数理解析研究所講究録
1049巻 1998年 152-156

Some Special Bounded Homomorphisms Of A Uniform Algebra

北大・理学研究科　中路貴彦 (Takahiko Nakazi)

A を compact Hausdorff 空間 X 上の uniform algebra, $C(X)$ は X 上の連続関数の全体とする。$L(H)$ を Hilbert 空間 H 上の bounded linear operator の全体とする。この講演では、A から $L(H)$ への unital bounded homomorphism Φ がいつ $C(X)$ から $L(K)$ への unital bounded homomorhism $\tilde{\Phi}$ へ拡張できるかを問題とする。ここで K は H を含む Hilbert space である。

§1. 問題

$C(X)$ でのノルムは $\|\cdot\|_\infty$ で表わし、$L(H)$ でのノルムは $\|\cdot\|$ で表わす。$\Phi : A \to L(H)$ が unital bounded homomorphism とは、$\Phi(1) = I_H$、linear 、multiplicative かつ $\|\Phi(f)\| \leq \gamma\|f\|_\infty$ を満足するものである。ここで I_H は identity operator であり、$0 < \gamma < \infty$ は定数である。$\tilde{\Phi}$ が Φ の bounded dilation であるとは $\tilde{\Phi} : C(X) \to L(K)$ が unital bounded homomorphism で

$$\Phi(f) = P\tilde{\Phi}(f)|H \quad (f \in A)$$

を満足するときをいう。ここで $K \supset H$ は Hilbert space であり、$P : K \to H$ は orthogonal projection である。

論文を通して、$M(A)$ を A の maximal ideal space とする。$[A + \bar{A}]$ は $A + \bar{A}$ の uniform closure を示すとき、$\dim C(X)/[A + \bar{A}] = n < \infty$ のとき、A は hypo-Dirichlet algebra と呼ばれる。特に $n = 0$ ならば A は Dirichlet algebra と呼ばれる。

$\Phi(A)$ は $L(H)$ の commutative subalgebra であるが、一般には uniform algebra になるとは限らない。Φ の例として沢山あるが、たとえば次の様なものがある。

例

(1) H^2 を A から定義される abstract Hardy space とし、M を H^2 の A-invariant subspace かつ $H = H^2 \ominus M$ とする。$f \in A$ について $S_f y = P(fy)$ $(y \in H)$ とする。ここで P は H^2 から N への orthogonal projection である。$\Phi(f) = S_f$ とすると、Φ は A から $L(H)$ への unital contractive homomorphism である。$K = L^2$、$g \in C(X)$ に対して $M_g z = gz$ $(z \in K)$ かつ $\tilde{\Phi}(g) = M_g$ とすると、$\tilde{\Phi}$ は Φ の contractive dilation となっている。これは Nevanlina-Pick の定理と深く関係している。

(2) $x \in M(A)$ を固定する。$\Phi(f) = f(x)I_H$ $(f \in A)$ とすると、Φ は unital contractive homomorphism である。

(3) P を必ずしも selfadjoint でない projection かつ $Q = I - P$ とする。$\Phi(f) = f(x)P + f(y)Q$ とすると、Φ は unital bounded homomorphism である。

(4) A を disc algebra, $B \in L(H)$ かつ $\|B\| \le 1$ とする。$\Phi(f) = f(B)$ $(f \in A)$ は、von Neuman の定理により、unital contractive homomorphism である。

次の二つの問題は重要で、多くの人々によって研究されている。

問題

I. $\|\Phi\| \le 1$ ならば contractive dilation $\tilde{\Phi}$ が存在するか？
II. $\|\Phi\| < \infty$ 　ならば bounded dilation $\tilde{\Phi}$ が存在するか？

上の問題について、bounded dilation $\tilde{\Phi}$ が存在することと、Φ が completely bounded は同値であるが、更に ある $S \in L(H)$ が存在して、$\|\tilde{\Phi}\| \le 1$ となる $\tilde{\Phi}$ が存在し (すなわち contractive dilation) かつ $S^{-1}\Phi S = P\tilde{\Phi}(f)|H$ $(f \in A)$ とできることと同値であることは良く知られている。

§2. 解答

問題 II については、$\dim H < \infty$ のときは正しい事が知られているが、$\dim H = \infty$ のときは disc algebra に対してさえ成立しない事が、Pisier [14](1996 年) によって最近証明された。以後問題 I に対する解答の歴史について述べる。

