数理解析研究所講究録
1044 巻 1998 年 53-62

随伴多様体(adjoint variety)について

福井大学　保倉 理美(YASUKURA, Osami)

表記の多様体の代数的実現とその上の複素接触構造の定める正則複素直線束のvery ample性について報告する．1°は，梶元氏及び大野真裕氏（早大理工）との共同研究[KOY], [KY]に基づき，2°は，[Yo]の前半に基づく．いづれも，Z-graded Lie algebra を基本的道具として用いる．

1°. 随伴多様体の定義と代数的実現

一般に，Gを連結複素半単純Lie群(代数群), λをGのLie代数$\mathcal{G}$のdominant integral form (cf. [G; (7.3.5), (7.3.6), (7.5.8)])とし，λを最高ウエイトとする複素ベクトル空間V上の複素既約表現$\rho_\lambda : G \to GL_{\mathbf{C}}(V)$を考える．複素射影空間$\mathbf{C}P(V)$への射線表現$[\rho_\lambda]$による最高ウエイトベクトル$X_\lambda$の射線(= 射影同値類)$[X_\lambda]$の軌道$X(G, \lambda, V) := [\rho_\lambda(G)X_\lambda]$は射影代数多様体になり，Lichtenstein[L]によりCasimir作用素を用いた斉次２次式系によってすべて実現されることが知られている．以下，GのLie代数$\mathcal{G}$は単純で，λはその最高ルートとする．ρ_λは随伴表現$\mathrm{Ad} : G \to GL_{\mathbf{C}}(\mathcal{G})$になる．

$$X(\mathcal{G}) := X(G, \mathrm{Ad}, \mathcal{G})$$

を$\mathcal{G}$の隋伴多様体と呼ぶ．Freudenthal[F]は，E. CartanやChevalley-Shaferによる例外型Lie代数の実現に鑑みて，$\mathcal{G} = E_8, E_7, E_6, F_4$型の随伴多様体を，Killing形式を用いた斉次２次式系で実現し，上記例外型随伴多様体上のmetasymplectic geometryを展開した．一方，Freudenthalによる例外型Lie代数E_8, E_7, E_6, F_4の統一的構成は，Yamaguti-Asano [YA], [A1, A2], [Y] によって階数２以上の複素単純Lie代数の接触型のZ-gradation の統一的構成として拡張された(= Symplectic triple system の理論)．この方向の自然な展開として，一般に，複素単純Lie代数 $\mathcal{G}$の随伴多様体$X(\mathcal{G})$は，DynkinによるKilling形式の標準的定数倍を用いれば，それぞれの型ごとに係数変更することなしにすべて同様の斉次２次式系で実現できることを報告する．これは，随伴多様体のSecant varietyの研究で用いられる(cf. [KOY], [KY])．

今，$\varepsilon \in \mathbf{C}$を固定し，任意の$Y_1, Y_2 \in \mathcal{G}$に対して，$Y_1 \vee_\varepsilon Y_2 \in End_{\mathbf{C}}(\mathcal{G})$を

$$(Y_1 \vee_\varepsilon Y_2)Z := \frac{1}{2}([Y_1, [Y_2, Z]] + [Y_2, [Y_1, Z]]) + D(Y_1, Z)Y_2 + D(Y_2, Z)Y_1 - \varepsilon D(Y_1, Y_2)Z$$

と定義する．ここで，$\mathcal{H}$を$\mathcal{G}$のカルタン部分代数, $\mathcal{R}$をルートの全体, $B(Y, Z)$をキリング形式として，各双対空間の元$\omega \in \mathcal{H}^*$について，その双対元$T_\omega \in \mathcal{H}$を$B(T_\omega, H) = \omega(H)$ $(H \in \mathcal{H})$で定め，最高ルートλについて，DynkinによるKilling形式の標準的定数倍を

$$D(Y, Z) := \frac{B(T_\lambda, T_\lambda)}{2} B(Y, Z)$$

とおいた．また，$\pi : \mathcal{G}\backslash\{0\} \to \mathbf{C}P(\mathcal{G})$ を標準的な射影とし，

$$W_\varepsilon := \{Y \in \mathcal{G}\backslash\{0\} | Y \vee_\varepsilon Y = 0 \in End_{\mathbf{C}}(\mathcal{G})\}$$

とおく.

定理1-1([KOY; Thm.3.1], [KY]) (i) $\varepsilon \neq 2$の時，次式が成立つ：

$$X(\mathcal{G}) = \pi(W_\varepsilon).$$

(ii) $\varepsilon = 2$の時，$\mathrm{rank}_{\mathbf{C}}\, \mathcal{G} \geq 2$ならば, 上式が成立つ.

