数理解析研究所講究録
1041 巻 1998 年 39-43

k-コータリの graph-nondominatedness について

原田 隆
Takashi HARADA
広島大学総合情報処理センター
haradat@ipc.hiroshima-u.ac.jp

山下 雅史
Masafumi YAMASHITA
広島大学工学部第二類
mak@se.hiroshima-u.ac.jp

1 はじめに

1つまたは複数の共有資源に対して，高々k個のプロセスが同時にアクセスするように制御する問題は，k-相互排除問題と呼ばれる．k-コータリとはk-相互排除アルゴリズムが用いる情報構造であり，基本的には，1)k個の互いに交わらない要素が存在する，2)$k+1$個以上の互いに交わらない要素が存在しない，という性質を満たす要素，ここでk-コータリの要素とはプロセスの集合でありコーラムと呼ばれる，の集合である [FYA91, HJK93].

分散システムのトポロジーがグラフ G で表されるとき，可用度や通信コストなど k-相互排除アルゴリズムの性能は，k-コータリがグラフ G 上にどのようにマッピングされるかに大きく依存する．茨木らは G-支配性 (G-dominatedness) という概念を導入し，Gがリングおよび木の場合における最大の可用度を持つ1-コータリの特徴づけを行なった [INK95]. 1-コータリ $\mathcal{C}$ が 1-コータリ $\mathcal{D}$ を G-支配するならば，$\mathcal{C}$ を用いる相互排除アルゴリズムの可用度は $\mathcal{D}$ を用いるものよりも等しいか大きくなることが保証される．いかなる他の 1-コータリから G-支配されない 1-コータリは G-ND(G-nondominated) というクラスに分類され，G-ND コータリは可用度が極大であるという点で重要なクラスである．

我々はこれまで任意の 1-コータリが G-ND であるための必要十分条件など，G-ND コータリの特徴づけを行なってきた [HY97]. 本稿では G-支配性の概念を k-コータリに適用し，その性質について考察する．まず，k-コータリを他の k-コータリに変換する手法を導入し，その手法を用いて，ある仮定を満たすk-コータリが G-ND であるための必要十分条件を示す.

2 定義

分散システムを連結無向グラフ $G=(V,E)$ としてモデル化する．G の各頂点 $v_i \in V$ は分散システムを構成するプロセス（またはノード），各辺 $e_k=(v_i,v_j)\in E$ はプロセス v_iと v_j間の通信リンクを表すものとする．以下に k-コータリの定義を以下に示す [FYA91, HJK93].

定義 1 V を頂点の全体集合とする．以下の式を満たす V の非空な部分集合の集合 $\mathcal{C}_k$を V 上の k-コータリ (*k-coterie*) という.

(i) (Minimality) $\mathcal{C}_k$の任意の 2 つの要素 P,Q に対し，$P \not\subset Q$,

(ii) (Intersection Property) 互いに交わらない k 個の $\mathcal{C}_k$の要素が存在し，かつ，$\mathcal{C}_k$の任意の $k+1$ 個の要素 $Q_1,\ldots,Q_{k+1}$に対し，$Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$ であるような Q_i,Q_j ($i \neq j$ かつ $1 \leq i,j \leq k+1$) が存在する.

k-コータリ $\mathcal{C}_k$の要素はコーラム (*quorum*) と呼ばれる. □

定義 2 $\mathcal{C}_k$を V の非空な部分集合の集合とする．$\mathcal{C}_k$が定義 1の式 (i),(ii) および以下の式 (iii) を満たすならば，$\mathcal{C}_k$ は V 上の真 k-コータリ (*proper k-coterie*) と呼ばれる.

(iii) (Nonintersection Property) 互いに交わらない h 個 ($1 \leq h < k$) の $\mathcal{C}_k$のコーラム $Q_1,\ldots,Q_h$に対し，すべての i ($1 \leq i \leq h$) に対して $Q \cap Q_i = \emptyset$ であるようなコーラム $Q \in \mathcal{C}_k$が存在する.

