数理解析研究所講究録
1043 巻 1998 年 215-220

A Non-Cooperative Equilibrium of n-person Game with Fractional Loss Functions

新潟大学大学院　自然科学研究科　木村　寛 (YUTAKA KIMURA)*
新潟大学大学院　自然科学研究科　沢崎　陽一 (YOICHI SAWASAKI)†
新潟大学　理学部　田中　謙輔 (KENSUKE TANAKA)‡

1. Introduction

分数型非協力 n 人ゲームを次の集合

$$(N, X, F) \tag{1.1}$$

で与える. ここで,

(i) $N := \{1, 2, \cdots, n\}$ をプレイヤーの集合とし, i 番目のプレイヤーを $i = 1, 2, \cdots, n$ で表す.

(ii) E をバナッハ空間とし, 各々のプレイヤー $i \in N$ は戦略集合 $X_i \subset E$ から戦略 x_i を選び, また $X := \prod_{i=1}^{n} X_i$ とおき, $X \ni x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で n 人の戦略を表し, これを多価戦略 (multistrategies) と呼ぶ.

(iii) $F = (F_1, \cdots, F_n) : X \to \boldsymbol{R}^n$ を多価損失関数とし, 各プレイヤー $i \in N$ の 損失関数は $F_i = f_i/g_i : X \to \boldsymbol{R}$ ($f_i : X \to \boldsymbol{R}$, $g_i : X \to \boldsymbol{R}$, ただし $g_i(x) > 0, \forall x \in X$) で定義する.

上記の設定のもとに各プレイヤーの戦略の決定過程がその対応する損失関数によって評価されるとし, i 番目のプレイヤーの行動が損失関数 F_i によって与えられるゲームを考える. つまり, 各プレイヤー $i \in N$ は出来るだけ自分の損失を最小にする戦略を選ぼうとする. このような解は, Nash の均衡解と呼ばれ多くの研究者によって存在性や特徴づけなど

*Department of Mathematical Science, Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata 950–21, JAPAN
†Department of Mathematical Science, Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata 950–21, JAPAN
‡Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University, Niigata 950–21, JAPAN

様々な研究がなされている. 一般に, 損失関数に凸 (または, 凹) などの性質があれば比較的このような解を得やすいが, 上で与えた分数型の損失関数を持ったゲームでは, 例え各 $i \in N$ で f_i が凸, g_i が凹であったとしても f_i/g_i は凸, または凹になるとは限らない. よってここでは, この分数型非協力 n 人ゲーム (N, X, F) において ある関数 $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を構成し, Ky Fan's 定理を用いてゲーム (N, X, F) の均衡解を得ることを示し, また, この解がある集合値写像の不動点となっていることを示す.

2. Main Results

任意の $i \in N$ に対して

$$\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} = \inf_{y_i \in X_i} \frac{f_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})}{g_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})} \tag{2.1}$$

となる $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \cdots, \bar{x_n}) \in X$ の存在性を考える.

ただし, 記号 $\bar{x}^{\hat{i}}$ は $\bar{x}^{\hat{i}} = (\bar{x_1}^{\hat{i}}, \cdots, \bar{x_{i-1}}^{\hat{i}}, \bar{x_{i+1}}^{\hat{i}}, \cdots, \bar{x_n}^{\hat{i}})$ を表す.

そこで, 各プレイヤーが妥協できる解として, ゲームの均衡点がよく知られている. よって, ここで均衡点の定義を次で与える.

Definition 1. $\bar{x} = (\bar{x_1}, \cdots, \bar{x_n}) \in X$ がゲームの均衡点であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} = \inf_{y_i \in X_i} \frac{f_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})}{g_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})} \tag{2.2}$$

が成り立つことをいう.

Proposition 1. 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\bar{x} \in X$ がゲームの均衡点である.

(ii) 任意の $i \in N$ において, すべての $y_i \in X_i$ に対して,

$$\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} \le \frac{f_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})}{g_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})} \tag{2.3}$$

が成り立つ.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) であることは inf の定義より明らか.

次に, (ii) $\Rightarrow$ (i) について (2.2) であることをいう. $(\ge)$ は $\bar{x} \in X$ より inf の定義より成立する. また, $(\le)$ であることは, 仮定 (2.3) はすべての $y_i \in X_i$ で成立しているので,

$$\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} \le \inf_{y_i \in X_i} \frac{f_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})}{g_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})}$$

が得られる. よって, 以上より (2.2) であることがいえ, (i) であることが示された. □

各 $i \in N$ において, 関数 $\varphi_i : X \times X \to \boldsymbol{R}$ をつぎで定義する.

$$\varphi_i(x,y) := f_i(x)g_i(y_i, x^{\hat{i}}) - g_i(x)f_i(y_i, x^{\hat{i}}) \qquad \forall(x,y) \in X \times X. \tag{2.4}$$

更に, $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ をつぎで定義する.

$$\varphi(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x,y) \qquad \forall(x,y) \in X \times X. \tag{2.5}$$

Proposition 2. 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\bar{x} \in X$ がゲームの均衡点である.

