数理解析研究所講究録
1049 巻 1998 年 137-151

ある関数の不動点と特異積分作用素のノルム

北大 理　　中路 貴彦
北海学園大　　山本 隆範

第 1 章. 序論

I.Feldman, N.Krupnik, A.Marcus は，Hilbert 空間 $H(\neq\{0\})$ 上の有界線形作用素 $P(\neq 0, I)$ が $P^2=P$ を満たし，$Q=I-P$ とし，α,β が定数のとき，H 上の作用素 $\alpha P+\beta Q$ に対して次のようなのノルム公式 $(FKM1)$ を求めた（cf. [2],[7],[3],[14]）。

$$(FKM1)\qquad \|\alpha P+\beta Q\|=\sqrt{\gamma+\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}\right)^2}+\sqrt{\gamma+\left(\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}\right)^2},$$

ただし

$$\gamma:=\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^2\left(\|P\|^2-1\right).$$

特に，次のように H が $L^2(W)$, P が P_+ の場合は，α,β は定数に限らず，$\alpha,\beta\in L^\infty$ についても考えることができるが，そのようなときの作用素ノルムの公式は一般的には知られていなかった（cf.[3]）。単位円周 $T:=\{\zeta;|\zeta|=1\}$ 上の正規化された Lebesgue 測度 $dm(\zeta):=d\theta/2\pi$（$\zeta=e^{i\theta}$）と正値可積分関数 W について $L^2(W)$ のノルムを

$$\|f\|_{L^2(W)}:=\left\{\int_T|f|^2Wdm\right\}^{1/2}$$

と定め可積分関数 f の特異積分 Sf を

$$(Sf)(\zeta):=\frac{1}{\pi i}\int_T\frac{f(\eta)}{\eta-\zeta}d\eta\quad(a.e.\zeta\in T),$$

(積分は Cauchy の主値積分)，$P_+:=(I+S)/2$,　$P_-:=(I-S)/2$,（I は恒等作用素）と定める。$L^2(W)$ 上の作用素のノルム $\|P_+\|_{L^2(W)}$ や $\|S\|_{L^2(W)}$ が有限であるための必要十分条件は $\inf_{k\in H^\infty}\|\phi-k\|_\infty<1$ であることはよく知られている。更に outer 関数 $h\in H^2$ により $\phi:=\bar{h}/h$, $W:=|h|^2$ とおくとき，

$$\|P_+\|_{L^2(W)}=\left\{1-\inf_{k\in H^\infty}\|\phi-k\|_\infty^2\right\}^{-1/2}$$

が知られているから，α,β が定数のとき，$(FKM1)$ より直ちに次の公式が導かれる。

$$(FKM2)\qquad \|\alpha P_++\beta P_-\|_{L^2(W)}=\sqrt{\gamma+\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}\right)^2}+\sqrt{\gamma+\left(\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}\right)^2},$$

ただし

$$\gamma := \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^2 \left(\frac{1}{1-\inf_{k\in H^\infty}\|\phi-k\|_\infty^2}-1\right).$$

問題 単位円周上の有界可測関数 α, β と正値可積分関数 W が与えられたとき,

$$S_{\alpha,\beta} := \alpha P_+ + \beta P_-$$

と定義される特異積分作用素 $S_{\alpha,\beta}$ のノルム：

$$\|S_{\alpha,\beta}\|_{L^2(W)} := \sup_{\|f\|_{L^2(W)}=1} \|S_{\alpha,\beta} f\|_{L^2(W)}$$

を計算するための公式を求めよ。

α, β が定数で W が関数のときは, 公式 $(FKM2)$ がその解答を与えている。一方, α, β が関数で W が定数のときは以前の研究集会で発表し [9] にまとめた。そのときの主定理は以下の系 1.1 であった。今回は α, β と W の両方が関数の場合を考える。そのために計算式が複雑になるので次のように $G(\gamma)$ と F を定義する。

定義 1.1 $\alpha, \beta \in L^\infty$ とし, 任意の $\gamma \in L^\infty$ に対して ζ の関数 $G(\gamma) \in L^\infty$ を次のように定める。

$$(G(\gamma))(\zeta) := \frac{|\alpha(\zeta)|^2+|\beta(\zeta)|^2}{2} + \sqrt{|\gamma(\zeta)|^2 + \left(\frac{|\alpha(\zeta)|^2-|\beta(\zeta)|^2}{2}\right)^2}, \quad (\zeta \in T).$$