□

ここで，k-コータリを用いた相互排除アルゴリズムの概略を述べる．臨界領域に入ろうとするプロセス (頂点) は，いずれかのコーラムに属するすべてのプロセスから許可を得なければならない．許可を与えたプロセスはその許可が戻るまで別のプロセスに許可を与えないようにすれば，k-コータリの Intersection Property により同時に臨界領域に進むプロセスの数が高々k であることが保証される．さらに k-コータリが Nonintersection Property を満たす (すなわち真 k-コータリ) ならば，常に k 個のプロセスが同時に臨界領域に進むことが保証される．

2つの 1-コータリ間の関係である支配 (*domination*) という概念は Garcia-Molina らにより導入されたが [GMB85], Neilsen らはこの概念を k-コータリに適用し，任意の k-コータリが他の k-コータリから支配されるための必要十分条件を導いた [NM94]．以下にその定義を示す．

定義 3 $\mathcal{C}_k$と $\mathcal{D}_k$を V 上の k-コータリとする．$\mathcal{C}_k \neq \mathcal{D}_k$，かつ，任意の $P \in \mathcal{D}_k$に対して $Q \subseteq P$ であるような $Q \in \mathcal{C}_k$が存在するとき，$\mathcal{C}_k$は $\mathcal{D}_k$を支配する (*dominate*) という．他のいかなる k-コータリにより支配されない k-コータリは，ND k-コータリ (*nondominated k-coterie*) と呼ばれる． □

グラフ G における k-コータリ $\mathcal{C}_k$の可用度とは，G の各頂点あるいは各辺に稼働確率 (operating probability) が与えられたとき，少なくとも 1 つの頂点が臨界領域に進むことのできる確率である．定義 3より，k-コータリ $\mathcal{C}_k$が $\mathcal{D}_k$を支配するならば，$\mathcal{C}_k$の可用度は $\mathcal{D}_k$よりも常に等しいか高くなることが保証される．なぜならば，ある頂点が $\mathcal{D}_k$のあるコーラム Q に属するすべての頂点から許可を得ることに成功したとすると，$\mathcal{C}_k$のコーラム Q' ($Q' \subseteq Q$) に属するすべての頂点から許可を得ることが可能だからである．

定義 3は G が完全グラフの場合，可用度の高い k-コータリを設計するための指標となり得るが，G が非完全結合の場合には，それらのみでは連結成分を形成できない頂点集合が存在し，その影響を反映させることはできない．このため茨木らは G-支配という概念を提案し，木およびリング型ネットワークでの 1-コータリの可用度に関する解析を行なった [INK95]．1-コータリに対する G-支配という概念はそのまま k-コータリに適用することが可能であり，以下にその定義を示す．

定義 4 $G = (V, E)$ をグラフ，$\mathcal{C}_k$を V 上の k-コータリとする．ある $Q \in \mathcal{C}_k$に対して $Q \subseteq V_H$であるような G のすべての連結極小部分グラフ $H = (V_H, E_H)$ の集合を $\mathcal{H}_G(\mathcal{C}_k)$ で示す．ここで H が極小とは，いかなる H の真部分グラフも上の条件を満たさないことを意味する．それゆえ $\mathcal{H}_G(\mathcal{C}_k)$ は G の部分木の集合である．

$\mathcal{H}_G(\mathcal{C}_k)$ に属する木のうち，その真部分木もまた $\mathcal{H}_G(\mathcal{C}_k)$ に属しているような木を $\mathcal{H}_G(\mathcal{C}_k)$ から取り除いた結果得られる集合 ($\mathcal{H}_G(\mathcal{C}_k)$ の部分集合) を $\mathcal{H}^*_G(\mathcal{C}_k)$ で示す．ならば $\mathcal{H}^*_G(\mathcal{C}_k)$ に属する任意の相異なる 2 つの木 F, H に対し，F が H の部分グラフである，という関係は成り立たない．この性質を $\mathcal{H}^*_G(\mathcal{C}_k)$ の Minimality と呼ぶ． □

定義 5 $G = (V, E)$ をグラフ，$\mathcal{C}_k$と $\mathcal{D}_k$を V 上の 2 つの k-コータリとする．$\mathcal{H}^*_G(\mathcal{C}_k) \neq \mathcal{H}^*_G(\mathcal{D}_k)$，かつ任意の $F \in \mathcal{H}^*_G(\mathcal{D}_k)$ に対して H が F の部分木であるような $H \in \mathcal{H}^*_G(\mathcal{C}_k)$ が存在するとき，$\mathcal{C}_k$は $\mathcal{D}_k$を G-支配する (*G-dominate*) という．また，他のいかなる k-コータリにより G-支配されない k-コータリは，G-ND k-コータリ (*G-nondominated k-coterie*) と呼ばれる． □