証明:($\subseteq$について) $D(*,*)$は，$\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \mathbf{R}T_\alpha$上正定値である．各$\omega \in \mathcal{H}^*$の$D(*,*)$に関する双対元$H_\omega$を$D(H_\omega, H) = \omega(H)$ $(H \in \mathcal{H})$で定める．$H_\omega = 2T_\omega/B(T_\lambda, T_\lambda)$である．また, 各ルート$\alpha \in \mathcal{R}$に対するルートベクトル$X_\alpha$を，$\mathbf{C}^\times := \mathbf{C}\backslash\{0\}$倍を行って，$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$であるように選ぶ．すると，$D(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$が成立つ．また,

$$[H_\lambda, X_\alpha] = D(H_\alpha, H_\lambda)X_\alpha = \frac{2D(H_\alpha, H_\lambda)}{D(H_\lambda, H_\lambda)}X_\alpha;$$
$$[H_\lambda, X_{-\alpha}] = -\alpha(H_\lambda)X_{-\alpha} = -\frac{2D(H_\alpha, H_\lambda)}{D(H_\lambda, H_\lambda)}X_{-\alpha}.$$

従って，任意の正ルートαについて次式が成立つ：

$$[H_\lambda, X_\alpha] = \begin{cases} 0 & (\alpha - \lambda \notin \mathcal{R},\quad \alpha \neq \lambda); \\ X_\alpha & (\alpha - \lambda \in \mathcal{R}); \\ 2X_\alpha & (\alpha = \lambda); \end{cases}$$
$$[H_\lambda, X_{-\alpha}] = \begin{cases} 0 & (-\alpha + \lambda \notin \mathcal{R},\quad -\alpha \neq -\lambda); \\ -X_{-\alpha} & (-\alpha + \lambda \in \mathcal{R}); \\ -2X_{-\alpha} & (-\alpha = -\lambda). \end{cases}$$

特に，$\mathcal{G}$は，随伴表現の最高ウエイトλの$D(*,*)$に関する双対元H_λの随伴作用による固有空間$\mathcal{G}_i := \{Y \in \mathcal{G} | [H_\lambda, Y] = iY\}$の直和として，次のように分解される：

$$\mathcal{G} = \sum_{i=0,\pm1,\pm2} \mathcal{G}_i;\ \mathcal{G}_{\pm2} = \mathbf{C}X_{\pm\lambda}.$$

さて，任意の$Z \in \mathcal{G}$について，ある$Z_i \in \mathcal{G}_i$が存在して$Z = \sum_{i=-2}^{2} Z_i$となり，ある$c \in \mathbf{C}$について$Z_{-2} = cX_{-\lambda}$であり，$[H_\lambda, X_{\pm\lambda}] = \pm 2X_\lambda$ であるから,

$$\begin{aligned} [X_\lambda, [X_\lambda, Z]] &= [X_\lambda, [X_\lambda, Z_{-2}]] = -2cX_\lambda; \\ 2D(X_\lambda, Z) &= 2D(X_\lambda, Z_{-2}) = 2cD(X_\lambda, X_{-\lambda}) = 2c; \\ D(X_\lambda, X_\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

従って，$(X_\lambda \vee_\varepsilon X_\lambda)Z = 0$ となる．一方，任意の$\alpha \in \mathrm{Ad}(G)$ について，$(\alpha Y_1 \vee_\varepsilon \alpha Y_2)\alpha Z = \alpha((Y_1 \vee_\varepsilon Y_2)Z)$ であるから，$\mathrm{Ad}(G)X_\lambda \subset W_\varepsilon$を得る．従って，$X(\mathcal{G}) \subseteq \pi(W_\varepsilon)$ である．

($\supseteq$について) (0) $\varepsilon = 0$の時(cf. [F;§38]):

(0-1)$Y_1, Y_2 \in W_0$かつ$D(Y_1, Y_2) \neq 0$ならば$\alpha \in G$が存在して，$\alpha[Y_1] = [Y_2]$となることを示す．任意の$t \in \mathbf{C}$について，次式が成立つ：

$$\begin{aligned} Z_1(t) := (e^{t\mathrm{ad}Y_2})Y_1 &= Y_1 + t[Y_2, Y_1] - t^2 D(Y_2, Y_1)Y_2 \in \mathrm{Ad}(G)Y_1; \\ Z_2(t) := (e^{t\mathrm{ad}Y_1})Y_2 &= Y_2 - t[Y_2, Y_1] - t^2 D(Y_2, Y_1)Y_1 \in \mathrm{Ad}(G)Y_2. \end{aligned}$$

特に，$Z_1(1/\sqrt{D(Y_2, Y_1)}) = Y_1 + [Y_2, Y_1]/\sqrt{D(Y_2, Y_1)} - Y_2 = -Z_2(1/\sqrt{D(Y_2, Y_1)})$．従って，$[Z_1(1/\sqrt{D(Y_2, Y_1)})] = [Z_2(1/\sqrt{D(Y_2, Y_1)})]$．ゆえに, $[\mathrm{Ad}(G)Y_1] = [\mathrm{Ad}(G)Y_2]$.

