \leq d)$ があって次が成立する．

(e) $\widetilde{\mathcal{C}}(x;\lambda) = \prod_{l=1}^{d} E_l(x;\lambda)$ で $E_l(0;\lambda) = (\lambda - \lambda_l)^{r_l}$ $(1 \leq l \leq d)$,

(f) 各 $l (1 \leq l \leq d)$ に対して，もし $E_l(x;\lambda) = 0$ かつ $x \in \Omega$ ならば，$\lambda \in D_l$ となる，

(g) すべての $x \in \Omega$ とすべての $\lambda \in \bigcup_{l=1}^{d} \Gamma_l$ とすべての $j \in \boldsymbol{N}$ に対して，
$\widetilde{\mathcal{C}}(x; \lambda + j) \neq 0$ となる．

定義 3.1　$1 \leq l \leq d, j \in \boldsymbol{N}, \phi \in \mathcal{O}(\Omega \times \Gamma_l)$ に対して，

$$\mathcal{H}_{l,j}[\phi](t,x) = \mathcal{H}_{l,j}[\phi(x;\zeta)](t,x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l} \frac{\phi(x;\zeta)}{E_l(x;\zeta)} G(\zeta + j; t)\, d\zeta \quad \in \mathcal{D}'_+(\boldsymbol{R}; \mathcal{O}(\Omega))$$

とおく．また，$1 \leq p \leq r_l$ に対して，

$$w_{l,p}(t,x) := \frac{(r_l - p)!}{r_l!} \mathcal{H}_{l,\omega}[\partial_\zeta^p E_l](t,x) \tag{3.1}$$

とおく．

$w_{l,p}(t,0) = \dfrac{1}{(p-1)!} G^{(p-1)}(\lambda_l + \omega)$ であることに注意．これらは，いわゆる（高次）差分商の対称化になっているが，詳しいことは省略する．差分商の対称化がコーシー積分としてきれいに書けることは，筑波大学の若林先生に教えていただいた．

注意 3.2　$x = x_0$ と固定すると，$w_{l,p}(t,x_0) = \sum_{j,k:\ \mathrm{finite}} c_{j,k} G^{(k)}(\mu_j + \omega)$ $(c_{j,k} \in \boldsymbol{C})$ と書ける．但し，$\{\mu_j\}_j$ は $\widetilde{\mathcal{C}}(x_0;\lambda) = 0$ の根である．

命題 3.3　(1) $\{w_{l,p}(\cdot, x)\}_{1 \leq l \leq d,\ 1 \leq p \leq r_l}$ は x を任意に固定するごとに，
$\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+(\boldsymbol{R})}\, \widetilde{\mathcal{C}}(x;\vartheta)\partial_t^\omega$ の基底である．

(2) $u \in \mathcal{D}'_+(\boldsymbol{R}; \mathcal{O}(\Omega))$ がすべての $x \in \Omega$ に対して $\widetilde{\mathcal{C}}(x;\vartheta)\partial_t^\omega u = 0$ を満たすとすると，ある $\varphi_{l,p} \in \mathcal{O}(\Omega)$ によって $u = \sum_{l,p} \varphi_{l,p}(x) w_{l,p}(t,x)$ と表される．重要なのは，$\varphi_{l,p}$ が正則関数であることである．

例 3.4 $P = \vartheta^2 - x = E_1(x;\vartheta)$ とすると，$d = 1(= l), r_1 = 2, \omega = 0$.

$$w_{1,1} = \frac{1}{2}\mathcal{H}_{1,0}[2\zeta] = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{2\zeta}{\zeta^2 - x} G(\zeta;t)\,d\zeta = \frac{1}{2}\{G(\sqrt{x};t) + G(-\sqrt{x};t)\} \ ,$$

$$w_{1,2} = \frac{1}{2}\mathcal{H}_{1,0}[2] = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{2}{\zeta^2 - x} G(\zeta;t)\,d\zeta = \frac{G(\sqrt{x};t) - G(-\sqrt{x};t)}{2\sqrt{x}} \ .$$

$\mathcal{H}_{l,j}[\phi]$ の基本性質を述べよう．

命題 3.5 (1) $\partial_t^h \mathcal{H}_{l,j}[\phi] = \mathcal{H}_{l,j-h}[\phi]$.

