

有限次元行列環の融合積

千葉大学大学院自然科学研究科博士後期課程 坂本 高之 (Takashi Sakamoto)

$C^*$ -環の制限融合積の概念を初めて活字で述べたのは、多分 D.Voiculescu([2]) である。

ここでは、その定義及び基本的な性質を述べ、行列環を材料とした制限融合積のいくつかについて、簡単な考察を行なう。

1.  $C^*$ -環の制限融合積の定義

$A_1, A_2$  を単位元を持つ  $C^*$ -環とし、 $B$  を  $A_1, A_2$  に共通の  $C^*$ -部分環で、単位元を共有するものとする。さらに、 $E_j : A_j \rightarrow B$  を、ノルム 1 の射影とする。この設定から、制限融合積が構成される。その構成は、state に付随する制限自由積のそれとほぼ同様であり、大まかに述べると、以下のようになる。

簡単のため、以下では、 $j = 1, 2$  に対して、「 $E_j(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$ 」という条件を仮定する。

$A_j \ni x, y$  に対し  $\langle x, y \rangle := E_j(x^*y)$  とおくと、 $(A_j, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  は pre-Hilbert  $B$ -module になる。その完備化により得られる Hilbert  $B$ -module を  $H_j$  として、 $A_j$  から  $L(H_j)$  ( $H_j$  上の、adjoint を持つ  $B$ -module map の全体のなす  $C^*$ -環) への標準的な \*-準同型を  $\pi_j$  とする。(GNS 表現の類似物)

直和分解  $H_j = \xi_j \cdot B \oplus H_j^\circ$  を考え、Hilbert  $B$ -module

$$H = \xi \cdot B \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} H_{i_1}^\circ \otimes_B \dots \otimes_B H_{i_n}^\circ$$

を自然な形で構成する。

$j = 1, 2$  に対して、

$$H(j) = \xi \cdot B \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{\substack{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n \\ i_1 \neq j}} H_{i_1}^\circ \otimes_B \dots \otimes_B H_{i_n}^\circ$$

として、 $V_j : H \rightarrow H_j \otimes_B H(j)$  を以下で定義する。

$$V_j(\xi) = \xi_j \otimes \xi$$

$$V_j(h_1 \otimes \dots \otimes h_n) = \begin{cases} h_1 \otimes (h_2 \otimes \dots \otimes h_n) & (j_1 = j, n \geq 2) \\ h_1 \otimes \xi & (j_1 = j, n = 1) \\ \xi_j \otimes (h_1 \otimes \dots \otimes h_n) & (j_1 \neq j) \end{cases}$$

ここで、 $h_i \in H_{j_i}^\circ, j_1 \neq \dots \neq j_n$  である。

この  $V_j$  を用いて、 $\sigma_j : A_j \rightarrow L(H)$  ( $L(H)$  は、 $H$  上の、adjoint を持つ  $B$ -module map 全体のなす  $C^*$ -環) を、

$$\sigma_j(x) = V_j^{-1}(\pi_j(x) \otimes 1)V_j$$

で定義すると、これは  $*$ -準同型となる。

以上の準備のもとで、 $(A_j, E_j)$  ( $j = 1, 2$ ) の制限融合積を、 $L(H)$  の中で  $\sigma_1(A_1) \cup \sigma_2(A_2)$  で生成される  $C^*$ -環で定義し、 $(A_1, E_1) *_{B} (A_2, E_2)$  と書く。

[注意]

先に定義した  $\sigma_j$  達については、

$$\sigma_1(b) = \sigma_2(b) \quad b \text{ は } B \text{ の任意の元}$$

が成り立っている。従って、 $C^*$ -環の制限融合積を上述のように定義するのは、妥当である。

またこのことから、 $B$  は  $(A_1, E_1) *_{B} (A_2, E_2)$  の  $C^*$ -部分環とみなすことが出来る。

## 2. $C^*$ -環の制限融合積の基本的な性質

[性質 2.1]

$(A_1, E_1) *_{B} (A_2, E_2)$  から  $B$  の上へのノルム 1 の射影 ( $E_1 * E_2$  と書かれる) で、以下の性質を持つものが存在する。

- (i)  $(E_1 * E_2) \circ \sigma_j = E_j$  ( $j = 1, 2$ )
- (ii)  $n \in \mathbb{N}, j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n, a_i \in \ker E_{j_i}$  のとき、 $(E_1 * E_2)(\sigma_{j_1}(a_1) \cdots \sigma_{j_n}(a_n)) = 0$  である。
- (iii)  $c \in (A_1, E_1) *_{B} (A_2, E_2)$  が、条件「任意の  $a \in (A_1, E_1) *_{B} (A_2, E_2)$  について、 $(E_1 * E_2)(a^* c^* c a) = 0$ 」を満たすならば、 $c = 0$  である。

[注意 2.2]

$\tau$  を  $B$  上のトレースで、 $\tau \circ E_j$  が  $A_j$  上の忠実なトレースになるものとする。このとき、 $\tau \circ (E_1 * E_2)$  は  $(A_1, E_1) *_{B} (A_2, E_2)$  上の忠実なトレースになることがわかる。

## 3. 行列環を材料とした制限融合積のいくつかの例について

現時点での興味は、 $A_1, A_2$  として行列環、 $B$  として有限次元可換環を用意し、さらにノルム 1 の射影を与えて具体的に制限融合積を構成したときに、どのような  $C^*$ -環が出てくるか、ということである。

これらの実例のいくつかについては、従来からある  $C^*$ -環との関係がわかった。

主要命題は、以下の2つである。

命題 3.1

$$(M_k \otimes M_m) \underset{\mathbb{C}^m}{*} (M_l \otimes M_m) \simeq (C_r^*(\mathbb{F}_{m-1}) * M_k * M_l) \otimes M_m$$