定義 1.2 $\alpha, \beta \in L^\infty$, $h \in H^2$ は outer 関数, $\phi = \bar{h}/h$ とし, x の関数 F を次のように定める。

$$F(x) := \inf_{k\in H^\infty} \left\| G(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k) \right\|_\infty, \quad (x \geq 0).$$

すなわち,

$$F(x) = \inf_{k\in H^\infty} \left\| \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} + \sqrt{|x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2} \right\|_\infty.$$

定理 1.1 $\alpha, \beta \in L^\infty$ とする。outer 関数 $h \in H^2$ により $\phi := \bar{h}/h$, $W := |h|^2$ とおく。
(1) もし $\|S_{\alpha,\beta}\|_{L^2(W)} < \infty$ ならば, $F\left(\|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(W)}\right) = \|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(W)}$ が成り立つ。
(2) もし $\inf_{k\in H^\infty} \|\phi - k\|_\infty < 1$ ならば, $\|S_{\alpha,\beta}\|_{L^2(W)} < \infty$ であり, 方程式 $F(x) = x$ は唯一の解 $x = \|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(W)}$ を持つ。

$(FKM1)$ の代わりに定理 1.1 を用いると, $(FKM2)$ の証明は次のようになる。

α, β は定数であるから,

$$F(x) = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \sqrt{|x - \alpha\bar{\beta}|^2 \inf_{k\in H^\infty} \|\phi - k\|^2_\infty + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2}$$

と書ける。もし x が F の不動点ならば,

$$x = F(x) \geq \max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}$$

が成り立つから,

$$F(x) = x = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \sqrt{(x - |\alpha|^2)(x - |\beta|^2) + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2}$$

が成り立つ。よって

$$|x - \alpha\bar{\beta}|^2 \left(\inf_{k\in H^\infty} \|\phi - k\|_\infty\right)^2 = (x - |\alpha|^2)(x - |\beta|^2)$$

が成り立つ。もし

$$\inf_{k\in H^\infty} \|\phi - k\|_\infty < 1$$

ならば, これは x の 2 次方程式になり定理 1.1(1) より $x = \|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(W)}$ がその大きい方の解に等しい。よって, 公式 $(FKM2)$ が導かれた。

一方, α, β が定数でなくても W が定数のときは ϕ や $F(x)$ も定数になり,

$$\|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2} = F(\|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2}) = F(0)$$

が成り立つ。よって, 以前の研究集会で発表した次の公式も導かれた。

系 1.1 $\alpha, \beta \in L^\infty$ かつ $W \equiv 1$ のとき,

$$\|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2} = \inf_{k\in H^\infty} \left\| \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2} \right\|_\infty .$$

定理 1.1 を用いると，$\alpha\bar{\beta} \in H^\infty$ のとき W が定数でなくても $(FKM2)$ に似た公式として次の系 1.2 を証明できる。証明は省略する。

系 1.2 $\alpha, \beta \in L^\infty, \alpha\bar{\beta} \in H^\infty, |\alpha - \beta| > 0$ とし，ϕ と W に対して outer 関数 $h \in H^2$ が存在し $\phi = \bar{h}/h$ かつ $W = |h|^2$ を満たすとき，

$$\|S_{\alpha,\beta}\|_{L^2(W)} = \inf_{k \in H^\infty, |\phi - k| < 1} \left\| \sqrt{\gamma_k + \left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{2}\right)^2} + \sqrt{\gamma_k + \left(\frac{|\alpha| - |\beta|}{2}\right)^2} \right\|_\infty ,$$

ただし

$$\gamma_k := \left|\frac{\alpha - \beta}{2}\right|^2 \left(\frac{|\phi - k|^2}{1 - |\phi - k|^2}\right).$$

系 1.2 を使い計算すると例えば $\alpha(\zeta) = \zeta + 1,\ \beta(\zeta) = 1, W(\zeta) = |\zeta + 1|^{1/2}$ のとき，$2 \leq \|S_{\alpha,\beta}\|_{L^2(W)} < 2.04$ となる。

定理 1.1 を用いると，$\alpha, \beta \in L^\infty$ のとき W が定数でなくても次の系 1.3 を証明できる。証明は省略する。系 1.3 は $(FKM2)$ には似ていない。