1° disc algebra については Nagy [6](1953 年) によって正しい事が示された。

2° bidisc algebra については Ando [2](1963 年) によって正しい事が示された。

3° 一般の polydisc algebra $(n \ge 3)$ について成立しない事が Parrot [13](1970 年) に正しくない事が示された。

4° annulus algebra については Agler [1] (1985 年) によって正しい事が示されたが、証明は難解である。このとき $\dim C(X)/[A + \bar{A}] = 1$ である。

5° $\mathcal{A}$ を disc algebra かつ $A = \{f \in \mathcal{A}\,;f(0) = f(1)\}$ とすると、A については正しい事が Nakazi [11] (1989 年) によって示された。このとき $\dim C(X)/[A + \bar{A}] = 1$ である。

6° Dirichlet algebra については、解析関数環のときに Berger, Lebow や Foias 等によって示されたが、1966 年 に Foias-Suciu [5] によって一般的に示された。

7° 一般の uniform algebra に対して成立することは、$\dim H = 1$ のときは知られていたが、$\dim H \ge 4$ のとき成立しないことは、3° の Parrot の例からわかる。

8° $\dim H = 2$ のとき、Nakazi-Takahashi [12] (1995 年) は一般の uniform algebra について成立することを示した。

finite connected domain 上の解析関数環または一般の hypo-Dirichlet algebra について成立するかどうかは以前として知られていない。また $\dim H = 3$ ならば一般に成立するかどうか知られていないと思われる。

§3. 研究

$\tilde{\Phi}$ が Φ の ρ-dilation $(1 \leq \rho < \infty)$ であるとは、$\tilde{\Phi} : C(X) \to L(K)$ が unital contractive homomorphism で

$$\Phi(f) = \rho P \tilde{\Phi}(f)|H \quad (f \in A_\tau)$$

を満足するときをいう。ここで $K \supset H$ は Hilbert space であり、$P : K \to H$ は orthogonal projection である。また $\tau \in M(A)$ かつ $A_\tau = \{f \in A\,; \tau(f) = 0\}$ である。

$\tilde{\Phi}$ が ρ-dilation ならば bounded dilation $\tilde{\Phi}$ が存在するが、逆は正しくない。f を disc algebra A の元 かつ $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ とし、$\Phi(f) = f(T)$ とする。$T^2 = 0$ となることより $\Phi(f) = f(T) = f(0)I_H + f'(0)T$ となるので、bounded dilation は存在するが、ρ-dilation は存在しない。

問題 I についての研究：

A を hypo-Dirichlet algebra とする。Douglas-Paulsen [4] (1986 年) は $\|\Phi\| \leq 1$ ならば bounded dilation $\tilde{\Phi}$ は存在することを示した。定理 1 はこの結果を多くの自然な hypo-Dirichlet algebra ([9] を参照) に対して強めている。定理 2 は hypo-Dirichlet algebra で問題 I が正しい 3 番目の例を与えている。証明には、A が 2 つの生成元を持つから、§2 の 2° の Ando の定理 [2] を用いる。

$\boxed{\text{定理 1}}$ [10]
$\|\Phi\| \leq 1$ ならば ρ-dilation $\tilde{\Phi}$ が存在する。

$\boxed{\text{定理 2}}$ [11]
$\mathcal{A}$ を disc algebra かつ $A = \{f \in \mathcal{A}\,; f'(0) = 0\}$ のとき、$\|\Phi\| \leq 1$ ならば contractive dilation $\tilde{\Phi}$ が存在する。

問題 II についての研究 ：

A が disc algebra でも成立しないことは Pisier [14] によって証明されたので、$\|\Phi\| < \infty$ よりも強い自然な条件 (必ずしも $\|\Phi\| \leq 1$ が成立しない) を考える必要がある。

$1 \leq \rho < \infty$ に対して、

$$B^\rho = \{f \in A\,; |1 - f| \leq \frac{2\rho}{\rho - 1}(1 - |f|)\}$$

とする。ただし $B^1 = \{f \in A\,; \|f\|_\infty \leq 1\}$ とする。$f \in B^\rho$ とは ρ よりきまる ある Stolz 領域にその値域があることを示している。

Φ が ρ-contraction とは、

$$\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_\infty \quad (f \in B^\rho \cap A_\tau)$$

