

# Rough signalでdrivenされた微分方程式に関する T. J. Lyons の理論とその確率微分方程式への応用

京大理 渡辺信三 (Shinzo Watanabe)

1. 確率微分方程式の理論は、与えられた拡散方程式に対応する確率モデル、いわゆる Kolmogorov の拡散過程、を構成するため、伊藤清によって確立された理論であり、今日の確率論において伊藤の確率解析、あるいは確率演算法として重要な方法を提供している。拡散過程を連続な道をもつ強マルコフ過程と考えるとき、その構成法としての確率微分方程式の方法は、Stroock-Varadhan によるマルチンゲール問題の特別の場合であり、マルチンゲール問題の方法に吸収されてしまったとも云い得る。しかし、確率微分方程式の方法は、マルチンゲール問題の方法にない重要な面をもっている。それは、確率微分方程式の解が、Wiener 空間から状態空間上の道の空間への写像を与えていると云う点である。一般に、Wiener 空間上の可測関数や可測写像は、Wiener 汎関数、あるいは Wiener 写像と呼ばれ、確率解析の重要な対象であるが、確率微分方程式の理論はその解を Wiener 汎関数、あるいは Wiener 写像として Wiener 空間上に構成する方法を与える。そして、このようにして得られた Wiener 汎関数や Wiener 写像は特に伊藤汎関数、伊藤写像と呼ばれて、今日の確率論で最も重要な Wiener 汎関数、あるいは Wiener 写像の例となっている。

Wiener 以来、Wiener 汎関数積分の方法について多くの研究が行われ、(たとえば、 $L^2$ -汎関数の Wiener-chaos (Wiener-Itô) 展開、Cameron-Martin, Donsker 等による積分の変換論、Feynmann-Kac の公式、Donsker-Varadhan, Schilder 等による大偏差理論と漸近理論、等々) それは確率論とその応用の問題に有効に応用されるようになる。しかし、Malliavin 解析が導入されるまでは、主として連続な汎関数、すなわち Wiener 空間の Banach 位相 (道の空間の一樣収束の位相) に関し連続であるような Wiener 汎関数が主要な応用の対象であり、伊藤汎関数は一般に不連続な汎関数であるので、それに対してあまり有効に適用されることが無かった。近年の Malliavin 解析等の発展により、伊藤汎関数にも有効に適用される Wiener 汎関数積分の理論が可能になり、応用の可能性も著しく増大したことは、良く知られている通りである。

伊藤汎関数は、Malliavin 解析の意味では (確率微分方程式を与えるデータが十分滑らかな場合) 滑らかな汎関数であるにもかかわらず、一般には連続でない。そのため、伊藤汎関数の取扱には、しばしば慎重さが要求される。特に、これらの汎関数は、Wiener 空間上の関数としては測度 0 の曖昧さを残して一意的に定まるが、1 点は測度 0 であるため、一つ一つの固定された Wiener 空

間の点における値は定まらない。即ち、伊藤汎関数を Wiener 空間の道ごとに定めることは出来ず、したがってその道ごとの取扱は一般に不可能であった。

ところで、約4年前、英国の T. J. Lyons ([L1], [L2], [LQ1], [LQ2]) は、rough signal で driven された微分方程式の概念を定義し、その理論を精力的に展開してきた。その理論の本質的な部分は、L. C. Young ([Y]) が論じた p-th variation をもつ道に関する積分論を発展させた実解析の方法であり、そのこと自身は確率論と無関係なものである。しかしこの理論を確率微分方程式に応用してみると、伊藤汎関数の構造や性質に関する新しい重要な知見が得られる。特に、それは、雑な道 (rough path) の概念を明確に定義することにより、確率微分方程式の道ごとの取扱をあたえる。そして、そのことは、確率微分方程式の知られている諸結果についても、その新しい見方や簡単な別証明、あるいは結果の改良を与えるように思われる。以下で Lyons の結果の簡明で判り易い解説を与え、特に確率微分方程式の近似定理 (たとえば [IW] や [K] に与えられているもの) に関する応用を考えてみたい。確率微分方程式への応用に主眼を置いたため、Lyons の精密かつ一般的理論を、特別な場合に限って筆者のかなり独断的な変更を加えて、紹介していることをお断りしておきたい。

2. 状態空間は一般の多様体でよいが、簡単のため  $\mathbf{R}^d$  上の確率微分方程式

$$dX(t) = \sum_{i=1}^r L_i(X(t)) \circ dw^i(t) + L_0(X(t))dt, \quad X(0) = x \quad (1)$$

を考えよう。ここで

$$L_i : x \in \mathbf{R}^d \mapsto L_i(x) \in \mathbf{R}^d, \quad i = 0, 1, \dots, r$$