系 1.3 $\alpha, \beta \in L^\infty, ||\alpha| - |\beta|| > 0$ とし，ϕ と W に対して outer 関数 $h \in H^2$ が存在し $\phi = \bar{h}/h$ かつ $W = |h|^2$ を満たすとき，

$$\begin{aligned}
\|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(W)} &= \inf_{k \in H^\infty, |\phi - k| < 1} \left\| \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2Re(\bar{\alpha}\beta(1 - \bar{\phi}k))}{1 - |\phi - k|^2} \right\|_\infty \\
&= \inf_{k \in H^\infty, |\phi - k| < 1} \left\| |\alpha|^2 + \frac{|\bar{\beta} - \bar{\alpha}(1 - \bar{\phi}k)|^2}{1 - |\phi - k|^2} \right\|_\infty \\
&= \inf_{k \in H^\infty, |\phi - k| < 1} \left\| |\beta|^2 + \frac{|\alpha - \beta(1 - \bar{\phi}k)|^2}{1 - |\phi - k|^2} \right\|_\infty .
\end{aligned}$$

以上のように $(FKM1)$ と定理 1.1 のどちらを用いても $(FKM2)$ を証明できる。$(FKM1)$ と定理 1.1 を比べると，定理 1.1 は $H = L^2(W)$ という特殊な場合ではあるが，α, β が関数の場合として系 1.1, 1.2, 1.3 を含んでいる。
第 2 章では Feldman, Krupnik, Marcus による $(FKM1)$ の証明を紹介する。第 2 章の内容は彼らの論文 [2] の一部分をまとめたものになっている。
第 3 章 では Cotlar-Sadosky の lifting 定理 [1] と Hilbert 空間の議論により定理 1.1 を証明する。第 3 章の内容は我々の論文 [10] の一部分をまとめたものになっている。2 つの証明は大きく異なっている。

第 2 章. $(FKM1)$ の Feldman, Krupnik, Marcus による証明

Feldman, Krupnik, Marcus の論文 [2] によると次のようになる。Hilbert 空間 $H(\neq \{0\})$ 上の有界線形作用素 $P(\neq 0, I)$ が $P^2 = P$ を満たしている。$\alpha = \beta$ のとき $\alpha P + \beta Q = \alpha I$ より $\|\alpha P + \beta Q\| = |\alpha|$ となるから $(FKM1)$ は成り立つ。
以下では $\alpha \neq \beta$ の場合を考える。P は零でない線形作用素であるから $ImP = \{Pf; f \in H\}$ は零でない部分空間であり，ImP の直交補空間 $(ImP)^{\perp}$ は閉部分空間である。$P^2 = P \neq I$ より，$ImP \neq H$。P は $P^2 = P$ を満たす有界線形作用素であるから，ImP は閉部分空間である。よって $ImP = ((ImP)^{\perp})^{\perp}$ が成り立つ。$ImP \neq H$ より，$(ImP)^{\perp}$ は零でない。従って，

$$H_1 := ImP,$$
$$H_2 := (ImP)^{\perp}$$

と定めると，H_1, H_2 は零でなく，H の直交分解：

$$H = H_1 \oplus H_2$$

が成り立つ。よって，任意の $f \in H$ に対して $f_1 \in H_1, f_2 \in H_2$ が存在して

$$f = f_1 + f_2,$$

内積 $(f_1, f_2) = 0$ が成り立つ。このとき，有界線形作用素 $T : H_2 \to H_1$ を

$$Tf_2 := Pf_2, \quad (f_2 \in H_2)$$

と定めると，

$$Pf = Pf_1 + Pf_2 = f_1 + Pf_2 = f_1 + Tf_2$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)f &= (\beta I + (\alpha - \beta)P)f \\ &= \beta f + (\alpha - \beta)Pf \\ &= \beta(f_1 + f_2) + (\alpha - \beta)(f_1 + Tf_2) \\ &= \alpha f_1 + (\alpha - \beta)Tf_2 + \beta f_2\end{aligned}$$

特に $f = f_2$ のとき，

$$(\alpha P + \beta Q)f_2 = (\alpha - \beta)Tf_2 + \beta f_2$$

このとき，$Tf_2 \in H_1$ より $(Tf_2, f_2) = 0$ が成り立つから，

$$\|(\alpha P + \beta Q)f_2\|^2 = \|(\alpha - \beta)Tf_2\|^2 + \|\beta f_2\|^2$$

従って，

$$\begin{aligned}\|\alpha P+\beta Q\|^2 &\geq \sup_{\|f_2\|=1}\|(\alpha P+\beta Q)f_2\|^2\\ &= \sup_{\|f_2\|=1}\left(\|(\alpha-\beta)Tf_2\|^2+\|\beta f_2\|^2\right)\\ &= |\alpha-\beta|^2\cdot\|T\|^2+|\beta|^2\end{aligned}$$

更に

$$(\alpha P+\beta Q)^* f=\bar{\alpha}f_1+(\bar{\alpha}-\bar{\beta})T^*f_1+\bar{\beta}f_2$$