(0-2) ある$Y \in W_0$について$[Y] \notin X(\mathcal{G})$と仮定する．(0-1) より$X(\mathcal{G}) \subset Y^\perp$．すると，

$$< X(\mathcal{G}) > := \{\sum_{i=0}^{m} c_i v_i | c_i \in \mathbf{C}, v_i \in X(\mathcal{G}), m = 1, 2, 3, ...\} \subseteq Y^\perp \neq \mathcal{G}$$

は，properな不変部分空間である．これは，$\mathcal{G}$が単純で，Adが既約であることに反する．従って，$X(\mathcal{G}) \supseteq \pi(W_0)$となる．

(i) $\varepsilon \neq 2$の時(cf. [F; (35.4)], [Y; p.86, ℓ.16]): $(Y \vee_\varepsilon Y)Y = (2-\varepsilon)D(Y, Y)Y$．であるから，$W_\varepsilon \subset \{Y \in \mathcal{G} | D(Y, Y) = 0\}$ が成立つ．従って，$W_\varepsilon = W_0$．特に，(0) より$X(\mathcal{G}) \supseteq \pi(W_\varepsilon)$を得る．

(ii) $\varepsilon = 2$の時：$\mathrm{rank}_{\mathbf{C}}\mathcal{G} \geq 2$ならば$W_2 = W_0$であることを示す．(i) より，$W_0 \subset \{Y \in \mathcal{G} | D(Y, Y) = 0\}$ であるから，$W_2 \subset \{Y \in \mathcal{G} | D(Y, Y) = 0\}$ を示せばよい．$D(*, *)$は$\mathcal{G}$のコンパクト実型上負定値だから, $\mathcal{G}$の複素線形基底$E_1, ..., E_N$で$D(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ となるものが存在する．ここで，$N = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{G}$である．このとき，

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} D((\mathrm{ad}Y)^2 E_i, E_i) = \mathrm{tr}((\mathrm{ad}Y)^2) = B(Y, Y) = \frac{2}{B(T_\lambda, T_\lambda)} D(Y, Y); \\ &\sum_{i=1}^{N} D(2D(Y, E_i)Y, E_i) = 2D(Y, \sum_{i=1}^{N} D(Y, E_i)E_i) = 2D(Y, Y); \\ &\sum_{i=1}^{N} D(-2D(Y, Y)E_i, E_i) = -\sum_{i=1}^{N} 2D(Y, Y)D(E_i, E_i) = -2ND(Y, Y) \end{aligned}$$

の辺々を加えて，$\sum_{i=1}^{N} D((Y \vee_2 Y)E_i, E_i) = 2(\frac{1}{B(T_\lambda, T_\lambda)} + 1 - N)D(Y, Y)$ を得る．従って，$B(T_\lambda, T_\lambda) \neq \frac{1}{N-1}$を示せば，$W_2 \subset \{Y \in \mathcal{G} | D(Y, Y) = 0\}$ がわかる．$(\mathrm{ad}T_\lambda)^2$の固有値は，

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} B(T_\lambda, T_\lambda)^2 & : & \text{重複度} & 2\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{G}_{\pm 2} & = & 2; \\ B(T_\lambda, T_\lambda)^2/4 & : & \text{重複度} & 2\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{G}_{\pm 1} & =: & 2n_1; \\ 0 & : & \text{重複度} & 2\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{G}_0 & =: & n_0 \end{array} \right.$$

となり，$0 \neq B(T_\lambda, T_\lambda) = (2+2n_1/4)B(T_\lambda, T_\lambda)^2$, 即ち，$B(T_\lambda, T_\lambda) = 1/(2+n_1/2)$. 従って，$2+n_1/2 \neq N-1$，即ち，$3+n_1/2 \neq N(=2+2n_1+n_0)$を示せばよい．ここで，$n_1 = 0$ならば，$\mathcal{G}_1 = 0$, 即ち，任意の正ルート$\alpha$について$\alpha - \lambda \notin \mathcal{R}$，従って，$-\alpha+\lambda \notin \mathcal{R}$となり$\mathcal{G}_{-1} = 0$, 結局，$\mathcal{G} = \mathbf{C}X_{-\lambda} + \mathbf{C}H_\lambda + \mathbf{C}X_\lambda$となり，$\mathrm{rank}_{\mathbf{C}}\mathcal{G} \geq 2$に反する．従って，$n_1 \geq 1$, 故に，$(-1/2 \geq)1 - 3n_1/2 \neq n_0$となり, $3+n_1/2 \neq 2+2n_1+n_0(=N)$がわかる．//

特に，$\mathcal{G}$がA型の場合，随伴多様体は次のようになる．

例1-2[KOY]:$\mathcal{G} = A_1 := sl(2,\mathbf{C}) = \{Y \in M(2,\mathbf{C}) | \mathrm{tr}Y = 0\} = \mathbf{C}X_{-\lambda} \oplus \mathbf{C}H_\lambda \oplus \mathbf{C}X_\lambda \cong \mathbf{C}^3$;

$$X_\lambda := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_\lambda := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X_{-\lambda} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで，$[X_\lambda, X_{-\lambda}] = H_\lambda, [H, X_{\pm\lambda}] = \pm 2X_{\pm\lambda}$である．任意の$Y = \xi X_\lambda + \eta H + \zeta X_{-\lambda} = \begin{bmatrix} \eta & \xi \\ \zeta & -\eta \end{bmatrix}$について，$D(Y,Y) = \mathrm{tr}Y^2 = 2(\eta^2 + \xi\zeta) = 2\mathrm{det}Y$であるから，順序基底$(X_{-\lambda}, H_\lambda, X_\lambda)$によって$Y \vee_\varepsilon Y$を表現すると，$(2-\varepsilon)D(Y,Y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$となる：

$$(Y \vee_\varepsilon Y)(X_{-\lambda}, H_\lambda, X_\lambda) = (X_{-\lambda}, H_\lambda, X_\lambda)(2-\varepsilon)D(Y,Y).$$