は  $\mathbf{R}^d$  上の  $C^\infty$ -vector field で、 $L_i(x) = (L_i^k(x))_{k=1}^d$  とすると、 $L_i^k(x)$  の1階以上の微分はすべて有界とする。 $L_i(x)$  は、しばしば微分作用素

$$L_i(x) = \sum_{k=1}^d L_i^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

と同一視される。任意の固定された  $T > 0$  に対し、 $W_0(\mathbf{R}^r) = \{w \in C([0, T] \rightarrow \mathbf{R}^r) | w(0) = 0\}$ ,  $P$  を  $W_0(\mathbf{R}^r)$  上の Wiener 測度とすると、 $(W_0(\mathbf{R}^r), P)$  は  $r$ -次元 Wiener 空間で、 $w \in W_0(\mathbf{R}^r)$  はその上で canonical に実現された  $r$ -次元 Wiener process となる。 $\circ$  は Stratonovich の意味の確率微分である。確率微分方程式の一般論で (1) の解  $X(t) = X(t; x, w)$  が一意的に存在し、各  $x \in \mathbf{R}^d$  ごとに伊藤写像

$$X^x : w \in W_0(\mathbf{R}^r) \mapsto X(\cdot; x, w) \in W_x(\mathbf{R}^d) := \{w \in C([0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d) | w(0) = x\}$$

が定まる。しかし、この写像はあくまで Wiener 写像、すなわち  $P$ -可測写像 (正確には、互いに  $P$ -a.e. に一致する同値類の元) として定まるのであって、一般には (道の空間の一様収束位相に関

し) 連続な代表元は存在せず、一つ一つの固定された  $w \in W_0(\mathbf{R}^r)$  に対する  $X(\cdot; x, w) \in W_x(\mathbf{R}^d)$  の値を意味付けることは出来ない。

これに対し、確率微分方程式の骨格(skeleton)と云う概念がある。これは、

$$H = \{h \in W_0(\mathbf{R}^r) | t \in [0, T] \mapsto h(t) \in \mathbf{R}^r \text{ は絶対連続、かつ } \dot{h} = \frac{dh}{dt} \in L^2([0, T] \rightarrow \mathbf{R}^r)\}$$

( $H$  のノルムは、 $\|h\|_H = \|\dot{h}\|_{L^2([0, T] \rightarrow \mathbf{R}^r)}$ ) を Cameron-Martin Hilbert subspace とするとき、 $h \in H$  を与えて、(1) の代わりに常微分方程式

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \sum_{i=1}^r L_i(\phi(t)) \cdot \frac{dh^i}{dt} + L_0(\phi(t)), \quad \phi(0) = x \quad (2)$$

を考えたときの一意解  $\phi(t) = \phi(t; x, h)$  のことである。このとき、各  $x \in \mathbf{R}^d$  に対し、写像  $h \in H \mapsto \phi(\cdot; x, h) \in W_x(\mathbf{R}^d)$  が定まり、Banachアフィン空間  $W_x(\mathbf{R}^d)$ -値写像として、連続かつ Fréchet 微分の意味で  $C^\infty$  であることも見易い。 $\phi(t; x, h)$  を  $X(t; x, w)$  の骨格と云うのは、 $X(t; x, w)$  が”ある意味で”  $\phi(t; x, h)$  の  $h$  に  $w$  を代入したものと考えられるからである。例えば、Wong-Zakai による次の定理は、そのことの一つの意味付けと考えられる。

【定理 1】 ([WZ], [SV]) 簡単のため  $T = 1$  とする。 $w \in W_0(\mathbf{R}^r)$  に対し、 $\pi_n(w) \in H$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , をその折線近似:

$$\pi_n(w)(t) = (2^n t - k)w((k+1)2^{-n}) + (k+1 - 2^n t)w(k2^{-n}),$$

$t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ , とするとき、 $W_x(\mathbf{R}^d)$  での確率収束の意味で、

$$\phi(\cdot; x, \pi_n(w)) \rightarrow X(\cdot; x, w), \quad n \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

この定理における  $w \in W_0(\mathbf{R}^r)$  を近似する  $H$ -値 Wiener 汎関数の列  $\pi_n(w)$  の選び方はデリケートであって、単に  $\pi_n(w)$  が  $w$  に、a.a.w で一様収束するだけでは、定理の結論は得られない、([IW] p.484の McShane の例)。このことは、 $W_x(\mathbf{R}^d)$ -値 Wiener 汎関数  $X(t; x, w)$  が、 $w$  の一様収束の位相に関し、連続な変形を持たない (a.e. に一致する同値類の中に連続なものが無い) と云う事実の反映である。このような伊藤汎関数の不連続性をしめす代表例として、Lévy の確率面積がある。確率面積の重要性は、Wong-Zakai の近似定理を一般化した確率微分方程式の近似定理において、既に認識されていた。たとえば、[IW] や「K」における近似定理はラフに云って、 $\pi_n(w)$  の  $w$  への収束の他に、 $\pi_n(w)$  の面積積分の Lévy の確率面積への収束を保証する条件のもとで、 $\phi(\cdot, x, \pi_n(w))$  の  $X(t; x, w)$  への収束が成り立つと云う一般原理の形で述べられている。この一般原理は、以下で紹介する T. J. Lyons の一般論で明解になり、その本質が解明されたと云える。ここでは、まず Lévy の確率面積の示す不連続性を詳しく解析しておこう。