が成り立つから，

$$(\alpha P+\beta Q)^* f_1=\bar{\alpha}f_1+(\bar{\alpha}-\bar{\beta})T^*f_1$$

このとき，$T^*f_1\in H_2$ より $(f_1,T^*f_1)=0$。よって

$$\|(\alpha P+\beta Q)f_1\|^2=\|\alpha f_1\|^2+\|(\alpha-\beta)T^*f_1\|^2.$$

従って，

$$\begin{aligned}\|\alpha P+\beta Q\|^2 &= \|(\alpha P+\beta Q)^*\|^2\\ &\geq \sup_{\|f_1\|=1}\|(\alpha P+\beta Q)^*f_1\|^2\\ &= \sup_{\|f_1\|=1}\left(\|\alpha f_1\|^2+\|(\alpha-\beta)T^*f_1\|^2\right)\\ &= |\alpha|^2+|\alpha-\beta|^2\cdot\|T^*\|^2\\ &= |\alpha|^2+|\alpha-\beta|^2\cdot\|T\|^2\end{aligned}$$

まとめると，

$$\|\alpha P+\beta Q\|^2\geq\max\{|\alpha|^2,|\beta|^2\}+|\alpha-\beta|^2\cdot\|T\|^2.$$

この不等式を用いると $\alpha\neq\beta$ のとき $\|\alpha P+\beta Q\|=\max\{|\alpha|,|\beta|\}$ が成り立つ必要十分条件は $T=0$ であることがわかる。よって，$\|\alpha P+\beta Q\|=\max\{|\alpha|,|\beta|\}$ のとき $(FKM1)$ は成り立つことがわかる。

次に，$\|\alpha P+\beta Q\|>\max\{|\alpha|,|\beta|\}$ の場合も $(FKM1)$ は成り立つことを示す。このとき，

$$\begin{aligned}\|\alpha P+\beta Q\|^2 &= \max\{\lambda;\lambda\in\sigma\left((\alpha P+\beta Q)^*(\alpha P+\beta Q)\right)\}\\ &= \max\{\lambda;\lambda\in\sigma\left((\alpha P+\beta Q)^*(\alpha P+\beta Q)\right),\lambda>\max\{|\alpha|^2,|\beta|^2\}\}\end{aligned}$$

よって $\|\alpha P+\beta Q\| > \max\{|\alpha|,|\beta|\}$ のとき，$\|\alpha P+\beta Q\|^2$ は $(\alpha P+\beta Q)^*(\alpha P+\beta Q)-\lambda I$ が有界な逆作用素をもち且つ $\lambda > \max\{|\alpha|^2,|\beta|^2\}$ を満たす λ の最大値に等しいことがわかる。ここで，

$$
\begin{aligned}
&(\alpha P+\beta Q)^*(\alpha P+\beta Q)-\lambda I \\
= \ &(|\alpha|^2-\lambda)f_1+\bar{\alpha}(\alpha-\beta)Tf_2+\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})T^*f_1+\Big(|\alpha-\beta|^2T^*T+(|\beta|^2-\lambda)I\Big)f_2
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで，次の補題 2.1 を使う。先にその証明を与えておく。

補題 2.1 零でない複素数 a と 3 つの有界線形作用素

$$
\begin{aligned}
B&:H_2\to H_1,\\
C&:H_1\to H_2,\\
D&:H_2\to H_2
\end{aligned}
$$

に対して，有界線形作用素 A を

$$Af := af_1+Bf_2+Cf_1+Df_2$$

と定めるとき，次の (1) と (2) は同値である。
(1) $A:H\to H$ は有界な逆作用素をもつ。
(2) $aD-CB:H_2\to H_2$ は有界な逆作用素をもつ。