(2) $t^h \mathcal{H}_{l,j}[\phi] = \mathcal{H}_{l,j+h}[(\zeta + j + h)_h \cdot \phi(x;\zeta)]$.

(3) $F(x;\lambda) \in \mathcal{O}(\Omega)[\lambda]$ に対して，$F(x;\vartheta)\mathcal{H}_{l,j}[\phi] = \mathcal{H}_{l,j}[F(x;\zeta + j) \cdot \phi(x;\zeta)]$.

(4) $\partial_{x_\nu}\mathcal{H}_{l,j}[\phi] = \mathcal{H}_{l,j}[L_\nu(\phi)]$, 但し，$L_\nu(\phi)(x;\zeta) := (\partial_{x_\nu}\phi)(x;\zeta) - \dfrac{(\partial_{x_\nu}E_l)(x;\zeta)}{E_l(x;\zeta)}\phi(x;\zeta)$.

命題 3.6 $\mathcal{H}_{l,j}[\phi] \in C_+^{j+L_l}(\boldsymbol{R}; \mathcal{O}(\Omega))$.

以上の道具立てにより，$1 \le l \le d, 1 \le p \le r_l$ に対して，$Pu = 0$ の漸近解を次の形で構成できる．

$$u = \varphi(x) w_{l,p}(t,x) + \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{H}_{l,\omega+h}[\mathcal{S}_h(\varphi)](t,x) \ ,$$

但し，$\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{l,p,h}$: $\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega \times \Gamma_l)$ は線形写像であって次の形に書ける．

$$\mathcal{S}_h(\varphi)(x;\zeta) = \sum_{|\alpha| \le mh} s_{h,\alpha}(x;\zeta)\partial_x^\alpha \varphi(x) \ ,$$

$$s_{h,\alpha} = s_{l,p,h,\alpha} \in \frac{1}{\prod_{j=0}^h \widetilde{\mathcal{C}}(x;\zeta + j)^{m_h}} \times \mathcal{O}(\Omega \times \overline{D_l}) \quad (m_h \in \boldsymbol{N}) \ .$$

さらに，$q_h \in \boldsymbol{N}$ と $\varphi_{h,\nu} \in \boldsymbol{C}$ $(h \ge 1; 0 \le \nu \le q_h)$ があって，

$$u(t,0) \sim \varphi(0)\frac{1}{(p-1)!}G^{(p-1)}(\lambda_l + \omega) + \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{q_h} \varphi_{h,\nu} G^{(\nu)}(\lambda_l + \omega + h)$$

となる．

[証明] 　P は次のように形式的に展開できる（重みによる展開）.

$$P = \widetilde{C}(x;\vartheta)\partial_t^{\omega} + \sum_{j=1}^{\omega} Q_j(x,\partial_x;\vartheta)\partial_t^{\omega-j} + \sum_{l=1}^{\infty} t^l R_l(x,\partial_x;\vartheta) \ .$$

$u = \sum_{h=0}^{\infty} u_h$ とおいて代入すると,

$$\widetilde{C}(x;\vartheta)\partial_t^{\omega} u_h = -\sum_{j=1}^{\omega} Q_j(x,\partial_x;\vartheta)\partial_t^{\omega-j} u_{h-j} - \sum_{l=1}^{\infty} t^l R_l(x,\partial_x;\vartheta) u_{h-\omega-l} \qquad (h \geq 0),$$

となる. 但し, $u_h = 0$ $(h < 0)$. $h = 0$ では $\widetilde{C}(x;\vartheta)\partial_t^{\omega} u_0 = 0$ となり, これは $u_0 = \varphi(x) w_{l,p}(t,x)$ とすると満たされる. 帰納的に, 右辺は $\mathcal{H}_{l,h}[\psi]$ $(\psi \in \mathcal{O}(\Omega \times \Gamma_l))$ の形に書けることが分かるので, $u_h = \mathcal{H}_{l,\omega+h}[\psi(x;\zeta)/\widetilde{C}(x;\zeta+h)]$ と取ればよい.