$r \geq 2$  かつ  $d = r(r+1)/2$  とし、 $x \in \mathbf{R}^d$  の座標を  $x = (x^i, x^{(i,j)})_{1 \leq i < j \leq r}$  とかく。  
 $L_0(x) \equiv 0$  かつ  $i = 1, \dots, r$  に対し、

$$L_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j:j < i} \frac{x^j}{2} \frac{\partial}{\partial x^{(j,i)}} - \sum_{j:j > i} \frac{x^j}{2} \frac{\partial}{\partial x^{(i,j)}}$$

と置き、 $r$ -次元 Wiener 空間上で確率微分方程式 (1) を考える。このとき、この初期値  $x = 0$  に対する解  $X(t; 0, w)$  は  $X(t; 0, w) = (w^i(t), S^{(i,j)}(t, w))$ 、ただし

$$S^{(i,j)}(t, w) = \frac{1}{2} \int_0^t w^i(s) \circ dw^j(s) - w^j(s) \circ dw^i(s), \quad i < j \quad (3)$$

で与えられる。 $S^{(i,j)}(t, w)$  達を、Lévy の確率面積という。 $S^{(i,j)}(t, w)$  の骨格は、通常的面積積分

$$S^{(i,j)}(t, h) = \frac{1}{2} \int_0^t [h^i(s) \dot{h}^j(s) - h^j(s) \dot{h}^i(s)] ds, \quad i < j, \quad h \in H \quad (4)$$

で与えられる。 $S^{(i,j)}(t, h)$  は、 $t$  を固定して  $\mathbf{R}$ -値の関数と考えると、あるいは  $t$  を動かして  $W_0(\mathbf{R})$ -値の関数と考えると、 $h$  について  $H$  上で連続であり、Fréchet の意味で  $C^\infty$  であることは容易に判るが、 $h$  に最大値ノルム  $\|h\|_\infty = \max_{0 \leq s \leq t} |h(s)|$  を与えたとき、このノルムに関して決して連続でないことも見易い。この点に関し、杉田([S])はもっと強い主張として、 $S^{(i,j)}(t, h)$  は、Wiener 測度を許容する任意の  $H$  上のノルムにかんしても、決して連続でないことを示した。ここで Wiener 測度を許容する  $H$  上のノルムとは、L. Gross の意味の可測ノルム([G]), すなわち  $H$  をそのノルムで完備化して得られる Banach 空間を  $B$  とするとき、 $B$  に Wiener 測度 1 がのっていること、別の言葉でいうと、 $B$  上に Borel 確率測度  $\mu$  が存在し、三つ組  $(B, H, \mu)$  が Gross の意味で抽象 Wiener 空間になるということである。Wiener 空間  $(W_0(\mathbf{R}^r), H, P)$  はそれ自身一つの抽象 Wiener 空間であるが、Wiener 測度の実現はこれに限る訳では無い。より強いノルム (たとえば、 $\alpha$ -Hölder norm ( $\alpha < 1/2$ )) による抽象 Wiener 空間の方が、より精密な実現であり、 $H$  上の関数もより連続になりやすい。特に、 $S^{(i,j)}(t, h)$  も、あるより精密な抽象 Wiener 空間では連続になるかもしれない。しかし、杉田の結果は、そうなることはない； Lévy の確率面積はその意味で Wiener 測度に関し”本質的”に不連続だ、ということを主張している。杉田の結果を正確に理解するために、抽象 Wiener 空間に関する次の基本的事実を注意しておく。

1.  $(W_0(\mathbf{R}^r), H, P)$  を Wiener 空間、 $(B, H, \mu)$  を、(Cameron-Martin-空間  $H$  を共有する) 一つの抽象 Wiener 空間とすると、それぞれの空間の  $P$ -可測関数 (の同値類) と  $\mu$ -可測関数 (の同値類) との間に、次の性質を満たす 1 対 1 対応が一意的に存在する。

- (i)  $h \in H$  に対応する 1 次の Wiener chaos  $h(w) \in L^2(W_0(\mathbf{R}^r), P)$  と  $h(x) \in L^2(B, \mu)$  が対応する。