$\mathcal{H}_G(\mathcal{C}_k)$ の各要素は $\mathcal{C}_k$のある 1 つのコーラムを含む極小な連結成分であり，$\mathcal{C}_k$が $\mathcal{D}_k$を G-支配するならば，$\mathcal{C}_k$の可用度は $\mathcal{D}_k$の可用度より常に等しいか高くなることが保証される．

本節の最後に，以下で用いる記法を説明する．$\mathcal{Q}$ を頂点の全体集合 V の非空な部分集合の集合としたとき，$\mathcal{Q}$ に属する要素のうち，その真部分集合もまた $\mathcal{Q}$ に属しているような要素を $\mathcal{Q}$ から取り除いた結果得られる集合を $MinSet(\mathcal{Q})$ で示す．ある $Q \in \mathcal{Q}$ に対し，$Q \subseteq R$ であるような V のすべての部分集合 R の集合を $MaxSet(V, \mathcal{Q})$ で示す．V の任意の部分集合 S による G の誘導部分グラフを $G_{|S}$で表す，すなわち $G_{|S} = (S, (S \times S) \cap E)$ である．

3 k-コータリの変換

本節では与えられた k-コータリを変換し，別の k-コータリを構成するための手続きを提案する．手続きの定義を以下に示す．

Procedure: TRANS
Input: V: universal set of vertices; $\mathcal{C}_k$: k-coterie; S: subset of V
Output: k-coterie

Step 1 Let $\mathcal{D} = MinSet(\mathcal{C}_k \cup \{S\})$.
Step 2 If there exists k disjoint $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{D}$ such that $Q_1 \cup \ldots \cup Q_k \subseteq \overline{S}$, then arbitrarily select a Q_i $(1 \leq i \leq k)$, and let $\mathcal{D} = MinSet(MaxSet(\mathcal{D}) - \{Q\})$, and return to Step 2; otherwise, output $\mathcal{D}$ and exit.

手続き TRANS の基本的な流れは，1)V の任意の部分集合 S を k-コータリ $\mathcal{C}_k$に加えることにより $\mathcal{D}$ を作成し，2)$\mathcal{D}$ が k-コータリでなくなる，すなわち $k+1$ 個の互いに交わらない要素が存在すれば，それが k 個になるまで S の補集合内の要素を 1 つずつ削除する，というものである．S が $\mathcal{C}_k$のあるコーラムを部分集合として含むならば手続き TRANS は $\mathcal{C}_k$を出力し，そうでなければ，S をコーラムとして含む $\mathcal{C}_k$とは異なる k-コータリを出力する．以下に手続き TRANS が k-コータリを出力することを示す．

補題 1 $\mathcal{C}_k$を V 上の k-コータリ，S を V の部分集合とする．$Q \subseteq S$ であるような $Q \in \mathcal{C}_k$が存在しないならば，手続き TRANS は $\mathcal{C}_k$とは異なる k-コータリを出力する．

Proof. $Q \subseteq S$ であるような $Q \in \mathcal{C}_k$が存在しないと仮定する．手続き TRANS により出力される $\mathcal{D}$ が Minimality を満たすことは明らかである．$\mathcal{D}$ が Intersection Property を満たすことを示すため，まず $\mathcal{D}$ は少なくとも k 個の互いに交わらない要素を含むことを示す．Step 2 で $\mathcal{D}$ の要素の削除が一度も行なわれなかった場合成り立つことは明らかである．Step 2 で $\mathcal{D}$ の要素の削除が一度でも行なわれた場合，最後に要素の削除が行なわれる前に$\overline{S}$内に少なくとも k 個の互いに交わらない要素が存在しなければならないので，要素の削除後$\overline{S}$内に少なくとも $k-1$ 個の互いに交わらない要素が存在することが保証される．したがって $S \cup \overline{S} = V$ 内に少なくとも k 個の互いに交わらない要素が存在する．次に，手続き TRANS により出力される $\mathcal{D}$ は $k+1$ 個の互いに交わらない要素を含まないことを示す．$\mathcal{D}$ 内の任意の $k+1$ 個の要素の集合 $\mathcal{Q}$ を考える．$\mathcal{Q}$ の要素は，S およびある $Q \in \mathcal{C}_k$ の superset であるような要素の 2 種類に分類することが可能である．$\mathcal{Q}$ が S を含まない場合，$\mathcal{C}_k$は k-コータリなので，$\mathcal{Q}$ 内には少なくとも 1 組の互いに交わる要素が存在する．$\mathcal{Q}$ が S を含む場合，$\overline{S}$に含まれる互いに交わらない要素の数が高々$k-1$ であることを示せはよいが，これは手続き TRANS の定義から明らかである．$\mathcal{D}$ は Minimality および Intersection Property を満たすことが示されたので k-コータリである．また，仮定より $Q \subseteq S$ であるような $Q \in \mathcal{C}_k$が存在しないので，出力される $\mathcal{D}$ は $\{S\}$ をコーラムとして含みゆえに $\mathcal{D} \neq \mathcal{C}_k$である． □