証明. $a=1$ の場合に示せばよい。有界線形作用素 $M:H\to H$ を

$$Mf := f_1-Cf_1+f_2$$

と定めると，M は有界な逆作用素

$$M^{-1}f=f_1+Cf_1+f_2$$

をもつ。有界線形作用素 $N:H\to H$ を

$$Nf := f_1-Bf_2+f_2$$

と定めると，N は有界な逆作用素

$$N^{-1}f=f_1+Bf_2+f_2$$

をもつ。このとき，

$$MANf=MA(f_1-Bf_2+f_2)=M(f_1+Cf_1-CBf_2+Df_2)=f_1+(D-CB)f_2$$

M, N は有界な逆作用素をもつから，A が有界な逆作用素をもつことと $D-CB$ が有界な逆作用素をもつことは同値である。（証明終）

補題 2.1 より，$(\alpha P+\beta Q)^*(\alpha P+\beta Q)-\lambda I$ が有界な逆作用素をもつ必要十分条件は

$$(\lambda-|\alpha|^2)(\lambda-|\beta|^2)I-\lambda|\alpha-\beta|^2T^*T$$

が有界な逆作用素をもつことである。従って，$\lambda>\max\{|\alpha|^2,|\beta|^2\}$ のとき，次の同値性が成り立つ。

$$\lambda\in\sigma((\alpha P+\beta Q)^*(\alpha P+\beta Q))\Longleftrightarrow\frac{(\lambda-|\alpha|^2)(\lambda-|\beta|^2)}{\lambda}\in\sigma(|\alpha-\beta|^2T^*T)$$

このとき，

$$f(\lambda):=\frac{(\lambda-|\alpha|^2)(\lambda-|\beta|^2)}{\lambda}$$

と定めると，$\lambda>\max\{|\alpha|^2,|\beta|^2\}$ のとき $f(\lambda)$ は単調増加関数である。このとき，

$$\|(\alpha-\beta)T\|^2=\max\{\lambda;\lambda\in\sigma(|\alpha-\beta|^2T^*T)\}$$

が成り立つことから，

$$\|(\alpha-\beta)T\|^2=f(\|\alpha P+\beta Q\|^2)=\frac{(\|\alpha P+\beta Q\|^2-|\alpha|^2)(\|\alpha P+\beta Q\|^2-|\beta|^2)}{\|\alpha P+\beta Q\|^2}$$

が成り立つ。特に $\alpha=1,\beta=0$ のとき，

$$\|T\|^2=\|P\|^2-1$$

が成り立つから，

$$|\alpha-\beta|^2(\|P\|^2-1)=f(\|\alpha P+\beta Q\|^2)=\frac{(\|\alpha P+\beta Q\|^2-|\alpha|^2)(\|\alpha P+\beta Q\|^2-|\beta|^2)}{\|\alpha P+\beta Q\|^2}.$$

よって

$$\|\alpha P+\beta Q\|^4-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\alpha-\beta|^2(\|P\|^2-1)\right)\|\alpha P+\beta Q\|^2+|\alpha\beta|^2=0.$$

よって

$$\begin{aligned}&2\|\alpha P+\beta Q\|^2\\=\;&|\alpha|^2+|\beta|^2+|\alpha-\beta|^2(\|P\|^2-1)+\sqrt{(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\alpha-\beta|^2(\|P\|^2-1))^2-4|\alpha\beta|^2}.\end{aligned}$$

このとき $\sqrt{2(a+\sqrt{b})}=\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}$ より，

$$\begin{aligned}&2\|\alpha P+\beta Q\|\\=\;&\sqrt{|\alpha-\beta|^2(\|P\|^2-1)+(|\alpha|+|\beta|)^2}+\sqrt{|\alpha-\beta|^2(\|P\|^2-1)+(|\alpha|-|\beta|)^2}.\end{aligned}$$

よって $(FKM1)$ が成り立つ。

第 3 章. 定理 1.1 の証明

先に補題 3.1 〜 3.5 を示し，それらを用いて定理 1.1 を証明する。

補題 3.1 定義 1.2 における $F(x)$ の定義式の infimum は attain する。

証明. $\{k_n\}$ を

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \left\| G(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k_n) \right\|_\infty$$

を満たす H^∞ 関数列とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left\| G(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k_n) \right\|_\infty \le F(x) + \varepsilon, \quad (n \ge n_0)$$

を満たす自然数 n_0 が存在する。もし $n \ge n_0$ ならば，$\|k_n\|_\infty \le F(x) + \varepsilon + \|x - \alpha\bar{\beta}\|_\infty < \infty$ となる。H^∞ の閉球は L^∞ で $*$弱コンパクト (cf. [5, p.197]) であるから，部分列 $\{k_{n_j}\}$ と $k_0 \in H^\infty$ が存在して

$$\lim_{j\to\infty} (k_{n_j}, g) = (k_0, g), \quad (g \in L^1)$$

を満たす。このとき，H^∞ 関数列 $\{h_n\}$ が存在して各 h_n は k_{n_j} の 凸 1 次結合 であり

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - k_0\|_{L^2} = 0$$

を満たす (cf. [13, p.160, Problem 6])。よって，部分列 $\{h_{n_j}\}$ が存在して

$$\lim_{j\to\infty} |k_0(\zeta) - h_{n_j}(\zeta)| = 0, \quad (a.e. \zeta \in T)$$