∎

4 結果のより詳しい表現

我々の結果をより詳しく述べると次のようになる.

$\Omega(\ni 0)$ を Ω_0 の部分領域とし, $T \in (0,T_0)$ とする.

定理 4.1 　Ω の部分領域 $\Omega'(\ni 0)$ と $T' \in (0,T)$ とがあって, $1 \leq l \leq d, 1 \leq p \leq r_l$ なる任意の (l,p) に対して, 連続線形写像 $u_{l,p} : \mathcal{O}(\Omega) \to C_+^{L_l+\omega}(-T',T';\mathcal{O}(\Omega'))$ で次を満たすものが存在する.

すべての $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$ に対して,

- $P(u_{l,p}[\varphi]) = 0$ on $(-T',T') \times \Omega'$.
- $u_{l,p}[\varphi](t,x) \sim \varphi(x) w_{l,p}(t,x) + \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{H}_{l,\omega+h}[\mathcal{S}_h(\varphi)](t,x)$,

定理 4.2 　$u \in \mathcal{D}'_+(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ が $Pu = 0$ を満たすとすると, Ω の部分領域 $\Omega'(\ni 0)$ と一意的な $\varphi_{l,p} \in \mathcal{O}(\Omega')$ $(1 \leq l \leq d;\ 1 \leq p \leq r_l)$ とがあって, (0,0) の近傍で $u = \sum_{l,p} u_{l,p}[\varphi_{l,p}]$ となる. さらに, もし $\varphi_{l,p} \not\equiv 0$ なる (l,p) があれば, $(0,0) \in \operatorname{supp} u$ となる. すなわち, u は P の零解である.

以上の２つの定理により，既に述べたように，$(\mathcal{O}_0)^k \cong (\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+} P)_{(0,0)}$ が成立する．同様にして，$(\mathcal{O}_0)^{m+k} \cong (\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'} P)_{(0,0)} := \mathrm{indlim}_{T>0;0\in\Omega\subset\boldsymbol{C}^n} \mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))} P$ も示すことができる．

定理 4.1 は，まず前節で構成した漸近解を漸近展開に持つ超関数を作り，おつりの部分は，Fuchs 型偏微分作用素に対してフラットコーシー問題が一意可解であること，を使って処理することで証明できる．

定理 4.2 の証明の概略は次節で述べる．

5　定理 4.2の証明の概略

先ずは，$\varphi_{l,p}$ の一意性を示そう．

$\epsilon \geq 0$ を "$\widetilde{C}(x;\lambda) = 0\ (x \in \Omega) \implies \mathrm{Re}\,\lambda - \epsilon \notin \boldsymbol{Z}$" となるように取っていること，および $L_l \in \boldsymbol{Z}$ は "$x \in \Omega,\ E_l(x;\lambda) = 0 \implies L_l + \epsilon < \mathrm{Re}\,\lambda < L_l + \epsilon + 1$" と取っていることに注意．

定義 5.1　$L \in \boldsymbol{Z}$ に対して，

$$W_L^{(N)}(-T,T;X) := \begin{cases} \biguplus_{s=0}^{N} \vartheta^s \partial_t^{|L|}(t^\epsilon \times C_+^0(-T,T;X)) & (L \leq 0) \\ \biguplus_{s=0}^{N} \vartheta^s (t^{L+\epsilon} \times C_+^0(-T,T;X)) & (L \geq 0) \end{cases}$$

とおく．

$$W_L^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega)) \subset W_{L-1}^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))\ ,$$
$$W_L^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega)) \subset W_L^{(N+1)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$$

は明らかであろう．

$\chi(t) \in \mathcal{D}(-T,T)$ を $t=0$ の近くで $\chi(t)=1$ となるようにとる．このとき，次のことが成り立つ．