従って，A_1型の随伴多様体$X(A_1)$は，同一視$\pi(Y) = (\xi : \eta : \zeta) \in \mathbf{C}P_2 = \mathbf{C}P(sl(2,\mathbf{C}))$によって，複素２次曲線$Q := \{(\xi : \eta : \zeta) \in \mathbf{C}P_2 | \eta^2 + \xi\zeta = 0\} \subset \mathbf{C}P_2$に等しい：

$$X(A_1) = \pi(\{Y \in sl(2,\mathbf{C}) | D(Y,Y)(=2\mathrm{det}Y) = 0\}) = Q.$$

例1-3[KY]：$\mathcal{G} = A_n = sl(n+1,\mathbf{C}) = \{Y \in M(n+1,\mathbf{C}) | \mathrm{tr}Y = 0\}$について

$$\begin{aligned} X(A_n) &= \pi(\{Y \in sl(n+1,\mathbf{C}) | \mathrm{rank}Y = 1\} \\ &= \pi(\{Y \in sl(n+1,\mathbf{C}) | Y\text{の各２次小行列式} = 0\}). \end{aligned}$$

証明：最初の等式を示す．$\mathcal{H} = \{\mathrm{diag}(a_0, ..., a_n) | \sum_{i=0}^n a_i = 0\}$, $H_\lambda := \mathrm{diag}(1,0,...,0,-1)$, $X_\lambda := E_{1,n+1}$, $X_{-\lambda} := E_{n+1,1}$ とおくことができる．ただし，$E_{i,j}$は第(i,j)成分が1で，その他の成分は0である$n+1$次行列とする．$\mathrm{rank}X_\lambda = 1$であり，$\alpha \in SL(n+1,\mathbf{C})$の随伴作用$\mathrm{Ad}(\alpha)Y = \alpha Y \alpha^{-1}$は相似作用なので$\mathrm{rank}Y$は不変故，$\subseteq$がわかる．逆に，$\mathrm{rank}Y = 1$とする．もし，$Y$が0でない固有値を持てば，$\mathrm{tr}Y = 0$よりそれとは異なる固有値が少なくとも１つ存在し，Jordan標準形の考察より，$\mathrm{rank}Y \geq 2$となり矛盾する．従って，固有値はすべて0であり，Jordan標準形の考察より，YはX_λに相似である．従って，$\supseteq$もわかり，最初の等式が示された．//

上の例1-3は，随伴多様体の実現と線形代数との関連性を示している．

2°. 複素接触構造の等質条件

以下，$\mathrm{rank}_{\mathbf{C}}\mathcal{G} \geq 2$ とする．この時，次のことが成立つ：
(*) $\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{G}_{\pm 1} \neq 0$; かつ
(**) 複素symplectic形式$< *, * >'$: $\mathcal{G}_{-1} \times \mathcal{G}_{-1} \to \mathbf{C}; (Y_1, Y_2) \mapsto < Y_1, Y_2 >'$が存在して，$[Y_1, Y_2] = < Y_1, Y_2 >'$となる(浅野[A1; 定理2.11, 定理2.3], [A2; 定理1, 定理5], Yamaguti-Asano[YA; Thm.2])．

例 2-1(等質複素接触構造の実現) (0) $\mathrm{ad}X_{\pm\lambda} : \mathcal{G}_{-(\pm 1)} \to \mathcal{G}_{\pm 1}$について，$[X_\lambda, X_{-\lambda}] = H_\lambda$とJacobi等式より，$\mathrm{ad}X_{-\lambda} \circ \mathrm{ad}X_\lambda = \mathrm{id}_{\mathcal{G}_{-1}}$が成立つので，$\mathrm{ad}X_\lambda$は$\mathcal{G}_{-1}$上単射である．故に，

$$[Y, X_\lambda] \in [X_\lambda] := \mathbf{C}X_\lambda \Leftrightarrow Y \in \mathcal{G}_+ := \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2.$$

従って，Gの閉部分群$P_+ := \{\alpha \in G | [(\mathrm{Ad}\ \alpha)X_\lambda] = [X_\lambda]\}$のLie代数は，$\mathcal{G}$の複素Lie部分代数$\mathcal{G}_+$ に等しい．Gの$X(\mathcal{G})$への作用は正則なので，複素線形Lie群Ad Gの指数写像の正則性[G; p.255, (6.1.3)，3), Proof]と合わせて，次の写像は，$0 \in \mathcal{G}_{-2} + \mathcal{G}_{-1}$の十分小さい近傍に定義域を制限すれば，点 $[gX_\lambda] \in X(\mathcal{G})$ の近傍での複素座標を与えることがわかる：

$$\zeta_g : \mathcal{G}_{-2} + \mathcal{G}_{-1} \longrightarrow X(\mathcal{G}); Z' \mapsto [\hat{\zeta}_g(Z', X_\lambda)].$$

ただし，$\hat{\zeta}_g : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}; (Z', Y') \mapsto e^{\mathrm{ad}((\mathrm{Ad}\ g)Z')}(\mathrm{Ad}\ g)Y'$ とおいた．複素多様体としては，$X(\mathcal{G}) = G/P_+$となる[G; p.301, (6.8.1)], [M2; p.226 注意, p.206 3)].