を満たす (cf. [11, p.68, Theorem 3.12])。よって，非負数 $\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,m_j}$ が存在して，$\lambda_{j,1} + \ldots + \lambda_{j,m_j} = 1$ かつ

$$h_{n_j} = \lambda_{j,1} k_{n_1} + \ldots + \lambda_{j,m_j} k_{n_{m_j}}$$

を満たす。$y = a^2 + \sqrt{t^2 + b^2}$ は t の凸関数であるから，

$$\begin{aligned}
G(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}h_{n_j}) &= G\left(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}\sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{j,i} k_{n_i}\right) \\
&= G\left(\sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{j,i}(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k_{n_i})\right) \\
&\le G\left(\sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{j,i}|x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k_{n_i}|\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{j,i} G(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k_{n_i}) \\
&\le \sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{j,i}(F(x) + \varepsilon) \\
&= F(x) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

このとき，$g \in L^1$ が存在して $\|g\|_{L^1} = 1$ かつ

$$\left\|G(x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_0)\right\|_\infty \leq \left|\left(G(x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_0), g\right)\right| + \varepsilon.$$

Lebesgue の定理より，

$$\begin{aligned}\left|\left(G(x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_0), g\right)\right| &= \lim_{j\to\infty}\left|\left(G(x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}h_{n_j}), g\right)\right| \\ &\leq \liminf_{j\to\infty}\left\|G(x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}h_{n_j})\right\|_\infty \\ &\leq F(x)+\varepsilon.\end{aligned}$$

よって

$$F(x) \leq \left\|G(x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_0)\right\|_\infty \leq F(x)+2\varepsilon.$$

ここで $\varepsilon \to 0$ とし，等号が成り立ち，定義 1.2 における $F(x)$ の定義式の infimum は $k = k_0$ で attain する。（証明終）

補題 3.2 $F(x)$ は実変数 x の凸関数である。（よって，連続関数である）

証明． λ と μ は $\lambda + \mu = 1$ を満たす非負数とする。$y = a^2 + \sqrt{t^2+b^2}$ は $t \geq 0$ において，非負値，単調増加の凸関数であるから，

$$\begin{aligned}\lambda F(x)+\mu F(y) &= \lambda \inf_{k_1\in H^\infty}\left\|G(x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_1)\right\|_\infty + \mu \inf_{k_2\in H^\infty}\left\|G(y-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_2)\right\|_\infty \\ &\geq \inf_{k_1\in H^\infty}\inf_{k_2\in H^\infty}\left\|\lambda G(x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_1)+\mu G(y-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_2)\right\|_\infty \\ &\geq \inf_{k_1\in H^\infty}\inf_{k_2\in H^\infty}\left\|G\left(\lambda|x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_1|+\mu|y-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k_2|\right)\right\|_\infty \\ &\geq \inf_{k_1\in H^\infty}\inf_{k_2\in H^\infty}\left\|G\left(\lambda x+\mu y-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}(\lambda k_1+\mu k_2)\right)\right\|_\infty \\ &\geq \inf_{k\in H^\infty}\left\|G(\lambda x+\mu y-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k)\right\|_\infty \\ &= F(\lambda x+\mu y).\end{aligned}$$

補題 3.3 もし $x \geq \max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}$ ならば

$$G\left(\sqrt{x-|\alpha|^2}\sqrt{x-|\beta|^2}\right) = x.$$

証明． $x \geq \max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\} \geq (|\alpha|^2+|\beta|^2)/2$ かつ

$$\left(x-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2 = (x-|\alpha|^2)(x-|\beta|^2),$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} x &= \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}+\sqrt{(x-|\alpha|^2)(x-|\beta|^2)+\left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2} \\ &= G\left(\sqrt{x-|\alpha|^2}\sqrt{x-|\beta|^2}\right). \end{aligned}$$

補題 3.4 $F(x) \le x$ の必要十分条件は $x \ge \|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(W)}$ である。

証明.　（十分性） $x \ge \|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(W)}$ のとき，

$$\|S_{\alpha,\beta}f\|^2_{L^2(W)} \le x\|f\|^2_{L^2(W)}, \quad (f \in A+\overline{A_0}).$$

よって

$$\|\alpha f_1+\beta f_2\|^2_{L^2(W)} \le x\|f_1+f_2\|^2_{L^2(W)}, \quad (f_1 \in A, f_2 \in \overline{A_0}).$$

ただし A は円板環（負の Fourier 係数が零であるような単位円周上の連続関数の全体），$\overline{A_0}$ は非負の Fourier 係数が零であるような単位円周上の連続関数の全体を表す。このとき，

$$\begin{aligned} W_1 &:= (x-|\alpha|^2)W, \\ W_2 &:= (x-|\beta|^2)W, \\ W_3 &:= (x-\alpha\bar{\beta})W, \end{aligned}$$