(5.1)
$$\mathcal{H}_{l,j}[\phi] \in W_{L_l+j}^{(0)}\ ,$$

(5.2)
$$v \in W_L^{(N)} \implies \langle v, \chi(t)e^{-t/\rho}\rangle_t = o(\rho^{L+\epsilon+1})\ (\rho \to +0)\ .$$

また，任意に x を固定すると，$a_{j,k} \in \boldsymbol{C}$ があって

$$\langle w_{l,p}, \chi(t)e^{-t/\rho}\rangle_t = \sum_{j,k:\ \text{finite}} a_{j,k}\rho^{\mu_j+\omega+1}(\log\rho)^k + o(\rho^\infty)(= o(\rho^{L_l+\omega+\epsilon+1}))\ (\rho \to +0),$$

となる．但し，$\{\mu_j\}_j$ は $\widetilde{\mathcal{C}}(x;\lambda) = 0$ の根である．($\langle G^{(\nu)}(\lambda), e^{-t/\rho}\rangle_t = \rho^{\lambda+1}(\log\rho)^\nu$ に注意.)

これらにより，“$\sum_{l,p} u_{l,p}[a_{l,p}] = 0 \implies$ すべての (l,p) について $a_{l,p} = 0$” を示すことができる．

次に，$\varphi_{l,p}$ の存在を示そう．

命題 5.2 (1) $\widetilde{T} > T$ とすると，ある $L \in \boldsymbol{Z}$ があって，$\mathcal{D}'_+(-\widetilde{T},\widetilde{T};\mathcal{O}(\Omega)) \subset W_L^{(0)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$.

(2)

$$t \times W_L^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega)) \subset \begin{cases} W_{L+1}^{(N+1)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega)) & (L \le -1) \\ W_{L+1}^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega)) & (L \ge 0) \end{cases},$$

$$\partial_t(W_L^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))) \subset \begin{cases} W_{L-1}^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega)) & (L \le 0) \\ W_{L-1}^{(N+1)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega)) & (L \ge 1) \end{cases},$$

$$\vartheta(W_L^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))) \subset W_L^{(N+1)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega)) .$$

(3) 十分大きな L については，すべての $N \in \boldsymbol{N}$ に対して，$\mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))} P \cap W_L^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega)) = \{0\}$.

(4) すべての $g \in W_L^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ に対して，$\widetilde{\mathcal{C}}(x;\vartheta)\partial_t^\omega v = g$ の解 $v \in W_{L+\omega}^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ が存在する．

(5) $1 \le l \le d$, $1 \le p \le r_l$ に対して，$w_{l,p} \in W_{L_l+\omega}^{(0)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ が成立する．さらに，任意の $L \in \boldsymbol{Z}$ と任意の $N \in \boldsymbol{N}$ に対して，$u \in W_L^{(N)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ が $\widetilde{\mathcal{C}}(x;\vartheta)\partial_t^\omega u = 0$ を満たせば，$\varphi_{l,p} \in \mathcal{O}(\Omega)$ $(1 \le l \le d,\ L_l + \omega \ge L,\ 1 \le p \le r_l)$ があって，$u = \displaystyle\sum_{1\le l\le d,\ L_l+\omega\ge L,\ 1\le p\le r_l} \varphi_{l,p}(x)w_{l,p}(t,x)$ と書ける．

さて，$u \in \mathcal{D}'_+(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ が $Pu = 0$ を満たすとする．T を小さく取り直すと，(1) によって，ある $L \in \boldsymbol{Z}$ があって $u \in W_L^{(0)}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ となる．$P = \widetilde{\mathcal{C}}(x;\vartheta)\partial_t^\omega +$