(i)(正則接ベクトル束の構成) $X(\mathcal{G})$上の自明な$\mathcal{G}$-ベクトル束$X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G}$から正則接ベクトル束$T_+X(\mathcal{G})$へ写像

$$X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G} \longrightarrow T_+X(\mathcal{G}); ([(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda], Y) \mapsto Y^*_{[(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]} = \left.\frac{\mathrm{d}[e^{t\mathrm{ad}Y}(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0}$$

は全射準同形である．また，

$$\begin{aligned} & ((\mathrm{Ad}\ g)Y)^*_{[(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (d_{(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda}\pi)[(\mathrm{Ad}\ g)Y, (\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda] = 0 \\ \Leftrightarrow\ & [(\mathrm{Ad}\ g)Y, (\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda] \in [(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda] \Leftrightarrow Y \in \mathcal{G}_+ \end{aligned}$$

であるから，$K := \{([(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda], (\mathrm{Ad}\ g)Y) \in X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G} | Y \in \mathcal{G}_+, g \in G\}$が，0-section 0の原像である．従って，

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G} \longrightarrow T_+X(\mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

は，$X(\mathcal{G})$上の正則ベクトル束の完全系列である．即ち，$T_+X(\mathcal{G})$は，商ベクトル束$(X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G})/K$ と同形である．

(ii)($\tilde{E}$の定義) $\tilde{E} := \{([(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda], (\mathrm{Ad}\ g)Y) | g \in G, Y \in \mathcal{G}_{-1} + \mathcal{G}_+\}$とおく．これは，$X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G}$の部分正則ベクトル束である．実際，任意の$\alpha \in P_+$について

$$(\mathrm{Ad}\ (g\alpha))(\mathcal{G}_{-1}+\mathcal{G}_{+})=(\mathrm{Ad}\ g)(\mathcal{G}_{-1}+\mathcal{G}_{+})$$

故，各点$[(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]$での$\tilde{E}$のfiberは，その点での$X(\mathcal{G})\times\mathcal{G}$のfiberの一つの複素部分空間$(\mathrm{Ad}\ g)(\mathcal{G}_{-1}+\mathcal{G}_{+})$に等しい．また，各$g\in G$について，$0\in\mathcal{G}_{-2}+\mathcal{G}_{-1}$の十分小さい近傍$U$が存在して，(0)で定義した写像$\zeta_g$の$U$への制限

$$\zeta_g:U\longrightarrow X(\mathcal{G});Z'\mapsto\zeta_g(Z')$$

が$[(\mathrm{Ad}^g)X_\lambda]$のある近傍上への正則同形となる．このとき，次の写像が，正則ベクトル束としての局所自明化を与える：

$$\tilde{\zeta}_g:\tilde{E}|_{\zeta_g(U)}\longrightarrow\zeta_g(U)\times(\mathcal{G}_{-1}+\mathcal{G}_{+});(\zeta_g(Z'),\hat{\zeta}_g(Z',Y'))\mapsto(\zeta_g(Z'),Y').$$

(iii)(Eの定義) $\tilde{E}$はKを部分ベクトル束として含むから，正則ベクトル束の完全系列$0\to K\to\tilde{E}$を得る．従って，正則ベクトル束$E:=\tilde{E}/K$が定まる．これは，(i)の同形によって，正則接ベクトル束の部分ベクトル束と考えられる．

(iv)(γ_gの定義) $\gamma:X(\mathcal{G})\times\mathcal{G}\to\mathbf{C};([(\mathrm{Ad}\,g')X_\lambda,Y')\mapsto D((\mathrm{Ad}\,g')X_\lambda,Y')$では，うまく定義されていない．$[(\mathrm{Ad}\,g')X_\lambda]$が同じでも$(\mathrm{Ad}\,g')X_\lambda$には，定数倍の違いが認められるからである．そこで，各$g\in G$について，(iii)における$[(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]$の近傍の複素座標$\zeta_g:U\to X(\mathcal{G})$を与える$U$を用いて，

$$\gamma_g:\zeta_g(U)\times\mathcal{G}\longrightarrow\mathbf{C};(\zeta_g(Z'),Y')\mapsto D(\hat{\zeta}_g(Z'),Y')$$

とおけば，$\zeta_g(0)=[(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]\in X(\mathcal{G}))$の近傍$\zeta_g(U)$において，正則ベクトル束$X(\mathcal{G})\times\mathcal{G}$上の局所正則1-形式を定義する．また，

$$X_\lambda^\perp:=\{Y\in\mathcal{G}|D(Y,X_\lambda)=0\}=\mathcal{G}_{-1}+\mathcal{G}_{+}.$$

従って，$((\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda)^\perp=(\mathrm{Ad}\ g)(\mathcal{G}_{-1}+\mathcal{G}_{+})$である．特に，$\ker(\gamma_g)=\tilde{E}|_{\zeta_g(U)}$が成立つ．