と定めると，$f_1 \in A$ と $f_2 \in \overline{A_0}$ について

$$(W_1f_1, f_1)+(W_2f_2, f_2)+2Re(W_3f_1, f_2) \ge 0$$

が成り立つ。従って，Cotlar-Sadosky の lifting 定理 [1] より，$W_1 \ge 0, W_2 \ge 0$ かつ $g \in H^1$ が存在して

$$|W_3-g|^2 \le W_1W_2$$

を満たす。このことから $x \ge \max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}$ かつ

$$|(x-\alpha\bar{\beta})W-g|^2 \le (x-|\alpha|^2)(x-|\beta|^2)W^2$$

よって

$$\left|x-\alpha\bar{\beta}-\frac{g}{W}\right|^2 \le (x-|\alpha|^2)(x-|\beta|^2).$$

ここで

$$\frac{g}{W}=\frac{g}{|h|^2}=\frac{h}{\bar{h}}\frac{g}{h^2}=\bar{\phi}\frac{g}{h^2}.$$

このとき $k := g/h^2$ と定めると $k \in H^\infty$ かつ

$$|x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k|^2 \le (x - |\alpha|^2)(x - |\beta|^2)$$

が成り立つ。補題 3.3 より,

$$G(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k) \le G\left(\sqrt{x - |\alpha|^2}\sqrt{x - |\beta|^2}\right) = x.$$

よって $F(x) \le x$.

（必要性） $F(x) \le x$ のとき，補題 3.1 より $F(x)$ の定義式の infimum は attain する。よって $k \in H^\infty$ が存在して

$$G(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k) \le x$$

を満たす。補題 3.3 より

$$G(x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k) \le G\left(\sqrt{x - |\alpha|^2}\sqrt{x - |\beta|^2}\right).$$

よって

$$|x - \alpha\bar{\beta} - \bar{\phi}k| \le \sqrt{x - |\alpha|^2}\sqrt{x - |\beta|^2}.$$

このとき $\phi = \bar{h}/h$ かつ $W = |h|^2$ であるから

$$\left|(x - \alpha\bar{\beta})W - h^2k\right| \le \sqrt{x - |\alpha|^2}\sqrt{x - |\beta|^2}W$$

が成り立つ。このとき $h^2k \in H^1$ であるから

$$\begin{aligned}
& x\|f_1 + f_2\|^2_{L^2(W)} - \|\alpha f_1 + \beta f_2\|^2_{L^2(W)} \\
= \ & x\left(W(f_1 + f_2), f_1 + f_2\right) - \left(W(\alpha f_1 + \beta f_2), \alpha f_1 + \beta f_2\right) \\
= \ & \left((x - |\alpha|^2)Wf_1, f_1\right) + \left((x - |\beta|^2)Wf_2, f_2\right) + 2Re\left((x - \alpha\bar{\beta})Wf_1, f_2\right) \\
\ge \ & 2\left(\sqrt{x - |\alpha|^2}\sqrt{x - |\beta|^2}W|f_1|, |f_2|\right) - 2\left|\left((x - \alpha\bar{\beta})Wf_1, f_2\right)\right| \\
= \ & 2\left(\sqrt{x - |\alpha|^2}\sqrt{x - |\beta|^2}W|f_1|, |f_2|\right) - 2\left|\left(\left((x - \alpha\bar{\beta})W - h^2k\right)f_1, f_2\right)\right| \\
\ge \ & 2\left(\sqrt{x - |\alpha|^2}\sqrt{x - |\beta|^2}W|f_1|, |f_2|\right) - 2\left(\left|(x - \alpha\bar{\beta})W - h^2k\right||f_1|, |f_2|\right) \\
\ge \ & 0, \quad (f_1 \in A, f_2 \in \overline{A_0}).
\end{aligned}$$

従って $x \ge \|S_{\alpha,\beta}\|^2_{L^2(W)}$ （証明終）

補題 3.5　もし $x \geq 0$ ならば

$$F(x) \leq x \inf_{k \in H^\infty} \|\phi - k\|_\infty + 2\max\{\|\alpha\|_\infty^2, \|\beta\|_\infty^2\}.$$

