数理解析研究所講究録
1048 巻 1998 年 33-36

On α-Optimal Solutions to Fuzzy Linear Programming Problems

金沢女子短期大学　桑野 裕昭　(Hiroaki Kuwano)
金沢大学教育学部　久志本 茂　(Shigeru Kushimoto)

1　はじめに

筆者らは Kuwano et al.[2] においてファジィ線形計画問題に対し、そのファジネスを含んだ最適解及び最適値の概念を与え、その諸性質を導いた。本論文では [2] で提案された α-最適値の特徴づけを行う。

なお、α-最適解の定義等の詳細は [2] を参照して頂きたい。

2　準備

本論文で取り扱うファジィ線形計画問題は次のようなものである。

$$
\text{(FLP)}\qquad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \langle \tilde{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{x}\rangle_F \equiv \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j, \\ \text{subject to} & \tilde{A}\boldsymbol{x} \le \tilde{\boldsymbol{b}},\ \boldsymbol{x} \ge \mathbf{o} \end{array}
$$

ここで

$$
\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_n \end{pmatrix}
$$

であり、 $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c}_j (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$ はすべて相互作用のない三角型の可能性変数とし、特に $\tilde{c}_j$ はすべて正であるとする。

Negoita at el. [4] では、クリスプな係数を持つ目的関数と凸ファジィ集合によって表現された係数を持つ制約式系によって構成されたファジィ線形計画問題に対し、分解定理を適用してその解法を与えている。ここでは Negoita らのアプローチを FLP の目的関数の変形へ適用して、さらに Luhandjula [3] に従い、目的関数の β-レベル集合の最大化を考える。

$$
(\mathrm{P}_1(\alpha,\beta))\qquad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \left\langle [\tilde{\boldsymbol{c}}]^{\beta}, \boldsymbol{x}\right\rangle_I \equiv \left\{ \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}\rangle \,\middle|\, \boldsymbol{c} \in \prod_{j=1}^{n} [\tilde{c}_j]^{\beta} \right\} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(\alpha) \end{array}
$$

ここで $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$、また、$[\bar{c}_j]^\beta$ は可能性変数 $\bar{c}_j$ の β-レベル集合であり、

$$X(\alpha) = \left\{ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \middle| \mathrm{Pos}\left(\bar{A}\boldsymbol{x} \leq \bar{b}\right) \geq \alpha \right\}.$$

である。

$\mathrm{P}_1(\alpha, \beta)$ は非可算無限個の目的関数を持つ多目的計画問題となっている。$\mathrm{P}_1(\alpha, \beta)$ の最適性については次の命題が成立する。

命題 1 (**[3]**) $\mathrm{P}_1(\alpha, \beta)$ に完全最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が存在するための必要十分条件は $[\bar{\mathbf{c}}]^\beta$ が $\mathrm{P}_1(\alpha, \beta)$ の制約領域 の $\boldsymbol{x}^*$ における接錐の極錐の部分集合になることである。

さらに、次の定理が導かれる。

定理 1 $\mathrm{P}_1(\alpha, \beta)$ において、2つのベクトル $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \in [\bar{\mathbf{c}}]^\beta$ が存在して、

$$\langle [\bar{\mathbf{c}}]^\beta, X(\alpha) \rangle = [\inf \langle \boldsymbol{c}_1, X(\alpha) \rangle,\ \sup \langle \boldsymbol{c}_2, X(\alpha) \rangle]$$

が成り立つ。また $\boldsymbol{c}_1 = (\min[\bar{c}_1]^\beta, \ldots, \min[\bar{c}_n]^\beta)^T$, $\boldsymbol{c}_2 = (\max[\bar{c}_1]^\beta, \ldots, \max[\bar{c}_n]^\beta)^T$ が成り立つ。