(v)(γ_g^Eの定義) $K\subset\tilde{E}$と合わせて，γ_gは，$(X(\mathcal{G})\times\mathcal{G})/K|_{\zeta_g(U)}=T_+X(\mathcal{G})|_{\zeta_g(U)}$上の正則1形式，従って，$X(\mathcal{G})$上の局所正則$(1,0)$-形式$\gamma_g^E$を定める．また，

$$E|_{\zeta_g(U)}=\tilde{E}/K|_{\zeta_g(U)}=\ker\gamma_g/K|_{\zeta_g(U)}=\ker\gamma_g^E|_{\zeta_g(U)}.$$

(vi)($d\gamma_g^E$の非退化性) 任意の$x',y'\in E|_{[(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]}(\subset T_+X(\mathcal{G})|_{[(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]})$について，

$$((\mathrm{Ad}\ g)X')^*|_{[(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]}=x',\ ((\mathrm{Ad}\ g)Y')^*|_{[(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda]}=y'$$

となる$X',Y'\in\mathcal{G}_{-1}$がユニークに存在する．この時，

$$\begin{aligned} d\gamma_g^E(x',y') &= d\gamma_g^E(((\mathrm{Ad}\ g)X')^*,((\mathrm{Ad}\ g)Y')^*)|_{(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda} \\ &= ((\mathrm{Ad}\ g)X')^*\gamma_g^E(((\mathrm{Ad}\ g)Y')^*) - ((\mathrm{Ad}\ g)Y')^*\gamma_g^E(((\mathrm{Ad}\ g)X')^*) \\ &\quad -\gamma_g^E([((\mathrm{Ad}\ g)X')^*,((\mathrm{Ad}\ g)Y')^*])|_{(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda}. \end{aligned}$$

一方，任意の$Z'Z'' \in U$について，

$$\gamma_g^E(((\mathrm{Ad}\ g)Z'')^*)|_{\zeta_g(Z')} = \gamma_g(\zeta_g(Z'),(\mathrm{Ad}\ g)Z'') = D(\hat{\zeta}_g(Z'),(\mathrm{Ad}\ g)Z'').$$

従って，

$$\begin{aligned} -\gamma_g^E([((\mathrm{Ad}\ g)X')^*,((\mathrm{Ad}\ g)Y')^*])|_{(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda} &= -\gamma_g^E(-[(\mathrm{Ad}\ g)X',(\mathrm{Ad}\ g)Y']^*)|_{\zeta_g(0)} \\ &= -D(\hat{\zeta}_g(0),-[(\mathrm{Ad}\ g)X',(\mathrm{Ad}\ g)Y']) \\ &= D((\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda,[(\mathrm{Ad}\ g)X',(\mathrm{Ad}\ g)Y']) \\ &= D(X_\lambda,[X',Y']); \\ -((\mathrm{Ad}\ g)Y')^*\gamma_g^E(((\mathrm{Ad}\ g)X')^*)|_{(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda} &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_g^E(((\mathrm{Ad}\ g)X')^*)|_{e^{t\mathrm{ad}((\mathrm{Ad}\ g)Y')}(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda} \\ &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_g^E(((\mathrm{Ad}\ g)X')^*)|_{\zeta_g(t(\mathrm{Ad}\ g)Y')} \\ &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}D(\hat{\zeta}_g(t(\mathrm{Ad}\ g)Y'),(\mathrm{Ad}\ g)X') \\ &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}D(e^{t(\mathrm{Ad}\ g)Y'}(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda,(\mathrm{Ad}\ g)X') \\ &= -D([(\mathrm{Ad}\ g)Y',(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda],(\mathrm{Ad}\ g)X') \\ &= -D([Y',X_\lambda],X') = -D([X',Y'],X_\lambda); \\ ((\mathrm{Ad}\ g)X')^*\gamma_g^E(((\mathrm{Ad}\ g)Y')^*)|_{(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda} &= D([Y',X'],X_\lambda) = -D([X',Y'],X_\lambda). \end{aligned}$$

辺々加えて，$d\gamma_g^E(x',y') = -D([X',Y'],X_\lambda) = -<X',Y'>'D(X_{-\lambda},X_\lambda) = -<X',Y'>'$. (**) によって，これは非退化. //

各階数2以上の複素単純Lie代数$\mathcal{G}$に対し，上で構成された複素接触多様体$(X(\mathcal{G}),E)$は，Ad(G)がEを保存するので，(単連結コンパクト)等質複素接触多様体である.

定理 2-2. 随伴複素接触多様体$(X(\mathcal{G}),E)$の contact line bundle $L_E := T_+X(\mathcal{G})/E$ は，very ampleである.

証明：$w \in \mathbf{C}P(\mathcal{G})$に対し，$X \in \mathcal{G}\backslash\{0\}$を$w = [X](=\pi(X))$であるものとし，

$$w^\# := \{cX|c \in \mathbf{C}\}$$

とおく. Hopf's canonical line bundle $F := \{(w,Z) \in \mathbf{C}P(\mathcal{G}) \times \mathcal{G}|\ Z \in w^\#\}$ の$X(\mathcal{G})$へのpull-back

$$F//X(\mathcal{G}) = \{(w, Z) \in X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G} |\ Z \in w^{\#}\} = \{([(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda], c(\mathrm{Ad}\ g)X_\lambda) |\ g \in \mathbf{G}, c \in \mathbf{C}\}$$