(右辺の\*は、トレースに付随する制限自由積を表す。)

ここで、 $\{e_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq k}$ ,  $\{f_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq m}$ ,  $\{g_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq l}$ ,  $\{h_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq m}$  を各々  $M_k, M_m, M_l, M_m$  の行列単位とすると、 $\mathbb{C}^m$  は、

$$\mathbb{C}^m \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \sum_{j=1}^m \lambda_j (1 \otimes f_{jj}) \in M_k \otimes M_m$$

$$\mathbb{C}^m \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \sum_{j=1}^m \lambda_j (1 \otimes h_{jj}) \in M_l \otimes M_m$$

として、 $M_k \otimes M_m, M_l \otimes M_m$  の部分環とみなしている。

また、ノルム1の射影  $E_1, E_2$  は、各々以下のように定義されている。

$$E_1(e_{ij} \otimes f_{pq}) = \begin{cases} (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ p \text{ 番目}}}{\frac{1}{k}}, 0, \dots, 0) & (i = j \text{ かつ } p = q) \\ 0 & (i \neq j \text{ または } p \neq q) \end{cases}$$

$$E_2(g_{ij} \otimes h_{pq}) = \begin{cases} (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ p \text{ 番目}}}{\frac{1}{l}}, 0, \dots, 0) & (i = j \text{ かつ } p = q) \\ 0 & (i \neq j \text{ または } p \neq q) \end{cases}$$

命題 3.2

$$(M_n, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_2, E_2) \simeq \mathcal{O}_{n-1} \otimes M_2 \quad (n \geq 3)$$

ただし、 $\{e_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $\{f_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq 2}$  を各々  $M_n, M_2$  の行列単位とすると、 $\mathbb{C}^2$  は、

$$\mathbb{C}^2 \ni (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 (e_{22} + \dots + e_{nn}) \in M_n$$

$$\mathbb{C}^2 \ni (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 f_{11} + \lambda_2 f_{22} \in M_2$$

として、 $M_n, M_2$  の部分環とみなしている。

また、ノルム1の射影  $E_1, E_2$  は、各々以下のように定義されている。

$$E_1(e_{ij}) = \begin{cases} (1, 0) & (i = j = 1 \text{ のとき}) \\ (0, \frac{1}{n-1}) & (i = j \geq 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$E_2(f_{ij}) = \begin{cases} (1, 0) & (i = j = 1 \text{ のとき}) \\ (0, 1) & (i = j = 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

大雑把に言えば、命題 3.1、命題 3.2 共に、生成元とその間の関係に着目すれば証明出来る。ここでは、命題 3.2 の成立する理由だけを簡単に述べておく。

[注意]

「 $E_j(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$  ( $j = 1, 2$ )」という条件のもとでは、実際には  $\sigma_j$  達は単射になることがわかる。今扱っている具体例での  $E_j$  達は全てこの条件を満たしているの  
で、 $\sigma_j$  は省略することにする。

[命題 3.2 の説明]

$A = (M_n, E_1) \underset{\mathbb{C}^2}{*} (M_2, E_2)$  ( $n \geq 3$ ) とおく。

すると、 $A \simeq f_{11}Af_{11} \otimes M_2$  であるから、

$$f_{11}Af_{11} \simeq \mathcal{O}_{n-1}$$

を示すことが目標となる。

まず、次のような同一視がなされていることに注意する。

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} e_{11} = f_{11} \\ e_{22} + \cdots + e_{nn} = f_{22} \end{cases}$$

$A$  はその定義から、“ $e_{ij}$  達と  $f_{ij}$  達を有限個交互にかけあわせたもの” 全体で張られているが、上述の  $(\clubsuit)$  の影響で、このような積が全て生き残っているわけではない。

例えば、

$$\begin{aligned} e_{12}f_{12} &= e_{12}e_{22}f_{11}f_{12} \\ &= e_{12}(e_{22} + \cdots + e_{nn})f_{11}f_{12} \\ &= e_{12}f_{22}f_{11}f_{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

これらの考察から、

$$f_{11}Af_{11} = C^*(f_{12}e_{21}, f_{12}e_{31}, \dots, f_{12}e_{n1})$$

であることがわかる。

(例えば  $f_{12}e_{23}f_{21} \in f_{11}Af_{11}$  は、 $f_{12}e_{23}f_{21} = f_{12}e_{21}e_{23}f_{21} = f_{12}e_{21}(f_{12}e_{31})^*$  として復元出来る。)

さて、この生成元について、(♣)に注意して計算すると、

$$\begin{aligned}
 (f_{12}e_{j1})^*(f_{12}e_{j1}) &= e_{1j}f_{21}f_{12}e_{j1} \\
 &= e_{1j}f_{22}e_{j1} \\
 &= e_{1j}(e_{22} + \cdots + e_{nn})e_{j1} \\
 &= e_{11} = f_{11} \quad (2 \leq j \leq n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=2}^n (f_{12}e_{j1})(f_{12}e_{j1})^* &= \sum_{j=2}^n f_{12}e_{j1}e_{1j}f_{21} \\
 &= \sum_{j=2}^n f_{12}e_{jj}f_{21} = f_{11}
 \end{aligned}$$

となり、 $f_{11}Af_{11} \simeq \mathcal{O}_{n-1}$  が従う。

#### 参考文献

[1]. W.L.Paschke and N.Salinas, *C\*-algebras associated with free products of groups*, Pacific J. Math. **82**(1979).

[2]. D.Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product C\*-algebras*, in Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, Springer Lecture notes in Mathematics No. **1132**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, (1985).