(ii) $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0, \qquad \forall y \in X.$

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) であることは, $\bar{x} \in X$ がゲームの均衡点であることより, Proposition 1. から, $\forall i \in N, y_i \in X_i$ で

$$\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} \leq \frac{f_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})}{g_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}})}$$

が成り立つ. よって,

$$\varphi_i(\bar{x}, y) = f_i(\bar{x})g_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}}) - g_i(\bar{x})f_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}}) \leq 0. \tag{2.6}$$

この (2.6) はすべての $i \in N$ で成立するので,

$$\varphi(\bar{x}, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\bar{x}, y) \leq 0 \tag{2.7}$$

である.

次に, (ii) $\Rightarrow$ (i) であることは, 任意の $i \in N$ を固定し, $y = (y_i, \bar{x}^{\hat{i}})$ をとる. 今, $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0$ であることより,

$$\varphi_i(\bar{x}, y) + \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) \leq 0 \tag{2.8}$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned}
\sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) &= \sum_{j \neq i} (f_j(\bar{x})g_j(y_j, \bar{x}^{\hat{j}}) - g_j(\bar{x})f_j(y_j, \bar{x}^{\hat{j}})) \\
&= \sum_{j \neq i} (f_j(\bar{x})g_j(\bar{x}_j, \bar{x}^{\hat{j}}) - g_j(\bar{x})f_j(\bar{x}_j, \bar{x}^{\hat{j}})) \\
&\quad (\text{今 } j \neq i \text{ より}, \bar{x} = (\bar{x}_j, \bar{x}^{\hat{j}}) = (y_j, \bar{x}^{\hat{j}})) \\
&= \sum_{j \neq i} (f_j(\bar{x})g_j(\bar{x}) - g_j(\bar{x})f_j(\bar{x})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって, 以上より $\varphi_i(\bar{x}, y) \leq 0$ である. $\square$

Lemma 1. (**Ky Fan's Inequality**) X をバナッハ空間, K を X のコンパクトな凸部分集合とし, 実数値関数 $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ は次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすものとする.

(i) $\forall y \in K, \qquad x \mapsto \varphi(x, y)$; 下半連続関数.

(ii) $\forall x \in K, \qquad y \mapsto \varphi(x, y)$; 凹関数.

(iii) $\forall y \in K, \qquad \varphi(y, y) \leq 0.$

このとき, 次が成り立つ.

$$\exists \bar{x} \in K \qquad s.t. \qquad \forall y \in K, \;\; \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \tag{2.9}$$

この Lemma 1. の証明は, 参考論文 [5] を参考せよ.

Theorem 1. 各 $i \in N$ において, $X_i \subset E$ はコンパクト, 凸な部分集合, $f_i, g_i : X \to \boldsymbol{R}_+$ は連続, 更に次ぎの条件を満たしているとする.

(i) $f_i|_{X_i} : X \to \boldsymbol{R}_+$, 凸関数.

(ii) $g_i|_{X_i} : X \to \boldsymbol{R}_+$, 凹関数.

ただし, $\boldsymbol{R}_+ = \{r \in \boldsymbol{R} | r > 0\}$.
このとき, ゲームの均衡点 $\bar{x} \in X$ が存在する. すなわち, $\bar{x} \in X$ は

$$\forall i \in N, \qquad F_i(\bar{x}) = \inf_{y_i \in X_i} F_i(y_i, \bar{x}^{\hat{i}}) \tag{2.10}$$

を満たす.

Proof. 各 $i \in N$ で X_i はコンパクト, 凸より $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ もコンパクト, 凸である. ここで, $\varphi : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を (2.5) として定義する. このとき, $\forall y \in X, x \mapsto \varphi(x, y)$ は連続である. また, $\forall x \in X, y \mapsto \varphi(x, y)$ は凹関数となる. なぜなら, 任意の $y, z \in X, \; \alpha \in (0, 1)$ に対して,