の双対 $F^*//X(\mathcal{G})$ は，very ample である (cf. Matsushima[M1; p.56 Prop.6.4])．次の全射準同形を考える：

$$X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G} \to F^*//X(\mathcal{G}); (w', Y) \mapsto Y_w^D : (w', Z') \mapsto D(Y, Z').$$

$w' = [(\mathrm{Ad}\ g')X_\lambda]$ とおくと，

$$Y_{w'}^D = 0 \Leftrightarrow D(Y, c(\mathrm{Ad}\ g')X_\lambda) = 0 \Leftrightarrow Y \in (\mathrm{Ad}\ g')(\mathcal{G}_{-1} + \mathcal{G}_+)$$

が成立つ．従って，完全系列:

$$0 \to \tilde{E} \to X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G} \to F^*//X(\mathcal{G})$$

を得る．故に，正則ベクトル束の同型

$$F^*//X(\mathcal{G}) \cong \{X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G}\}/\tilde{E} \cong \{(X(\mathcal{G}) \times \mathcal{G})/K\}/\{\tilde{E}/K\} \cong T_+X(\mathcal{G})/E = L_E$$

を得る．特に，L_Eも very ample である．//

定理 2-3(Boothby[B1, B2])．単連結コンパクト等質複素接触多様体は，ある随伴複素接触多様体に，複素接触多様体として同形である．

系 2-4．単連結コンパクト等質複素接触多様体 (X, E) の contact line bundle $L_E := T_+X/E$ は，very ample である．

逆に，次が成立つ．

定理 2-5([Yo; Thm.2])．連結コンパクト複素接触多様体 (Z, E) の contact line bundle $L_E := T_+Z/E$が very ample ならば，(Z, E) は，等質複素接触多様体である．

証明：(i) (Very ample 条件の翻訳) L_Eが very ample とする．ある複素正則はめこみ$\Sigma : Z \to \mathbf{C}P_N$が存在して，$\mathbf{C}P_N$上の Hopf's canonical line bundle Fの双対束F^*のΣによる pull-back Σ^*F^* と L_Eは，Z上の正則ベクトル束として同形である [M1; (5.6), (6.5)]：$\Sigma^*F^* \cong L_E$．従って，これらの双対同士も同形である：

$$\Sigma^*F := \{(u, v) \in Z \times F | v \in F|_{\Sigma(u)}\} \cong L_E^*.$$

正則はめこみ: $\Sigma^*F \to F; (u, v) \mapsto v$と上の同形をつなげることにより正則はめこみ

$$\tilde{\Sigma} : L_E^* \to F$$

を得る．ここで，各 fiber では，1次元複素ベクトル空間としての同形写像を与えているから，特に，$\mathbf{C}^\times$倍は，同じ$\mathbf{C}^\times$倍に移っていることに注意する．ここで，それぞれの non-zero ベク

トルの全体$(L_E^*)^\times := L_E^*\backslash\{0\}$, $F^\times := F\backslash\{0\}$を考える．まず，$F^\times = \mathbf{C}^{N+1}\backslash\{0\}$である．また，$(L_E^*)^\times$上には各fiberの複素ベクトル空間のスカラー倍と一致する$\mathbf{C}^\times$-作用R_a $(a \in \mathbf{C}^\times)$が存在し，正則な主$\mathbf{C}^\times$-束になる．結局，$R_a$に関して斉次1次の正則はめこみを得る：

$$\tilde{\Sigma} : (L_E^*)^\times \to \mathbf{C}^{N+1}\backslash\{0\};\ \ \tilde{\Sigma}(R_a w) = a\tilde{\Sigma}(w)\ \ (a \in \mathbf{C}^\times).$$

(ii)(Symplectificationの構成) 一方，$\hat{\pi} : (L_E^*)^\times \to Z$を標準的射影，$\phi : T_+(L_E^*)^\times \to (L_E^*)^\times$も標準的射影，$\varpi_E : T_+Z \to L_E(= T_+Z/E)$を標準的射影し，$(L_E^*)^\times$上の正則$(1,0)$-形式$\theta_E$を次の式で定義する：

$$\theta_E(X) := \phi(X)(\varpi_E((d\hat{\pi})X))\ \ (X \in T_+(L_E^*)^\times).$$

このZ上の正則主$\mathbf{C}^\times$-束とその上の正則$(1,0)$-形式の組$((L_E^*)^\times, \theta_E)$について，次のことが確かめられる：

$(S.1)$ $\theta_E(X) = 0\ \ (X \in T_+(L_E^*)^\times), (d\hat{\pi})X = 0)$;
$(S.2)$ $R_a^*\theta_E = a\theta_E\ \ (a \in \mathbf{C}^\times)$;
$(S.3)$ $d\theta_E$は，$(L_E^*)^\times$上の正則なsymplectic $(2,0)$-形式である．

$(S.3)$より，各$w \in (L_E^*)^\times$において，$I_w : (T_+(L_E^*)^\times)|_w \to (T_+^*(L_E^*)^\times)|_w; X \mapsto -\iota_X d\theta_E$は，複素線型同型であり，正則ベクトル束の同形$I : T_+(L_E^*)^\times \to T_+^*(L_E^*)^\times$を与える．その逆写像

$$H : T_+^*(L_E^*)^\times \to T_+(L_E^*)^\times; \omega \mapsto H(\omega);\ -\iota_{H(\omega)}d\theta_E = \omega$$

