数理解析研究所講究録
1049 巻 1998 年 112-117

連続関数の多元環上のコンパクト準同形写像

早大 教育　和田淳蔵　(Junzo Wada)

位相空間上の連続関数からなる多元環上で, コンパクトおよび弱コンパクト準同形写像を考えるとき, そこにはいろいろな問題が提供されている. ここでは主に弱コンパクト準同形写像が何時コンパクトになるかという問題と, それに関連した事柄について論ずる.

X, Y を Banach 空間とする. X から Y への線形作用素 T が完全連続であるとは, X の中で x_n が x に弱収束するとき Y の中で Tx_n が Tx に収束することをいう. コンパクト線形作用素は完全連続である ([3]). $H^\infty(D)$ を複素平面 $\mathbf{C}$ 上の単位開円板 D 上の有界正則関数全体の多元環としたとき, J. Bourgain ([5]) は次のことを証明した：Y を Banach 空間とし, Tを $H^\infty(D)$ から Y への弱コンパクト線形作用素としたとき, T は完全連続となる. これは $H^\infty(D)$ が Dunford-Pettis の性質をみたすということである.

ここで $H^\infty(D)$ は多元環であるから, B を関数環として ϕ を $H^\infty(D)$ から Bへの弱コンパクト準同形写像としたとき, ϕ は完全連続性より強い条件のコンパクト性をもつかということが自然の問いである. これをもっと一般にして, A をログモジュラー環で Bを関数環としてϕを A から Bへの弱コンパクト準同形写像としたとき, ϕはコンパクトになるかという問題が考えられる. このことは §1 で論じられる. §2 では完全正則 T_1−空間上の多元環上でコンパクトおよび弱コンパクト準同形写像を考え, 弱コンパクト準同形写像が何時コンパクトになるかについて述べる.

§1. 関数環の場合.

A を関数環としたとき, どのような A で, A 上の弱コンパクト準同形写像がコンパクトになるかについて次が成り立つ.

定理 1.1 ([8]). 関数環 A が次の条件 (α) をみたすとする：

(α)　A の任意の 1 点でない Gleason 部分 Pと任意の $x \in P$ に対して, P における x の開近傍 $U(x)$ が存在して, 多重円板 D^n から $U(x)$ の上への解析的な同相写像 ξ が存在する（n は x に従属する).

このとき A から関数環 Bへの弱コンパクト準同形写像はコンパクトとなる. ここでξが解析的であるとは, 任意の $f \in A$ で $f \circ \xi$が D^n上の正則関数であることをいう.

円板環, 多重円板環, 円筒環などは (α) をみたす.

ここで上述したログモジュラー環の場合を考える．そのまえに定理 1.1 における条件 (α) に関連して，次の条件 (α') をあげる．

(α')　A の任意の 1 点でない Gleason 部分 P と任意の $x \in P$ に対して，P における x の開近傍 $U(x)$ が存在して，多重円板 D^nから $U(x)$（弱位相 $\sigma(A^*, A^{**})$ を入れた）の上への解析的な同相写像が存在する（n は x に従属する）．

次に定理 1.1 は (α) の代わりに上の (α') を仮定しても成り立つことを示そう．

ϕ を A から Bへの弱コンパクト準同形写像とする．そのとき Xから $M_A \cup \{0\}$（弱位相 $\sigma(A^*, A^{**})$ を入れた）への連続写像 τ が存在して $(\phi f)(x) = \tau(x)(f)$　$(f \in A, x \in X)$ となり，かつ A の有限個の Gleason 部分 $P_1, P_2, \cdots, P_m$で $\phi(A) \subset P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_m \cup \{0\}$ となる．ここで Bはコンパクト Hausdorff 空間上の関数環であるとしている．M_Aは A の極大イデアル空間である ([8], [11])．いま任意の i $(1 \leq i \leq m)$ で $P = P_i$とおく．条件 (α') より P（弱位相 $\sigma(A^*, A^{**})$ を入れた）から P (A^*のノルム位相を入れた) への恒等写像 I が連続であることが導かれる．なぜなら，任意の $x_0 \in P$ に対して (α') より Pにおける x_0 の開近傍 $U(x_0)$ が存在して，D^n から $U(x_0)$（弱位相 $\sigma(A^*, A^{**})$ を入れた）上への解析的な同相写像 ξ が存在する．ここで任意の $\epsilon > 0$に対して $\xi^{-1}(x_0)$ $(\in D^n)$ のある開近傍 $V = V(\xi^{-1}(x_0)) \subset D^n$ が存在して，任意の $z \in V$ と D^n で正則で $\|f\| < 1$ となる任意の f に対して次が成り立つ．

$$(*) \qquad |f(z) - f(\xi^{-1}(x_0))| < \epsilon$$

ここで $\xi(V)$ は　$U(x_0)$　の中で $\sigma(A^*, A^{**})$–位相で開集合，しかし $U(x_0)$ は　$\sigma(A^*, A^{**})$–位相で開集合であるから、$\xi(V)$ は$\sigma(A^*, A^{**})$–位相で開集合である．ゆえに任意の $x = \xi(z) \in \xi(V)$ で，上の $(*)$ により