4 k-コータリの G-支配性に関する性質

本節では，$\mathcal{H}^*_G(\mathcal{C}_k)$ 内に k 個の互いに交わらない要素が存在する場合において，k-コータリ $\mathcal{C}_k$が他の k-コータリから G-支配されるための必要十分条件を示す．

定理 1 $G = (V, E)$ をグラフ，$\mathcal{C}_k$を V 上の k-コータリとする．$\mathcal{H}^*_G(\mathcal{C}_k)$ 内に k 個の互いに交わらない要素が存在するならば，以下の式 (1) および (2) を満たす G の部分木 $F = (V_F, E_F)$ が存在するとき，およびそのときに限り，$\mathcal{C}_k$は他の k-コータリから G-支配される．

任意の $H = (V_H, E_H) \in \mathcal{H}^*_G(\mathcal{C}_k)$ に対して H は F の部分グラフではない， (1)

任意の k 個の互いに交わらない $\mathcal{H}^*_G(\mathcal{C}_k)$ の要素 $H_1, \ldots, H_k$に対し，
$V_{H_i} \cap V_F \neq \emptyset$ であるような整数 i $(1 \leq i \leq k)$ が存在する． (2)

Proof. $\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ 内に k 個の互いに交わらない要素が存在すると仮定する．式 (1) および (2) を満たす G の部分木 $F=(V_F,E_F)$ が存在すると仮定し，$\mathcal{C}_k$に対して手続き TRANS に基づく以下の手続きを実行する．

Step 1 Let $\mathcal{D}=MinSet(\mathcal{C}_k\cup\{V_F\})$.

Step 2 If there exists k disjoint $Q_1,\ldots,Q_k\in\mathcal{D}$ such that $Q_1\cup\ldots\cup Q_k\subseteq\overline{V_F}$, then select a Q_i $(1\le i\le k)$ such that $G_{|Q_i}$ is disconnected, and let $\mathcal{D}=MinSet(MaxSet(V,\mathcal{D})-\{Q_i\})$, and return to Step 2; otherwise, output $\mathcal{D}$ and exit.

手続き TRANS と以下の手続きの相違は 2 点ある．以下の手続きでは TRANS において追加される V の部分集合 S が V_Fに変更されている．さらに Step 2 において If 文が正の場合，$G_{|Q_i}$が非連結であるような Q_iが選択するよう変更されている．

定義 5より G の任意の部分木 $T=(V_T,E_T)$ に対し，$Q\subseteq V_T$であるような $Q\in\mathcal{C}_k$が存在するならば，T の部分グラフであるような $H\in\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ が存在する，という事実が成り立つ．ならば G の部分木 F は式 (1) を満たすので，$Q\subseteq V_F$であるような $Q\in\mathcal{C}_k$が存在することはない．したがって補題 1より $\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}_k$とは異なる k-コータリであることが保証される．以下 $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}_k$を G-支配することを示す．Step 2 において If 文が偽のとき，すなわち$\overline{V_F}$内に $\mathcal{D}$ の k 個の互いに交わらない要素が存在しないならば，$\mathcal{D}=MinSet(\mathcal{C}_k\cup\{V_F\})$ なので $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}_k$を G-支配することは明らかである．If 文が正のとき，すなわち$\overline{V_F}$内に $\mathcal{D}$ の k 個の互いに交わらない要素 $Q_1,\ldots,Q_k$が存在する場合を考える．すべての整数 i $(1\le i\le k)$ に対し $G_{|Q_i}$が連結ならば，F は式 (2) を満たさないことになるので，If 文が正のときは $G_{|Q}$が非連結であるような $Q\in\mathcal{D}$ が必ず存在することが保証される．ならば $Q\subseteq V_H$であるような $H\in\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ は存在せず，Q の削除により $\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D})$ から $\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ の要素が削除されることはない．したがって $\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D})$ は $\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ に F を加え，F が H の部分グラフであるような $H\in\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ を取り除いた結果得られる集合である．ならば定義 5 より $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}_k$を G-支配することは明らかである．