$$\begin{aligned}
\varphi_i(x, \alpha y + (1-\alpha) z) &= f_i(x) g_i(\alpha y_i + (1-\alpha) z_i, x^{\hat{i}}) - g_i(x) f_i(\alpha y_i + (1-\alpha) z_i, x^{\hat{i}}) \\
&\geq f_i(x)[\alpha g_i(y_i, x^{\hat{i}}) + (1-\alpha) g_i(z_i, x^{\hat{i}})] \\
&\quad + g_i(x)[-f_i(\alpha y_i + (1-\alpha) z_i, x^{\hat{i}})] \\
&\quad (g_i : X_i \to \boldsymbol{R}_+, \text{凹}) \\
&\geq \alpha f_i(x) g_i(y_i, x^{\hat{i}}) + (1-\alpha) f_i(x) g_i(z_i, x^{\hat{i}}) \\
&\quad + g_i(x)[-\alpha f_i(y_i, x^{\hat{i}}) - (1-\alpha) f_i(z_i, x^{\hat{i}})] \\
&\quad (f_i : X_i \to \boldsymbol{R}_+, \text{凸}) \\
&= \alpha[f_i(x) g_i(y_i, x^{\hat{i}}) - g_i(x) f_i(y_i, x^{\hat{i}})] \\
&\quad + (1-\alpha)[f_i(x) g_i(z_i, x^{\hat{i}}) - g_i(x) f_i(z_i, x^{\hat{i}})] \\
&= \alpha \varphi_i(x, y_i) + (1-\alpha) \varphi_i(x, z_i).
\end{aligned}$$

よって, $\varphi_i(x,\cdot)$ は凹関数. したがって, $\varphi(x,\cdot)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x.\cdot)$ も凹関数である. 更に, 各 $i\in N$ で任意の $y\in X$ に対して,

$$\begin{aligned}\varphi_i(y,y) &= f_i(y)g_i(y_i,y^{\hat{i}})-g_i(y)f_i(y_i,y^{\hat{i}})\\ &= f_i(y)g_i(y)-g_i(y)f_i(y)\\ &= 0\end{aligned}$$

より, 任意の $y\in X$ に対して,

$$\varphi(y,y)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(y,y)=0.$$

よって, 以上より Lemma 1. から,

$$\exists\bar{x}\in X \qquad s.t. \qquad \forall y\in K,\ \ \varphi(\bar{x},y)\le 0. \tag{2.11}$$

従って, Proposition 2. から, この $\bar{x}\in X$ はゲームの均衡点であることがいえ示された. □

各 $i\in N$ に対して, 関数 $C^i:\prod_{j\neq i}X_j\to 2^{X_i}$ を次で定義する.

$$C^i(x^{\hat{i}}):=\{x_i\in X_i|F_i(x_i,x^{\hat{i}})=\inf_{y_i\in X_i}F_i(y_i,x^{\hat{i}})\}. \tag{2.12}$$

このとき, 次の Corollary が得られる.

Corollary 1. 各 $i\in N$ において, $X_i\subset E$ はコンパクト, 凸な部分集合, $f_i,g_i:X\to \boldsymbol{R}_+$ は連続, 更に Theorem 1. の条件 (i), (ii) を満たし, 関数 $C:X\to 2^X$ を次で定義する.

$$C(x):=\prod_{i=1}^{n}C^i(x^{\hat{i}}), \qquad \forall x\in X. \tag{2.13}$$

このとき, C は X の中に不動点 $\bar{x}\in X$ を持つ.

$$i.e.,\quad \exists\bar{x}\in X \qquad s.t. \qquad \bar{x}\in C(\bar{x}). \tag{2.14}$$

Proof. Theorem 1. より,

$$\exists\bar{x}\in X \qquad s.t. \qquad \forall i\in N, \qquad F_i(\bar{x})=\inf_{y_i\in X_i}F_i(y_i,\bar{x}^{\hat{i}}). \tag{2.15}$$

ゆえに, 各 $i\in N$ で, $\bar{x}_i\in C^i(\bar{x}^{\hat{i}})$ である. よって, $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)\in\prod_{i=1}^{n}C^i(\bar{x}^{\hat{i}})=C(\bar{x})$ より, $\bar{x}\in X$ は C の不動点である. □

References

[1] J.P.Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).

[2] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusion, Springer-Verlag, Grundlehren der math, (1984).

[3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publication, (1984).

[4] J.P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Boston, (1990).

[5] J.P.Aubin, Optima and Equilibria (Springer-Verlag, New York, 1993).

[6] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).

[7] R.E.Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, Israel J. Math. 32 (1979) 107-116.

[8] D.G.Luenberger, Optimization by Vector Space Methods (John Wiley & Sons, inc., 1969).

[9] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε-Equilibrium Point in a Noncooperative n-person Game, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991) 413-423.

[10] R.T.Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-89.