が成立することをいい、$w_\rho(\Phi) \leq 1$ と書く。$\rho = 1$ のとき ρ-contractive は contractive に他ならない。もし $\rho > 1$ ならば、$\{\Phi\,;\|\Phi\| \leq 1\} \subsetneq \{\Phi\,; w_\rho(\Phi) \leq 1\} \subsetneq \{\Phi\,;\|\Phi\| \leq 2\rho - 1\}$。次の定理 3 は 2-contraction は 1-contraction と同様に自然なものであることを示している。これは Berger [3] によって A が disc algebra のときに示されたものである。

定理 3 [10]
A を任意の uniform algebra とする。Φ が 2-contraction である必要十分条件は、任意の $f \in A_\tau$ が $\|f\|_\infty \leq 1$ のとき、

$$|\langle \Phi(f)y, y\rangle| \leq \|y\|^2 \quad (y \in H)$$

を満足することである。

我々は次の自然な問を発することができる。これは disc algebra について、Nagy-Foias [7] によって正しい事が示された。次の定理 4 はそれが一般の Dirichlet algebra に対して正しい事を示しているが、証明には Naimark の定理 ([15] を参照) を用いている。定理 5 は $\dim H \leq 2$ ならば一般の uniform algebra について正しい事を示している。

定理 4 [10]
A が Dirichlet algebra のとき、$w_\rho(\Phi) \leq 1$ ならば ρ-dilation $\tilde{\Phi}$ が存在する。

定理 5 [11]
$\dim H \leq 2$ のとき、一般の uniform algebra A に対して、$w_\rho(\Phi) \leq 1$ ならば ρ-dilation $\tilde{\Phi}$ が存在する。
(証明のあらすじ)
$\dim H = 1$ のとき、ある $x \in M(A)$ が存在して $\ker \Phi = \{f \in A\,; f(x) = 0\}$ となる。$\dim H = 2$ のとき、ある $x, y \in M(A)$ $(x \neq y)$ が存在して $\ker \Phi = \{f \in A\,; f(x) = f(y) = 0\}$ となるか、ある $x \in M(A)$ と x における bounded point derivation が存在して $\ker \Phi = \{f \in A\,; f(x) = \delta(f) = 0\}$ となる。$\dim H \leq 2$ のとき、disc algebra $\mathcal{A}$ から $L(H)$ への unital bounded homomorphis Ψ が存在して $A/\ker \Phi \cong \mathcal{A}/\ker \Psi$ (isometrically isomorphic) とできることより、定理 5 を用いて Ψ が ρ-dilation を持つから、Φ もまた ρ-dilation を持つことを示すことができる。

References

1. J.Agler, Rational dilation on an annulus, Ann. of Math., 121(1985), 537-564.

2. T.Ando, On a pair of commutative contractions, Acta Sci Math., 24(1963), 88-90.

3. C.A.Berger, A strange dilation theorem, Notices Amer. Math. Soc., 12(1965), 590.

4. R.G.Douglas and V.I.Paulsen, Completely bounded maps and hypo-Dirichlet algebras, Acta Sci. Math., 50(1986), 143-157.

5. C.Foias and I.Suciu, Szegő-measures and spectral theory in Hilbert spaces, Rev. Roum. Math. Pures et appl. 11(1966), 147-159.

6. B.Sz.-Nagy, Sur les contractions de I'espace de Hilbert, Acta Sci. Math., 15(1953), 87-92.

7. B.Sz.-Nagy and C.Foias, On certain classes of power bounded operators in Hilbert space, Acta Sci. Math. 27(1966), 17-25.

8. T.Nakazi, A spectral dilation of some non-Dirichlet algebra, Acta Sci. Math., 53(1989), 119-122.

9. T.Nakazi, ρ-dilations and hypo-Dirichlet algebras, Acta Sci. Math., 56(1992), 175-181.

10. T.Nakazi, Some special bounded homomorphisms of uniform algebras and dilations, in preprint.

11. T,Nakazi, Some special completely bounded homomorphisms of uniform algebras, in preparation.

12. T.Nakazi and K.Takahashi, Two-dimemsional representations of uniform algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 123(1995), 2777-2784.

13. S.Parrot, Unitary dilations for commuting contractions, Pacific J. Math. 34(1970), 481-490.

14. G.Pisier, A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction, in preprint.

15. I.Suciu, Function Algebras, Editura Academiej Republicii Socialiste România, (Bucuresti, 1973).