$\mathcal{C}_k$が k-コータリ $\mathcal{D}_k$により G-支配されると仮定する．$\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)\subset\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)$ と $\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)\not\subset\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)$ の 2 つの場合に分けて考える．$\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)\subset\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)$ と仮定すると，G の部分木 $F=(V_F,E_F)\in\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)-\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ が存在しなければならない．この Fが式 (1) および (2) を満たすことを背理法により示す．F の部分グラフであるような $H\in\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ が存在するならば，$\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)$ は H と F を含んでいることになり，$\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)$ の Minimality に矛盾する．Fが式 (2) を満たさないならば，$\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)$ 内に互いに交わらない $k+1$ 個の要素が存在することになり，$\mathcal{D}_k$の Intersection Property に矛盾する．$\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)\not\subset\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)$ と仮定すると，G の部分木 $J=(V_J,E_J)\in\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)-\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)$ が存在しなければならない．また $\mathcal{D}_k$は $\mathcal{C}_k$を G-支配するので，J の部分グラフであるような $F=(V_F,E_F)\in\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)-\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ が存在する．以下では F が式 (1) および (2) を満たすことを背理法により示す．F の部分グラフであるような $H\in\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ が存在するならば，H が J の部分グラフであるような相異なる H と J が $\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ 内に存在することになり，Minimality に矛盾する．Fが式 (2) を満たさない，すなわち任意の i $(1\le i\le k)$ に対して $V_{H_i}\cap V_F=\emptyset$ であるような k 個の互いに交わらない $H_1,\ldots,H_k\in\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ が存在すると仮定する．ならば $\mathcal{D}_k$は $\mathcal{C}_k$を G-支配するので，F を含む互いに交わらない $k+1$ 個の要素が $\mathcal{H}_G^*(\mathcal{D}_k)$ 内に存在することになり，$\mathcal{D}_k$の Intersection Property に矛盾する．ゆえに $\mathcal{C}_k$が k-コータリ $\mathcal{D}_k$により G-支配されるならば，式 (1) および (2) を満たす G の部分木 F が存在する． □

5 まとめ

本稿で我々は k-相互排除アルゴリズムで用いられる k-コータリの G-支配性に関する考察を行なった．まず k-コータリから別の k-コータリを構成するための手続きを導入した．次にその手続きを用いて，$\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ 内に k 個の互いに交わらない要素が存在する場合における k-コータリ $\mathcal{C}_k$が他の k-コータリから G-支配されるための必要十分条件を示した．$\mathcal{H}_G^*(\mathcal{C}_k)$ 内に k 個の互いに交わらない要素が存在しない場合，$\mathcal{C}_k$は他の k-コータリから G-支配されることが常に成り立つのではないかと予想しているが，$\mathcal{C}_k$を G-支配する k-コータリの一般的な構成方法がまだ良く判かっておらず，今後の課題である．

参考文献

[FYA91] S. Fujita, M. Yamashita, and T. Ae. Distributed k-mutual exclusion problem and k-coteries. In *Proc. 2nd Int. Symp. on Algorithms*, 1991.

[GMB85] H. Garcia-Molina and D. Barbara. How to assign votes in a distributed systems. *J. ACM*, 32(4):841–860, October 1985.

[HJK93] S. Huang, J. Jiang, and Y. Kuo. K-coteries for fault-tolerant k entries to a critical section. In *Proc. 13th Int. Conf. on Distributed Computing Systems*. IEEE, May 1993.

[HY97] T. Harada and M. Yamashita. Nondominated coteries on graphs. *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, 8(6):667–672, June 1997.

[INK95] T. Ibaraki, H. Nagamochi, and T. Kameda. Optimal coteries for rings and related networks. *Distributed Computing*, (8):191–201, 1995.

[NM94] M.L. Neilsen and M. Mizuno. Nondominated k-coteries for multiple mutual exclusion. *Information Processing Letters*, 50:247–252, 1994.