も正則同型である．また，$(L_E^*)^\times$上の斉次1次正則関数の全体を

$$hol_1((L_E^*)^\times) := \{f : (L_E^*)^\times \to \mathbf{C}|\ f\text{は正則}, f(R_a w) = af(w)\ \ (a \in \mathbf{C}^\times, w \in (L_E^*)^\times)\}$$

とおき，各$f \in hol_1((L_E^*)^\times)$について，$d\theta_E$に関するHamiltonianベクトル場$H_f := H(df)$を考える．このとき，次が成立つ：

$(S.4)$ $X_f := Re((d\hat{\pi})H_f)$は，$(Z, E)$上の正則ベクトル場を定義して，その生成する(コンパクトな)Z上の(global)正則変換は$Aut(Z, E)$に入る, 即ち，Eを保存する．

(iii)(証明のつづき) $(z_0, ..., z_N)$を$\mathbf{C}^{N+1}$の標準座標とする．すべての$i = 0, ..., N$について，$f_i := z_i \circ \tilde{\Sigma} \in hol_1((L_E^*)^\times)$である．$\tilde{\Sigma}$ははめこみであるから，各点$w$での微分

$$d_w\tilde{\Sigma} : (T_+(L_E^*)^\times)|_w \to (T_+(\mathbf{C}^{N+1}\backslash\{0\}))|_{\tilde{\Sigma}(w)};$$

は単射である．従って，その双対写像

$$\tilde{\Sigma}_w^* : (T_+^*(\mathbf{C}^{N+1}\backslash\{0\}))|_{\tilde{\Sigma}(w)} \to (T_+(L_E^*)^\times)|_w; \omega \mapsto \omega \circ d_w\tilde{\Sigma}$$

は全射である．従って，$\{df_i = \tilde{\Sigma}^*(dz_i) | i = 0, ..., N\}$ は，$\mathbf{C}$ 上 $(T_+^*(L_E^*)^\times)|_w$ を張る．然るに，

$$H : (T_+^*(L_E^*)^\times)|_w \to (T_+(L_E^*)^\times)|_w; \omega \mapsto H(\omega)$$

は複素線型同形であるから，$\{H_{f_i} = H(df_i) | i = 0, ..., N\}$ は，$(T_+(L_E^*)^\times)|_w$ を張る．最後に，$\{X_{f_i} = Re((d\hat{\pi})H_{f_i}) | i = 0, ..., N\}$ は，$T_{\hat{\pi}w}Z$ を張ることがわかる．結局，複素Lie群 $Aut(Z, E)$ の軌道は，Z の各点で開集合になる．Z の連結性より，$Aut(Z, E)$ は，Z 上推移的に働くことがわかる．//

参考文献

[A1] 浅野 洋: Triple systems について;
横浜市立大学論叢自然科学系列第**27**巻1号(1975年11月), 7-31.

[A2] 浅野 洋; Symplectic Triple Systems と単純リー環; 京都大学数理解析研究所講究録**308** 短期共同研究「Triple Systems について」(1977年9月), 41-54.

[B1] W.M. Boothby: *Homogeneous complex contact manifolds*;
Proc.Sympos.Pure Math. Vol.**3**, Amer.Math.Soc., Providence, R.I.(1961), 144-154.

[B2] W.M. Boothby: *A note on homogeneous complex contact manifolds*;
Proc.Amer.Math.Soc.**13**(1962), 276-280.

[F] H. Freudenthal: *Beziehungen der* E_7 *und* E_8 *zur Oktavenebene. X*;
Indag.Math.**25**(1963), 457-471.

[G] M. Goto, F.D. Grosshans: *Semisimple Lie Algebras*; Lecture notes in pure and applied math.**38**, Dekker(1978).

[KOY] H. Kaji, M. Ohno, O. Yasukura: *Adjoint varieties and their secant varieties*;
to appear in Indag.Math.

[KY] H. Kaji, O. Yasukura: *Adjoint varieties and their secant varieties II*; in preparation.

[L] W. Lichtenstein: *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector*;
Proc.Amer.Math.Soc. Vol.**84**, Number 4(April 1982), 605-608.

[M1] Y. Matsushima: *Topics in Differential Geometry* (Noted by M. Borelli);
Univ. of Notre Dame(1973), §6 (Very) Ample Line Bundles.

[M2] 松島 与三: 多様体入門; 裳華房(1965).

[YA] K. Yamaguti, H. Asano: *On the Freudenthal's construction of exceptional Lie algebras*; Proc. Japan Acad., Vol.**51**, No.4(1975), 253-258.

[Y] 山口 清: Metasymplectic geometry と triple systems について; 京都大学数理解析研究所講究録**308** 短期共同研究「Triple Systems について」(1977年9月), 55-92.

[Yo] O. Yasukura: *Quaternion-Kähler manifolds of positive scalar curvature*;
First MSJ Institute on **Geometry And Global Analysis July 12-23, 1993**, Tohoku Univ. Sendai, Japan; *LECTURE NOTES*, Volume 2, pp.399-402 (口頭発表のレジメ; 後半のLEMMAの証明が誤りのため，未出版).