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \sup\{|x(g) - x_0(g)|;\, g \in A,\, \|g\| < 1\} \\ &\leq \sup\{|f(z) - f(\xi^{-1}(x_0))|;\, f \text{は} D^n \text{で正則で} \quad \|f\| < 1\} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

これは I が連続であることを示している．ゆえに $\tau = I \circ \tau$ は Xから $M_A \cup \{0\}$（A^* のノルム位相をいれた）への連続写像となるから ϕ はコンパクトとなる ([8])．

すなわち次が成り立つ．

定理 1.2. A を条件 (α') をみたす関数環，Bを関数環とする．そのとき A から Bへの弱コンパクト準同形写像はコンパクトである．

補題 1.3 ([10]). P を関数環 A の 1 点でない Gleason 部分とする．そして任意の $x \in P$ が A の Shilov 境界 ∂_A 上の唯一の表現測度をもつとする．そのとき D から P（$\sigma(A^*, A^{**})$-位相を入れた）上への解析的同相写像が存在する．

ここで A をログモジュラー環とすれば，任意の $x \in M_A$は ∂_A上の唯一の表現測度を持つことが知られている．ゆえに補題 1.3 より 1 点でない Gleason 部分 Pに対して Dから P ($\sigma(A^*, A^{**})$ 一位相をいれた）上への解析的同相写像が存在する．すなわち A は条件 (α') をみたすことがわかる．

ゆえに定理 1.2 よりつぎが成り立つ (cf. [10]).

定理 1.4. A をログモジュラー環，Bを関数環とする．そのとき A から Bへの弱コンパクト準同形写像はコンパクトとなる．

いま関数環 B が ℓ^∞ と同形な空間を含まないなら Bourgain [4] によって $H^\infty(D)$ から B への準同形写像は弱コンパクトとなる．このことと定理 1.4 よりより次を得る ([10]).

系 1.5. 関数環 Bが ℓ^∞と Banach 空間として同形な空間を含まないなら，$H^\infty(D)$ から Bへの準同形写像はコンパクトとなる．

次に関数環 A から関数環 Bへの弱コンパクト準同形写像はいつもコンパクトであるかという問題がある．必ずしもそうでないことを示す．

その前に Banach 空間 Eの開単位球 B_E上の有界正則関数全体の空間 $H^\infty(B_E)$ を定義する．$H^\infty(B_E)$ に属する関数 fは多重線形写像に関する多項式による Taylor 展開で定義されるが，これは G−正則で連続であることと同値である．ここで $f : B_E \to \mathbf{C}$ が G−正則であるとは，$a \in E$, $b \in E$ なら $\lambda \to f(a + \lambda b)$ が $\mathbf{C}$ の開集合 $\{\lambda \in \mathbf{C} : a + \lambda b \in B_E\}$ 上で普通の意味で正則となることである ([7]). このことより $H^\infty(B_E)$ は関数環となることは容易にわかる．

ここで Eを Tsirelson 空間とする．この空間 は B. S. Tsirelson ([9]) によって考えられたもので，その元が複素数列である Banach 空間で，それは回帰的で無条件基底をもち，E上の任意の連続な多項式は Eの弱コンパクト部分集合上で弱連続であるという性質をもっている ([1], [2]). いま $\phi(x) = x/2$ とすれば $\phi : B_E \to B_E$は正則である．C_ϕ を $H^\infty(B_E) \to H^\infty(B_E)$ の合成作用素，すなわち $C_\phi(f)(x) = f(x/2)$ とすれば C_ϕ は弱コンパクト準同形写像でコンパクトでないことが上述した Eの性質から導かれる ([2]).

§2. 完全正則空間上の連続関数の多元環の場合.

X を完全正則 T_1−空間とし，$C(X)$ を X上の複素数値連続関数全体の多元環とする．$C(X)$ にはコンパクト-開 (compact-open) 位相 が入れられている．

S, T を完全正則 T_1−空間としたとき, $C(S)$ から $C(T)$ へのコンパクトおよび弱コンパクト準同形写像については, Lindström and Llavona [6] で論じられた.

ここでは $C(S)$ の閉部分多元環の場合を考える. A が S上の関数多元環であるとは, A が $C(S)$ の閉部分多元環で Sの点を分離し, 定数関数を含むこととする. 問題は A, B をそれぞれ S, T 上の関数多元環としたとき, A から Bへのコンパクトおよび弱コンパクト準同形写像について論じることである.