- (ii)  $h_1, \dots, h_n \in H$  と  $\mathbf{R}^n$  上の連続関数  $f(x_1, \dots, x_n)$  に対し、 $f(h_1(w), \dots, h_n(w))$  と  $f(h_1(x), \dots, h_n(x))$  が対応する。
- (iii)  $F_n(w)$  と  $\tilde{F}_n(x)$  が対応し、確率収束の意味で  $F_n(w) \rightarrow F(w)$  かつ  $\tilde{F}_n(x) \rightarrow \tilde{F}(x)$  となるとき、 $F(w)$  と  $\tilde{F}(x)$  が対応する。

以後、この対応によって対応する  $F$  と  $\tilde{F}$  は同じ Wiener 汎関数のそれぞれの空間上での表現と考え、区別しない。

2. Cameron-Martin空間  $H$  上の関数  $\Phi(h)$  について、次のことは同値である。

- (i) ある抽象 Wiener 空間  $(B, H, \mu)$  があって、 $\Phi(h)$  は  $H$  上の  $B$  の相対位相で連続。
- (ii) ある抽象 Wiener 空間  $(B, H, \mu)$  と、 $B$  上の連続関数  $F(x)$  があって、 $F|_H = \Phi$  となる。

((ii)なら同じ  $(B, H, \mu)$  で(i)が成り立つが、(i)なら  $(B, H, \mu)$  にコンパクトに埋め込まれた抽象 Wiener 空間  $(B', H, \mu')$  上で  $\Phi$  の連続拡張が存在する.)

杉田の結果を定理として述べると次のようになる。

【定理 2】

- (1)  $(B, H, \mu)$  を任意の抽象 Wiener 空間とすると、 $S^{(i,j)}(t, h)$  は、( $t$  を固定して  $\mathbf{R}$ -値の関数と考えても、あるいは  $t$  を動かして  $W_0(\mathbf{R})$ -値の関数と考えても、)  $H$  上の  $B$  の相対位相で連続でない。このことは、上の注意 2 より、 $S^{(i,j)}(t, h)$  は抽象 Wiener 空間  $(B, H, \mu)$  上で連続拡張を持たない といっても同じことである。
- (2) 任意の抽象 Wiener 空間  $(B, H, \mu)$  を考えるとき、上の注意 1 によって Lévy の確率面積  $S^{(i,j)}(t, w)$  に対応する  $B$  上の  $\mu$ -可測関数 (の同値類)  $S^{(i,j)}(t, x)$  は、( $t$  を固定して  $\mathbf{R}$ -値の関数と考えても、あるいは  $t$  を動かして  $W_0(\mathbf{R})$ -値の関数と考えても、)  $B$  上連続な変形を持たない。

証明の概略は次のようである。簡単のため  $r = 2$  で  $\Phi := S^{(1,2)}(1, h)$  の場合を考える。 $H$  上の対称な Hilbert-Schmidt 作用素  $A$  が定まって、 $\Phi(h) = (Ah, h)_H$  となる。 $A$  の固有値、固有関数も (式は省略するが) 具体的に求まり、それらを  $\lambda_k, e_k(t), k = 1, 2, \dots$  とするとき、基本的なことは、 $\sum_k |\lambda_k| = \infty$ , 即ち  $A$  は、Hilbert-Schmidtではあるが、トレースクラスではないと云う事実である。しかも、今の場合は、固有値を並び変えると、 $\sum_{k=1}^n \lambda_k$  は任意の値に近づきうる。

$(B, H, \mu)$  を任意の抽象 Wiener 空間とする。 $e_k \in H$  に対する 1 次の Wiener chaos を  $e_k(x)$  とし、

$$\pi_n(x) = \sum_{k=1}^n e_k(x) e_k \in H, \quad n = 1, 2, \dots$$

とおくと、伊藤-西尾の定理([IN])より、 $n \rightarrow \infty$  のとき、 $\mu$ -a.a. $x$  に対し  $B$  の位相で  $\pi_n(x) \rightarrow x$  となり、このことは固有関数  $\{e_k(t)\}$  の並べ方に無関係に成り立つ。もし  $\Phi(h)$  が  $B$  上で連続拡張  $F(x)$  を持つならば、 $\Phi(\pi_n(x)) = F(\pi_n(x)) \rightarrow F(x)$  となるが、

$$\begin{aligned}\Phi(\pi_n(x)) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k(x)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k(x)^2 - 1) + \sum_{k=1}^n \lambda_k\end{aligned}$$

この右辺の第一項は、固有関数の並べ方に無関係に、 $B$  上での確率面積の実現

$$S^{(1,2)}(1, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e_k(x)^2 - 1)$$

へ収束する。第二項は並べ方を変えると勝手な値に近づくから、これは矛盾である。したがって、 $\Phi(h)$  は  $B$  上で連続拡張  $F(x)$  を持つことはない。