R と分解すると，(2) によって$\widetilde{\mathcal{C}}(x;\vartheta)\partial_t^\omega u = -Ru \in W^{(m)}_{L-\omega+1}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ である．(4) により，$v \in W^{(m)}_{L+1}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ があって $u - v \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))}\,\widetilde{\mathcal{C}}(x;\vartheta)\partial_t^\omega$ となる．$u - v \in W^{(m)}_L(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ なので，(5) により，$\varphi_{l,p}[0] \in \mathcal{O}(\Omega)$ $(1 \le l \le d,$ $L_l + \omega \ge L, 1 \le p \le r_l)$ があって，

$$u - v = \sum_{1\le l\le d,\ L_l+\omega\ge L,\ 1\le p\le r_l} \varphi_{l,p}[0] w_{l,p}\ ,$$

と書ける．ここで，$u[1] := u - \sum_{l,p} u_{l,p}[\varphi_{l,p}[0]]$ とおくと，$P(u[1]) = 0$，$u[1] \in W^{(m)}_{L+1}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ となることを示すことができる（但し，T,Ω は小さく取り替える必要がある）．

同様にして，Ω や T を必要に応じて小さくすると，$u[2] := u[1] - \sum_{l,p} u_{l,p}[\varphi_{l,p}[1]] \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))}\, P \cap W^{(2m)}_{L+2}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ $(\varphi_{l,p}[1] \in \mathcal{O}(\Omega))$ が得られる．この議論を繰り返せば，$u[N] \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{D}'_+(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))}\, P \cap W^{(Nm)}_{L+N}(-T,T;\mathcal{O}(\Omega))$ であって $u[N] = u - \sum_{l,p} u_{l,p}[\varphi_{l,p}]$ ($\varphi_{l,p} \in \mathcal{O}(\Omega)$) と書けるものが得られる．(3) により，$u[N] = 0$ となり，u は $u = \sum_{l,p} u_{l,p}[\varphi_{l,p}]$ と書ける．

6 注意

1. 同様の考えで，t についても $B \setminus \{0\}$ の universal covering で正則な解の構造定理も特性指数の条件を付けずに得られる．但し，$B(\ni 0)$ は $\boldsymbol{C}$ の領域である．

2. また同様に，フックス双曲型方程式の $t > 0$ における C^∞ 解の構造に関する田原氏の結果 ([Tah84]) を，局所的には，特性指数に条件を付けない場合に拡張することができる．(大域的にはまだ成功していない)．

参考文献

[BG73] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, *Cauchy problems with characteristic initial hypersurface*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 455–475.

[BLP86] A. Bove, J.E. Lewis, and C. Parenti, *Structure properties of solutions of some Fuchsian hyperbolic equations*, Math. Ann. **273** (1986), 553–571.

[GS64] I.M. Gel'fand and G.E. Shilov, *Generalized functions, volume 1 : Properties and operations*, Academic Press, 1964, Transl. by Saletan, E.

[Iga85] K. Igari, *Non-unicité dans le problème de Cauchy caractéristique — cas de type de Fuchs —*, J. Math. Kyoto Univ. **25** (1985), 341–355.

[KO77] M. Kashiwara and T. Oshima, *Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), 145–200.

[Kom76] H. Komatsu, *Irregularity of characteristic elements and construction of null solutions*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), 297–342.

[Man98] T. Mandai, *Existence of distribution null-solutions for every Fuchsian partial differential operator*, to appear in J. Math. Sci., Univ. Tokyo (1998).

[Miz62] S. Mizohata, *Solutions nulles et solutions non analytiques*, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1962), 271–302.

[Sch57] L. Schwartz, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **7** (1957), 1–141.

[Tah78] H. Tahara, *Cauchy problems for Fuchsian hyperbolic partial differential equations*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **54** (1978), 92–96.

[Tah79] H. Tahara, *Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations*, Japan. J. Math. (N.S.) **5** (1979), 245–347.

[Tah80] H. Tahara, *Singular hyperbolic systems, III. on the Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic partial differential equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 465–507.

[Tah84] H. Tahara, *Singular hyperbolic systems, V. asymptotic expansions for Fuchsian hyperbolic partial differential equations*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 449–473.

[Tah89] H. Tahara, *Singular hyperbolic systems, VII. Asymptotic analysis for Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes (2)*, Japan. J. Math. (N.S.) **15** (1989), 275–307.