いま A_0をその極大イデアル空間 M_{A_0}上の関数環とする. $\wp_0$を A_0の Gleason 部分全体の族とし, $\wp \subset \wp_0$とする. そして

$$S = \cup_{P \in \wp} P$$

とおく. Sは M_{A_0}の部分集合として完全正則 T_1−空間である. ここで

$$A = \{f \in C(S) : f \text{ は } S \text{の任意のコンパクト集合 } F \text{上で } A_0|S \text{の関数で一様近似できる}\}$$

とする. このような A を関数環 A_0から導かれた S上の関数多元環ということにする. これは $A_0|S$をふくむ $C(S)$ の最小の閉部分多元環である. ここで $P \in \wp$であるとき, Pは A の部分 (part) であるといわれる.

例. (1) S を完全正則 T_1−空間とし, βS を S のČech コンパクト化とする. そのとき $C(S)$ は関数環 $C(\beta S)$ から導かれた S上の関数多元環である. このことは $C(\beta S)$ の Gleason 部分はすべて 1 点であることからわかる.

(2) $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ とし A_0 を $\overline{D}$ 上のディスク環とする. そのとき Dは A_0 の 1 つの Gleason 部分である. このことより D上の正則関数すべての集合 $H(D)$ は A_0 から導かれた D上の関数多元環である.

そのほかにも, 多重円板環や円筒環から導かれた関数多元環が考えられる.

いま関数環から導かれた関数多元環 A と関数多元環 B について, A から Bへのコンパクトおよび弱コンパクト準同形写像を考える. そして主に合成作用素の場合を扱う.

S, T を完全正則 T_1−空間とし, A, B をそれぞれ S, T 上の関数多元環とする. ϕが A から Bへの合成作用素であるとは, Tから Sへの連続写像 θ が存在して

$$(\phi f)(y) = f(\theta(y)) \qquad (f \in A,\ y \in T)$$

となることをいう. ϕは勿論 A から Bへの準同形写像である.

A が関数環から導かれた関数多元環、Bが関数多元環としたとき、A から Bへの合成作用素 ϕ がコンパクトおよび弱コンパクトとなる必要条件, 十分条件については [12] において論じられているが、その 1 つは次のようである.

定理 2.1. A を関数環から導かれた S上の関数多元環, Bを局所コンパクト Hausdorff 空間 T 上の関数多元環とする. いまϕを A から Bへの弱コンパクト合成作用素とすれば, 任意の $y \in T$ に対して yの開近傍 Uが存在して $\theta(U)$ は A の 1 つの部分 (part) に含まれる.

次に A から Bへの弱コンパクト合成作用素が何時コンパクトになるかを考える. そのために条件 (α) に対応する条件 (β) を導入する.

(β) A の任意の 1 点でない部分 (part) P と任意の $x \in P$ に対して, Pにおけるの開近傍 $U(x)$ が存在して, 多重円板 D^nから $U(x)$ の上への解析的な同相写像が存在する（n は x に従属する).

定理 2.1 と条件 (β) より次が導かれる.

定理 2.2. A を関数環から導かれた S上の関数多元環で条件 (β) をみたすとし, Bを T上の関数多元環とする. S, T は共に局所コンパクト Hausdorff 空間とする. そのとき A から Bへの弱コンパクト合成作用素はコンパクトとなる.

終わりに, A を関数環から導かれた関数多元環とする代わりに, 単に $A_0|S$を含む $C(S)$ の閉部分環としても, A の部分 (part) を $\wp$ の元と定義すれば上の二つの定理が成り立つことを注意しておく.

参照文献

[1] R. Alencar, R. Aron and S. Dineen :*A reflexive space of holomorhic functions in infinitely many variables,* Proc. Amer. Math. Soc., 90 (1984) 407-411.

[2] R. Aron, P. Galindo and M. Lindström : *Compact homomorphisms between algebras of analytic functions.* Studia Math., 123 (1997) 235-247.

[3] S. Banach : *Théorie des Opérations Linéaires,* Chelsea 1932.

[4] J. Bourgain : *H^∞ is a Grothendieck space,* Studia Math., 75 (1983) 193-216.

[5] J. Bourgain : *New Banach space properties of the disc algebra and H^∞,* Acta Math.,152 (1984) 1-48.

[6] M. Lindström and J. Llavona : *Compact and weakly compact homomorphisms between algebras of continuous functions,* J. Math. Anal. Appl., 166 (1992) 325-330.

[7] J. Mujica : *Complex Analysis in Banach spaces,* North-Holland 1986.

[8] S. Ohno and J. Wada : *Compact homomorphisms on function algebras,* Tokyo J. Math., 4 (1981) 105-112.

[9] B. S. Tsirelson : *Not every Banach space contains an imbedding of ℓ_p or c_0,* Functional Anal. Appl., 8 (1974) 138-141.

[10] A. Ülger : *Some results about the spectrum of commutative Banach algebras under the weak topology and applications,* Monatsh. Math., 121 (1996) 353-379.

[11] J. Wada : *Weakly compact linear operators on function spaces,* Osaka Math. J., 13 (1961) 169-183.

[12] J. Wada : *Compact homomorphisms on algebras of continuous functions,* Tokyo J. Math., 18 (1995) 489-496.