3 新たな代替問題

Luhandjura [3] で提案された非可算無限個の目的関数を持つ問題は、一般に解くことは難しい。そこで上述の定理に従い $\boldsymbol{c}_L^\beta (\equiv \boldsymbol{c}_1)$, $\boldsymbol{c}_U^\beta (\equiv \boldsymbol{c}_2)$ を新たな目的関数とする2目的の代替問題を次のように構成する。

$$(\mathrm{P}_2(\alpha, \beta)) \quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \langle \boldsymbol{c}_L^\beta, \boldsymbol{x} \rangle, \\ \text{maximize} & \langle \boldsymbol{c}_U^\beta, \boldsymbol{x} \rangle, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(\alpha) \end{array}$$

多目的線形計画問題に関する一般論より次の命題が直ちに従う。

命題 2 $\mathrm{P}_2(\alpha, \beta)$ のすべて の Pareto 最適解からなる集合は、次のパラメトリック線形計画問題の最適解の集合と一致する。

$$(\mathrm{P}_3^\lambda(\alpha, \beta)) \quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \langle \lambda \boldsymbol{c}_L^\beta + (1-\lambda) \boldsymbol{c}_U^\beta, \boldsymbol{x} \rangle, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(\alpha) \end{array}$$

ここで $\lambda \in [0, 1]$ はパラメータである。

$\mathrm{P}_3^\lambda(\alpha, \beta)$ の目的関数は $\beta = 0$ のとき Tanaka et al. [5] において定義されたファジィな係数を持つ目的関数のクリスプな係数を持つ制約条件の下での最大化問題に対する代替問題の目的関数と一致している。ただし [5] では、その重みを意思決定者が決定することとしている。

さて $\mathrm{P}_3^\lambda(\alpha, \beta)$ においてパラメータ λ によらず、その最適解が決定される状況を考えよう。このとき次の定理が成り立つ。

定理 2 $\mathrm{P}_3^\lambda(\alpha,\beta)$ においてパラメータ λ によらず、その最適解が決定されるための必要十分条件は

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{PLP}_L\text{-}(\alpha,\beta)) & \text{maximize} & \langle \boldsymbol{c}_L^\beta, \boldsymbol{x}\rangle, \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(\alpha), \\
(\mathrm{PLP}_U\text{-}(\alpha,\beta)) & \text{maximize} & \langle \boldsymbol{c}_U^\beta, \boldsymbol{x}\rangle, \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(\alpha)
\end{array}
$$

の最適解が一致することである。

FLP の α-最適値の定義において、その β-レベル集合の下限と上限は、上記の定理における $\mathrm{PLP}_L\text{-}(\alpha,\beta)$ と $\mathrm{PLP}_U\text{-}(\alpha,\beta)$ が同一の最適解を持った場合に、それぞれの最適値によって定義されている([2])。従って α-最適値はパラメータ λ に依存せず $\mathrm{P}_3^\lambda(\alpha,\beta)$ の最適解が決定されるときに、そのパラメータを単位区間 $[0,1]$ 上を動かして得られる問題の最適値の集合を Zadeh の分解定理によってファジィ化したものであることが分かった。

以上の議論をまとめておこう。

FLP の最適値を Zadeh の分解定理を用いて定める場合、本質的には $\mathrm{P}_1(\alpha,\beta)$ の集合値としての最適値をその β-レベル集合にすべきではあるが $\mathrm{P}_1(\alpha,\beta)$ は容易には解くことができない。そこで $\mathrm{P}_1(\alpha,\beta)$ の代わりに $\mathrm{P}_2(\alpha,\beta)$ を考え、それが完全最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を持つ場合に区間 $\left[\langle \boldsymbol{c}_L^\beta, \boldsymbol{x}^*\rangle,\ \langle \boldsymbol{c}_U^\beta, \boldsymbol{x}^*\rangle\right]$ をその β-レベル集合とすればよいことが分かった。さらに完全最適解の存在は2つの問題 $\mathrm{PLP}_L\text{-}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{PLP}_U\text{-}(\alpha,\beta)$ の最適解が同一であるかを調べることで確かめることができる。