(2) の証明：抽象 Wiener 空間  $(B, H, \mu)$  上で、 $S^{(1,2)}(1, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e_k(x)^2 - 1)$  と  $\mu$ -a.a. $x$  で一致する連続関数  $F(x)$  が存在したとする。このとき、

$$F(x+h) - F(x) = 2\bar{h}(x) + (Ah, h)_H, \quad h \in H, \mu - a.a. x \in B$$

が成り立つことが、容易に示せる。ここで、 $\bar{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e_k, h)_H \cdot e_k \in H$ 。これより、1次の Wiener chaos  $\bar{h}(x)$  は、 $B$  上で連続変形をもつが、そうすると  $\bar{h} \in B' := B$  の共役、となることが知られている。すると  $x=0$  と置いて、

$$F(h) - F(0) = (Ah, h)_H$$

となるが、これは  $\Phi(h) = (Ah, h)_H$  が  $B$  上に連続拡張  $F(x) - F(0)$  をもつことを意味し、(1) と矛盾する。

3.  $r \geq 2$  かつ  $d = r(r+1)/2$  とし、

$$H_r (\cong \mathbf{R}^d \cong \mathbf{R}^r \times so(d)) := \{x = (x^i, x^{(i,j)}) | 1 \leq i < j \leq r\}$$

と置き、これに群演算を次のように定義する： $x = (x^i, x^{(i,j)})$ ,  $y = (y^i, y^{(i,j)})$  に対し  $x \cdot y := z = (z^i, z^{(i,j)})$ , ここで、

$$z^i = x^i + y^i, \quad z^{(i,j)} = x^{(i,j)} + y^{(i,j)} + \frac{1}{2}(x^i y^j - x^j y^i).$$

このとき  $H_r$  は、 $0 = (0, 0)$  を単位元とするべき零リ一群になり、これを、 $r$ -生成元、ステップ2の自由べき零リ一群という。 $r=2$  のときは、特に Heisenberg 群という。 $T > 0$  を任意に固定し、

$$D(T) = \{(s, t) | 0 \leq s \leq t \leq T\}$$

と置き、次の空間を導入する。

$$\begin{aligned}\Omega_2(\mathbf{R}^r) &= \{\omega = (\omega(s, t)) : D(T) \rightarrow H_r \mid \text{連続かつ} \\ &\quad 0 \leq s \leq t \leq u \leq T \text{ に対し } \omega(s, t) \cdot \omega(t, u) = \omega(s, u)\}\end{aligned}$$

【例1】  $H$  上に、 $\Omega_2(\mathbf{R}^r)$ -値関数  $\omega[h] = (\omega[h](s, t))$ ,  $h \in H$ , が、

$$\omega[h](s, t) = (h^i(t) - h^i(s), S^{(i,j)}(s, t; h)) \in \Omega_2(\mathbf{R}^r),$$

によって、定まる。ここで

$$\begin{aligned}S^{(i,j)}(s, t; h) &= \frac{1}{2} \int \int_{s \leq t_1 \leq t_2 \leq t} [\dot{h}^i(t_1) \dot{h}^j(t_2) - \dot{h}^j(t_1) \dot{h}^i(t_2)] dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_s^t \{[h^i(\tau) - h^i(s)] \dot{h}^j(\tau) - [h^j(\tau) - h^j(s)] \dot{h}^i(\tau)\} d\tau.\end{aligned}$$

【例2】  $r$ -次元 Wiener 空間  $(W_0(\mathbf{R}^r), H, P)$  上に  $\Omega_2(\mathbf{R}^r)$ -値 Wiener 汎関数  $\omega[w] = (\omega[w](s, t))$  が、次の様に定まる：

$$\omega[w](s, t) = (w^i(t) - w^i(s), S^{(i,j)}(s, t; w)) \in \Omega_2(\mathbf{R}^r),$$

ここで

$$\begin{aligned}S^{(i,j)}(s, t; w) &= \frac{1}{2} \int \int_{s \leq t_1 \leq t_2 \leq t} [\circ dw^i(t_1) \circ dw^j(t_2) - \circ dw^j(t_1) \circ dw^i(t_2)] \\ &= \frac{1}{2} \int_s^t [w^i(\tau) - w^i(s)] \circ dw^j(\tau) - [w^j(\tau) - w^j(s)] \circ dw^i(\tau).\end{aligned}$$

【例3】  $c = (c_{ij}) \in so(r)$  とする。例2において  $\omega[w]$  の代わりに

$$\omega_c[w](s, t) = (w^i(t) - w^i(s), S^{(i,j)}(s, t; w) + c_{ij}(t - s)) \in \Omega_2(\mathbf{R}^r)$$