証明.　$\sqrt{|a|^2+|b|^2} \leq |a|+|b|$ が成り立つから,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \inf_{k\in H^\infty} \left\| \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} + \sqrt{|x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2} \right\|_\infty \\
&\leq \inf_{k\in H^\infty} \left\| \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} + |x-\alpha\bar{\beta}-\bar{\phi}k| + \left|\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right| \right\|_\infty \\
&\leq \inf_{k\in H^\infty} \|x-\bar{\phi}k\|_\infty + \left\|\max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\} + |\alpha\beta|\right\|_\infty \\
&\leq x \inf_{k\in H^\infty} \|\phi - k\|_\infty + 2\|\max\{|\alpha|, |\beta|\}\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

以上の補題を用いると，定理 1.1 の証明は次のようになる。

(1) の証明：　$s := \|S_{\alpha,\beta}\|_{L^2(W)}^2$ と定める。このとき $x=s$ が方程式 $F(x)=x$ の解であることを示す。補題 3.4 より，$s \geq F(s)$ が成り立つ。補題 3.2 より，$F(x)$ は x の連続関数である。補題 3.4 より，

$$F(x) > x, \quad (x < s)$$

が成り立つから，

$$s \geq F(s) = \lim_{x\to s} F(x) = \lim_{x\to s-0} F(x) \geq \lim_{x\to s-0} x = s$$

が成り立つ。従って，$F(s)=s$ が成り立つ。

(2) の証明：　$t \neq s$ かつ $F(t)=t$ を満たす t が存在したと仮定する。補題 3.4 より，$t > s$ となる。このとき x を $x > t$ なる任意の実数とする。このとき $s < t < x$ が成り立つから，非負数 λ, μ が存在して $\lambda + \mu = 1$ かつ $t = \lambda s + \mu x$ を満たす。補題 3.2 より

$$F(t) = F(\lambda s + \mu x) \leq \lambda F(s) + \mu F(x)$$

が成り立つ。このとき $F(s)=s$ かつ $F(t)=t$ が成り立つから,

$$t \leq \lambda s + \mu F(x)$$

が成り立つ。従って，

$$\mu x = t - \lambda s \leq \mu F(x)$$

が成り立つ。このとき $\mu > 0$ であるから，$x \leq F(x)$ が成り立つ。このとき $x > s$ であるから，補題 3.4 より，$F(x) \leq x$ が成り立つ。従って，

$$F(x) = x, \quad (x > t)$$

が成り立つ。補題 3.5 より，

$$x \leq x \inf_{k \in H^\infty} \|\phi - k\|_\infty + 2\max\{\|\alpha\|_\infty^2, \|\beta\|_\infty^2\}, \quad (x > t)$$

が成り立つ。従って，

$$\inf_{k \in H^\infty} \|\phi - k\|_\infty \geq 1.$$

これは矛盾。従って，$t \neq s$ かつ $F(t) = t$ を満たす実数 t は存在しない。（証明終）

References

[1] M.Cotlar and C.Sadosky, On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels, Proc. Sym. Pure Math. 35 (1979), 383-407.

[2] I.Feldman, N.Krupnik and A.Markus, On the norm of two adjoint projections, Integral Equations and Operator Theory 14 (1991), 69-90.

[3] I.Gohberg and N.Krupnik, One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, Vols. I,II, Birkhäuser, Basel, 1992.

[4] H.Helson and G.Szegö, A problem in prediction theory, Ann. Mat. Pura Appl. 51 (1960), 107-138.

[5] P.Koosis, Introduction to H_p Spaces, Cambridge U. P., London, 1980.

[6] P.Koosis, Moyennes quadratiques pondérées de fonctions périodiques et de leurs conjuguées harmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris 291 (1980), 255-257.

[7] N.Krupnik, A.Markus and I.Feldman, Norm of a linear combination of projectors in Hilbert space, Funct. Anal. Appl. 23 (1989), 327-329.

[8] T.Nakazi and T.Yamamoto, Weighted norm inequalities for some singular integral operators, J. Funct. Anal. 148 (1997), 279-295.

[9] T.Nakazi and T.Yamamoto, Norms of some singular integral operators and their inverse operators, to appear in J. Operator Theory.

[10] T.Nakazi and T.Yamamoto, Norms of some singular integral operators on weighted L^2 spaces, in preprint.

[11] W.Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1986

[12] I.Spitkovskii, On partial indices of continuous matrix-valued functions, Soviet Math. Doklady 17 (1976), 1155-1159.

[13] A.Taylor and D.Lay, Introduction to Functional Analysis, Reprint ed., Robert E.Krieger Publishing Company, Inc., 1986.

[14] T.Yamamoto, Boundedness of some singular integral operators in weighted L^2 spaces, J. Operator Theory 32 (1994), 243-254.