4 可能性と必然性

本節では $\mathrm{P}_2(\alpha,\beta)$ を Dubois and Prade [1] で与えられた可能性測度及び必然性測度を利用したファジィ数の大小関係の評価方法を用いて表現し、α-最適値を特徴づける計画問題を導く。

命題 3 ([1]) 相互作用のない三角型可能性変数 $\bar{a}, \bar{b}$ に対して、次が成立する。

$$
\mathrm{Pos}\left(\bar{a} \le \bar{b}\right) \ge \alpha \text{ if and only if } a_L^\alpha \le b_U^\alpha, \quad \mathrm{Nes}\left(\bar{a} \le \bar{b}\right) \le \alpha \text{ if and only if } a_L^\alpha \ge b_L^{1-\alpha}
$$

この命題と $X(\alpha)$ の定義によれば $\mathrm{P}_2(\alpha,\beta)$ は

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{maximize} & z_o, \\
 & \text{maximize} & z_p, \\
 & \text{subject to} & \mathrm{Pos}\left(\langle \bar{c}, \boldsymbol{x}\rangle_F \ge z_o\right) \ge \beta, \\
(\mathrm{P}_4(\alpha,\beta)) & & \mathrm{Nes}\left(\langle \bar{c}, \boldsymbol{x}\rangle_F \le z_p\right) \le \beta, \\
 & & \mathrm{Pos}\left(\bar{A}\boldsymbol{x} \le \bar{b}\right) \ge \alpha, \\
 & & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{o}
\end{array}
$$

と同値なことが分かる。以上をまとめると次の定理を得る。

定理 3 PLP-1 に適合した $\alpha \in [0,1]$ を固定する。このとき $\mathrm{P}_4(\alpha,\beta)$ が完全最適解 $(\boldsymbol{x}^*, z_o^*, z_p^*)$ を持てば FLP の α-最適値 $\bar{Z}(\alpha)$ の β-レベル集合 $\left[\bar{Z}(\alpha)\right]^\beta$ に対して $\left[\bar{Z}(\alpha)\right]^\beta = \left[z_p^*, z_o^*\right]$ が成り立つ。

5 おわりに

本論文において、我々は α-最適値の β-レベル集合の上限及び下限はさまざまな問題によって特徴づけが可能であることを示した。また、定理 3 の意味において FLP の α-最適値 $\tilde{Z}(\alpha)$ の β-レベル集合 $\left[\tilde{Z}(\alpha)\right]^{\beta}$ は楽観的な (optimistic) 評価値 z_o^* と悲観的な (pessimistic) 評価値 z_p^* により構成されることを導いた。

今後は α-最適値を特徴づける問題 $\mathrm{P}_4(\alpha,\beta)$ の逆問題 [6] にも取り組んでいきたい。

参考文献

[1] Dubois, D. and H. Prade, "Ranking Fuzzy Numbers in Setting of Possibility Theory", Information Sciences, Vol.30, (1983), pp.186–224.

[2] Kuwano, H., S. Sakai and S. Kushimoto, "The Possibility Distribution of α-Optimal Value $Z(\alpha)$ in Fuzzy Linear Programming Problem", Math. Japonica, Vol.39, (1994), pp.137–145.

[3] Luhandjura, M.K., "Linear Programming with a Possibilistic Objective Function", European Journal of Operational Research, Vol.31, (1987), pp.110–117.

[4] Negoita, C.V., St. Minoiu and E. Stan, "Asupra considerării impreciziei în programarea liniară dinamicâ", ECECSR Journal, Vol.3, (1976), pp.93–105.

[5] Tanaka, H., H. Ichihashi and K. Asai, "A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problem Based on Comparison of Fuzzy numbers", Control and Cybernetics, Vol.13(3), (1984), pp.185–194.

[6] Maeda, T. and H. Kuwano, "Inverse Problems in Fuzzy Linear Programming Problems", in *Optimization Theory in Descrete and Continuous Mathematical Science*, RISM Kokyuroku, Vol.1015, (1997), pp.183–193.