としたものも、 $\Omega_2(\mathbf{R}^r)$ -値 Wiener 汎関数である。

特に、 $S^{(i,j)}(0, t; h)$  や  $S^{(i,j)}(0, t; w)$  は、前に定義された  $S^{(i,j)}(t; h)$  や  $S^{(i,j)}(t; w)$  と一致する。 $2 < p < 3$  とする。  $x = (x^i, x^{(i,j)}) \in H_r$  に対し  $x^{(1)} = (x^i) \in \mathbf{R}^r$ ,  $x^{(2)} = (x^{(i,j)}) \in so(d)$  と表わす。  $\omega = (\omega(s, t))$ ,  $\theta = (\theta(s, t)) \in \Omega_2(\mathbf{R}^r)$  に対し、

$$d^{(p)}(\omega, \theta) = \sup_{0 \leq s < t \leq T} \left\{ \frac{|\omega^{(1)}(s, t) - \theta^{(1)}(s, t)|}{|t - s|^{1/p}} + \frac{|\omega^{(2)}(s, t) - \theta^{(2)}(s, t)|}{|t - s|^{2/p}} \right\}$$

と定義する。

$$\Omega_2^{(p)}(\mathbf{R}^r) = \{\omega \in \Omega_2(\mathbf{R}^r) \mid d^{(p)}(0, \omega) < \infty\}$$

と置くと、 $\Omega_2^{(p)}(\mathbf{R}^r)$  は、距離  $d^{(p)}$  に関し、完備な距離空間となる。 $2 < p < p' < 3$  のとき、 $\Omega_2^{(p)}(\mathbf{R}^r) \subset \Omega_2^{(p')}(\mathbf{R}^r)$  であり、埋め込みは連続かつコンパクトである。例 2 の  $\Omega_2(\mathbf{R}^r)$ -値 Wiener 汎関数  $\omega[w]$  については、次の命題が成り立つ。

【命題】 例 2 の  $\Omega_2(\mathbf{R}^r)$ -値 Wiener 汎関数  $\omega[w]$  は、任意の  $2 < p < 3$  に対し、 $\Omega_2^{(p)}(\mathbf{R}^r)$ -値 Wiener 汎関数である。例 3 の  $\omega_c[w]$  に関しても、同様である。

証明は、 $\omega^{(1)}$  の部分については、よく知られていることである。 $\omega^{(2)}$  の部分についても、2 次 Wiener chaos だから、 $n = 1, 2, \dots$  に対してモーメント評価

$$E[|\omega^{(2)}(s, t)|^m] \leq K|t - s|^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

がすぐ得られ、それから Kolmogorov-Prohorov 連続性定理の証明と同様の評価を行って示せる。

T. Lyons の基本定理は次のように述べることができる。上で与えた確率微分方程式 (1) の解  $X(t; x, w)$  とその骨格、即ち常微分方程式 (2) の解  $\phi(t; x, h)$  を考える。Cameron-Martin 空間  $H$  上に、距離  $d_H^{(p)}(h, g)$ ,  $h, g \in H$  を

$$d_H^{(p)}(h, g) = d^{(p)}(\omega[h], \omega[g])$$

によって、定める。ここで  $\omega[h]$  は、例 1 で定義されたものである。

【定理 3】 ([L2])

(1) 任意の  $2 < p < 3$  に対し、 $\phi(\cdot; x, h)$  は (Banach アフィン空間  $W_x(\mathbf{R}^d)$ -値写像と考えて)  $h \in H$  の距離  $d_H^{(p)}$  に関する連続関数である。

(2)

$$\Omega_2^{(3)-}(\mathbf{R}^r) = \bigcup_{2 < p < 3} \Omega_2^{(p)}(\mathbf{R}^r)$$

と置く。 $x \in \mathbf{R}^d$  を与えると、写像  $F_x$  :

$$F_x : \omega \in \Omega_2^{(3)-}(\mathbf{R}^r) \mapsto F_x(\omega) \in W_x(\mathbf{R}^d)$$

が存在して、すべての  $2 < p < 3$  に対し、この写像の  $\Omega_2^{(p)}(\mathbf{R}^r)$  への制限は、距離  $d^{(p)}$  に関して連続、かつ

$$F_x(\omega[h]) = \phi(\cdot; x, h), \quad h \in H$$

となる。このような写像  $F_x$  は一意的に定まる。

- (3) 上の命題より、例2の  $\omega[w]$  は、 $\Omega_2^{(3)-}(\mathbf{R}^r)$ -値 Wiener 汎関数であるが、 $P-a.a.w \in W_0(\mathbf{R}^r)$  に対し

