

非有界被覆面上の正值調和関数

大同工大 瀬川重男 (Shigeo Segawa)
京都産大・理 正岡弘照 (Hiroaki Masaoka)

1. W を Green 関数が存在する Riemann 面とする. W 上の正值調和関数全体を $HP(W)$ で表す. よく知られているように, 各 $h \in HP(W)$ は W の minimal Martin 境界 Δ_1 上の正測度 μ と W 上の Martin 核 k_p により,

$$(1) \quad h(z) = \int_{\Delta_1} k_p(z) d\mu(p)$$

と積分表現される (cf. [C-C], [HL]). $W \in O_G$ ($\Leftrightarrow W$ 上の Green 関数が存在しない) の場合, W の局所円板 U をとり, $HP(W, U) = \{h \in HP(W \setminus \bar{U}) \cap C(W \setminus U) : h|_{\partial U} = 0\}$ を考える. $HP(W, U)$ の元も, $W \setminus \bar{U}$ 上の Martin 核を使って, 同様に積分表現される. このように, $HP(W)$ または $HP(W, U)$ の構造を解析するためには, Δ_1 を調べるのが本質的である.

開 Riemann 面 R の m 葉非有界被覆面 ($1 < m < \infty$) 全体を $\mathcal{E}_m(R)$ とする. 本論の主目的は, R と $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ の minimal Martin 境界の関係を調べることである. $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ に対し, $\pi = \pi_{\tilde{R}}$ を \tilde{R} から R への射影, R^* (resp. \tilde{R}^*) を R (resp. \tilde{R}) の Martin compact 化とし, R (resp. \tilde{R}) の Martin 境界を $\Delta = \Delta^R$ (resp. $\tilde{\Delta} = \Delta^{\tilde{R}}$) で表す. このとき, $\pi_{\tilde{R}}$ の \tilde{R}^* への連続拡張 $\pi^* = \pi_{\tilde{R}}^*$ が存在する (命題 4). R (resp. \tilde{R}) の minimal Martin 境界を $\Delta_1 = \Delta_1^R$ (resp. $\tilde{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}$) で表す. 各 $p \in \Delta$ に対し, $\tilde{\Delta}_1(p) = \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p) = \pi_{\tilde{R}}^{*-1}(p) \cap \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}$ とおき $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)$ の濃度 (個数) を $\nu(p) = \nu_{\tilde{R}}(p)$ で表す. 主結果は次の通りである.

定理 1. $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ とする.

- (i) $p \in \Delta^R \setminus \Delta_1^R$ かつそのときに限り, $\nu_{\tilde{R}}(p) = 0$.
- (ii) $p \in \Delta_1^R$ のとき, $1 \leq \nu_{\tilde{R}}(p) \leq m$.

定理 2. $R \notin O_G$, $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ のとき, $HP(\tilde{R}) = HP(R) \circ \pi$ となるための必要十分条件は, 任意の $p \in \Delta_1^R$ に対して $\nu_{\tilde{R}}(p) = 1$ となることである.

各 $p \in \Delta_1^R$ に対して, R の連結開集合 M で $R \setminus M$ が p で minimally thin (cf. 4 節) であるものの class を $\mathcal{M}_R(p)$ で表す. さらに, 各 $M \in \mathcal{M}_R(p)$ に対し, $\pi_{\tilde{R}}^{-1}(M)$ の成分の個数を $n_{\tilde{R}}(M)$ で表す. このとき, $\nu_{\tilde{R}}(p)$ は次のように決定される.

定理 3. $p \in \Delta_1^R$, $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ に対し, $\nu_{\tilde{R}}(p) = \max_{M \in \mathcal{M}_R(p)} n_{\tilde{R}}(M)$.

2. 開 Riemann 面 $R (\notin O_G)$ と $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ に対し, $g(\cdot, \cdot)$ (resp. $\tilde{g}(\cdot, \cdot)$) を R (resp. \tilde{R}) 上の Green 関数とする. 定点 $a \in R$ (resp. $\pi_{\tilde{R}}(\tilde{a}) = a$ となる \tilde{a}) に対し, $k_z(\cdot) = g(\cdot, z)/g(a, z)$ (resp. $\tilde{k}_{\tilde{z}}(\cdot) = \tilde{g}(\cdot, \tilde{z})/\tilde{g}(\tilde{a}, \tilde{z})$) を z (resp. \tilde{z}) を極とする Martin 核と言う. $\{f_w(\cdot) : f_w(\cdot) = k(w), w \in R\}$ の各関数が $[0, \infty]$ 値連続拡張をもつ R の最小の compact 化を R の Martin compact 化と言う (cf. [C-C], [HL]). また, $\Delta = \Delta^R = R^* \setminus R$ (resp. $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}^{\tilde{R}} = \tilde{R}^* \setminus \tilde{R}$) を R (resp. \tilde{R}) の Martin 境界と言う. $p \in \Delta^R$ に対し, k_p が minimal 関数 ($\Leftrightarrow h \in HP(R)$ が $0 \leq h \leq k_p$ をみたすとき, $h = ck_p$ となる正定数 c が存在) であるとき, p を minimal (境界) 点であると言う. R (resp. \tilde{R}) の minimal 点全体 $\Delta_1 = \Delta_1^R$ (resp. $\tilde{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}$) を minimal 境界と言う. $R \in O_G$ の場合, R の局所円板 U をとり (このとき, $R \setminus \bar{U} \notin O_G$), $(R \setminus \bar{U})^* \cup \bar{U}$ を R の Martin compact 化と言う. $R \in O_G$ の場合にもほぼ同様に議論できるので, 以下では簡単のために, $R \notin O_G$ として議論する.