$$F_x(\omega[w]) = X(\cdot; x, w)$$

が成り立つ。もっと一般に、例3の  $\omega_c[w]$  に対し、

$$F_x(\omega_c[w]) = X_c(\cdot; x, w)$$

が成立する。ここで  $X_c$  は、確率微分方程式 (1) で、 $L_0(x)$  を

$$L_0(x) + \sum_{1 \leq i < j \leq r} c_{ij}[L_i, L_j](x)$$

で置き換えたものの解を表わす。

この定理は、ラフに云って、伊藤汎関数  $X(\cdot; x, w)$  は、Wiener path  $w = (w^i)$  と、その確率面積  $S(t, w) = (S^{(i,j)}(t, w))$  をペアーにした Wiener 汎関数  $[w, S(\cdot, w)]$  の連続関数であることを主張する。実際、Lyons は、 $\Omega_2(\mathbf{R}^r)$  の元  $\omega$  を (order 2) の rough path と呼び、 $2 < p < 3$  となる  $p$  を固定して、一つの rough path  $\omega \in \Omega_2^{(p)}(\mathbf{R}^r)$  を与えたとき、 $\omega$  で driven された”微分方程式”

$$\frac{d\xi}{dt}(t) = \sum_{i=1}^r L_i(\xi(t)) \cdot \frac{d\omega^i}{dt} + L_0(\xi(t)) \quad (5)$$

の概念を定義し、その”解”を実際に構成して、それを  $F_x(\omega)$  と定義した。(この方程式は、見かけ上は、 $\omega$  の  $\omega^{(1)} = (\omega^i)$  の部分のみに関係しているが、実は方程式の定義により  $\omega^{(2)} = (\omega^{(i,j)})$  の部分にも関係しているのである。) これは、本当に一つの rough path  $\omega$  をあたえて展開される議論であるので、確率論と無関係な実解析の世界であり、その意味で完全に道ごとの取扱でもある。Lyons の議論は、rough path を一つ与えて、次のようなステップで展開される。

- (i) まず、その path の iterated integral を path の multiplicative functional として定義する。ここでは、K. T. Chen ([C]) による iterated integral の代数的考察が一つの鍵となり、道の  $p$ -th variation の解析が基本となる。
- (ii) multiplicative functional を一般化した almost multiplicative functional の概念を導入し、その応用として 1-form の rough path による line integral を定義する。
- (iii) 1-form の rough path による line integral を用いて、方程式 (5) の定義を与え、その解の構成を Picard の逐次近似の方法で行う。

最後に、確率微分方程式の近似定理への応用について、考えてみよう。Lyons の定理よりただちに従うこととして

【定理 4】  $W_0(\mathbf{R}^r)$  上の  $H$ -値 Wiener 汎関数の列  $\pi_n(w)$  が Wiener path  $w$  の次の意味の近似：  
ある  $2 < p < 3$  に対し、 $(\omega[\pi_n(w)], \omega[w])$  は、例 1、例 2 で各々定義して

$$d^{(p)}(\omega[\pi_n(w)], \omega[w]) \rightarrow 0, \quad \text{in prob.}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

であるとき、

$$\phi(\cdot; x, \pi_n(w)) \rightarrow X(\cdot; x, w) \quad \text{in } W_x(\mathbf{R}^d), \quad \text{in prob.}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

もっと一般に、 $\omega[w]$  を例 3 の  $\omega_c[w]$  で置き換えたとき、結論 (7) は、解  $X$  を  $X_c$  で置き換えて成立する。

これは [IW] や [K] にある近似定理を、ある意味で、非常に一般的に述べた定理であり、実際 [IW] や [K] の定理に含まれない多くの場合をカバーしているものと思われる。例として、 $\pi_n(w) \in H$  が、 $H$  の正規直交基底 (ONB)  $\{e_n(t), n = 1, 2, \dots\}$  より、

$$\pi_n(w) = \sum_{k=1}^n e_k(w) \cdot e_k$$

と与えられている場合を考えよう。ここで、 $e_k(w)$  は  $e_k$  に対応する 1 次の Wiener chaos、即ち次の Wiener integral である：

$$e_k(w) = \sum_{i=1}^r \int_0^1 \dot{e}_k^i(t) dw^i(t).$$

(いま、簡単のため、 $T = 1$  としている。)

まず、伊藤-西尾の定理 ([IN]) より、 $2 < p < 3$  に対し、a.a.- $w$  で

$$\|\pi_n(w) - w\|_p := \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|(\pi_n(w) - w)(t) - (\pi_n(w) - w)(s)|}{|t - s|^{1/p}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

となる。

次に、 $1 \leq i < j \leq r$  となる  $i, j$  に対し、

$$\begin{aligned} & S^{(i,j)}(s, t; \pi_n(w)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (e_k(w) e_l(w) - \delta_{kl}) \left[ \int_s^t \dot{e}_k^i(u) du \int_s^u \dot{e}_l^j(v) dv - \int_s^t \dot{e}_k^j(u) du \int_s^u \dot{e}_l^i(v) dv \right] \\ &+ \sum_{k=1}^n \left[ \int_s^t \dot{e}_k^i(u) du \int_s^u \dot{e}_k^j(v) dv - \int_s^t \dot{e}_k^j(u) du \int_s^u \dot{e}_k^i(v) dv \right] \\ &: = I_1^{(n)}(s, t) + I_2^{(n)}(s, t) \end{aligned}$$

となる。第1項については、

$$\|I_1^{(n)}(\cdot, \cdot) - S^{(i,j)}(\cdot, \cdot; w)\|_{p/2} := \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|I_1^{(n)}(s, t) - S^{(i,j)}(s, t)|}{|t - s|^{2/p}} \rightarrow 0, \quad \text{in prob.}, \quad n \rightarrow \infty$$

となることが示せる。このことは、 $(e_k(w)e_l(w) - \delta_{kl})$ ,  $k, l = 1, 2, \dots$  が2次の Wiener chaos の空間  $\mathcal{C}^2$  での直交基底であることに注意すれば、 $n$  について一様なモーメント評価が得られ、Kolmogorov-Prohorov 型の評価を行なうことにより従う。詳細は省略する。我々は、 $\omega[\pi_n(w)]$  の  $\Omega_2^{(p)}(\mathbf{R}^r)$  における極限点が知りたい訳だが、このためには、deterministic な第2項：

$$I_2^{(n)}(s, t) = \sum_{k=1}^n \left[ \int_s^t \dot{e}_k^i(u) du \int_s^u \dot{e}_k^j(v) dv - \int_s^t \dot{e}_k^j(u) du \int_s^u \dot{e}_k^i(v) dv \right]$$

の  $n \rightarrow \infty$  のときの挙動を、解析すればよいことが判った。特に、定理4の前提(6)が成り立つためには、次の条件(8)が云えればよい：

$$\|I_2^{(n)}(\cdot, \cdot)\|_{p/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

従って、 $I_2^{(n)}(s, t)$  に対する条件(8)が成り立つときは、定理(4)の結論(7)が導かれることが判った。

条件(8)が、自明に確かめられる例として、次の場合がある。 $L^2([0, 1] \rightarrow \mathbf{R})$  の ONB  $\{f_n(u)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  より、

$$f_{n,i}(u) = (f_{n,i}(u)^j)_{j=1}^r \in L^2([0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^r), \quad i = 1, \dots, r, \quad n = 1, \dots,$$

を、

$$f_{n,i}(u)^j = \delta_{ij} f_n(u), \quad j = 1, \dots, r$$

で定めるとき、 $\{f_{n,i}(u)\}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $n = 1, \dots$ , は  $L^2([0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^r)$  の ONB となるが、 $H$  の ONB  $\{e_k\}$  が、 $\dot{e}_k(u) = \{f_{n,i}(u)\}$  として与えられる場合には、 $I_2^{(n)} \equiv 0$  となることは明らかである。従って、このような  $\{e_k\}$  の場合に条件(8)が成り立ち、結局、この場合には、定理(4)が成り立つ。定理1の折線近似は、その典型的な例であり、それは  $\{f_n(u)\}$  として Haar 関数系を取った場合である。

## References

- [C] K. T. Chen, Integration of paths, - A faithful representation of path by noncommutative formal power series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **89**(1958), 395-407
- [G] L. Gross. Abstract Wiener space, *Proc. Fifth. Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. II*, Univ. California Press(1967), 31-42

- [IW] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, Second Edition, North-Holland/Kodansha, 1988
- [IN] K. Itô and M. Nisio, On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables, *Osaka J. Math.*, **5** (1968), 35-48
- [K] H. Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge Univ. Press, 1990
- [L1] T. J. Lyons, The interpretation and solution of ordinary differential equations driven by rough signals, *Stochastic Analysis*, Proc. Symp. Pure Math. **57**, Amer. Math. Soc.(1995), 115-128
- [L2] T. J. Lyons, Differential equations driven by rough signals,(1995), preprint
- [LQ1] T. J. Lyons and Z. M. Qian, Calculus for multiplicative functionals, Itô's formula and differential equations, *Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory*, Springer(1997), 233-250
- [LQ2] T. J. Lyons and Z. M. Qian, Calculus of variations for multiplicative functionals, *New Trends in Stochastic Analysis*, World Scientific(1997), 348-374
- [SV] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, in *Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. III*, Univ. California Press(1972), 351-368
- [S] H. Sugita, Hu-Meyer's multiple Stratonovich integral and essential continuity of multiple Wiener integral, *Bull. Sci. math.(2)*, **113**(1989), 463-474
- [WZ] E. Wong and M. Zakai, On the relation between ordinary and stochastic differential equations, *Intern. J. Engng. Sci.*, **3**(1965),
- [Y] L. C. Young, An inequality of Hölder type, connected with Stieltjes integration, *Acta Math.* **67**(1936), 251-282