\tilde{R} 上の函数 \tilde{u} に対して, R 上の函数 $\varphi[\tilde{u}]$ を

$$\varphi[\tilde{u}](\zeta) = \sum_{\tilde{\zeta} \in \pi^{-1}(\zeta)} n_{\tilde{\zeta}} \tilde{u}(\tilde{\zeta})$$

で定義する ($n_{\tilde{\zeta}}$ は \tilde{R} の $\tilde{\zeta}$ における分岐の重複度 (multiplicity)). 明らかに, \tilde{u} が調和 (resp. 優調和) ならば $\varphi[\tilde{u}]$ も調和 (resp. 優調和) である. また, Green 函数については

$$(2) \quad \varphi[\tilde{g}_{\tilde{p}}] = g_p \quad (\pi(\tilde{p}) = p).$$

命題 4. $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ から R への射影 $\pi_{\tilde{R}}$ に対し, その \tilde{R}^* への連続拡張 $\pi_{\tilde{R}}^*$ が unique に存在する. 特に, $\pi_{\tilde{R}}^*(\tilde{\Delta}^{\tilde{R}}) = \Delta^R$ である.

証明. 連続拡張 $\pi_{\tilde{R}}^*$ の存在を示せば, 残りの主張は明らかである. 任意の $\tilde{p} \in \tilde{\Delta}^{\tilde{R}}$ に対して, \tilde{p} に収束する \tilde{R} 内の 2 つの点列 $\{\tilde{p}_{in}\}$ ($i = 1, 2$) をとり $p_{in} = \pi(\tilde{p}_{in})$ とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{in} = p_i (\in \Delta^R)$ と仮定して, $p_1 = p_2$ を示せばよい. 一般に, $\pi(\tilde{q}) = q$ とするとき, (2) より

$$\varphi[\tilde{k}_{\tilde{q}}] = \frac{1}{\tilde{g}_{\tilde{q}}(\tilde{a})} \varphi[\tilde{g}_{\tilde{q}}] = \frac{g_q}{\tilde{g}_{\tilde{q}}(\tilde{a})} = c_{\tilde{q}} k_q \quad (c_{\tilde{q}} = \frac{g_q(a)}{\tilde{g}_{\tilde{q}}(\tilde{a})}).$$

したがって, $\varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}_{in}}] = c_{in} k_{p_{in}}$ をみたす正定数 c_{in} が存在する. これと $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}_{in}}] = \varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}}]$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{p_{in}} = k_{p_i}$ ($i = 1, 2$) より, 正定数 c_1, c_2 が存在して, $c_1 k_{p_1} = c_2 k_{p_2}$ となる. したがって, $k_{p_1}(a) = k_{p_2}(a)$ より $k_{p_1} = k_{p_2}$, 即ち $p_1 = p_2$ となる. \square

命題 4 の証明を読み返せば, 次のことは容易に確かめられる.

補題 5. 各 $\tilde{p} \in \tilde{R}^*$ に対して, 正定数 c が存在して

$$(3) \quad \varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}}] = ck_p \quad (\pi^*(\tilde{p}) = p).$$

$R(\notin O_G)$ 上の正値優調和関数全体を \mathcal{S}_R で表す. $s \in \mathcal{S}_R$ と $E(\subset R)$ に対し,

$${}^R\hat{R}_s^E(z) := \liminf_{w \rightarrow z} \inf \{u(w) : u \in \mathcal{S}_R, u \geq s \text{ on } E\}$$

を E に関する s の balayage と言う (balayage の基本事項については, [C-C], [HL], [B], [B-H] 等を参照のこと). 次の補題は, 簡単ながら有用である (cf. [M-S1]).

補題 6. R の部分集合 E と R 上の正値優調和関数 s 及び $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ に対して,

$$(4) \quad \tilde{R}\hat{R}_{s \circ \pi_{\tilde{R}}}^{\pi_{\tilde{R}}^{-1}(E)} = {}^R\hat{R}_s^E \circ \pi_{\tilde{R}}.$$

3. 定理 1 及び 2 の証明のためには, 以下の命題 7 及び 8 を示せば良い. 実際, 定理 1 は命題 7 及び 8 から明らかである. また, 定理 2 は命題 8 と Martin の積分表現定理 (1) から容易に従う. 各 $p \in \Delta^R$ と $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ に対して, $\tilde{\Delta}_1(p) = \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p) = \pi_{\tilde{R}}^{*-1}(p) \cap \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}$ とおくこと及び $\tilde{\Delta}_1(p)$ の濃度 (個数) を $\nu(p) = \nu_{\tilde{R}}(p)$ で表すことを再言しておく. 本節と次節では, 簡単のため, \tilde{R} 上の balayage $\tilde{R}\hat{R}_s^{\tilde{E}}$ を単に $\hat{R}_s^{\tilde{E}}$ と表し, $\pi_{\tilde{R}} = \pi$ とおくことにする.

命題 7. $p \in \Delta^R - \Delta_1^R$, $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ とする. このとき, $n_{\tilde{R}}(p) = 0$.

証明. $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p) \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く. $\tilde{p} \in \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)$ とする. (3) より, $\varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}}] = ck_p$ ($c > 0$), 故に

$$\tilde{k}_{\tilde{p}} \leq ck_p \circ \pi.$$

任意の $r (> 0)$ に対し $F_r = \{q \in R^* : d(p, q) \leq r\}$ ($d(\cdot, \cdot)$ は R^* 上の距離) とおくと, $\pi^{*-1}(F_r)$ は \tilde{p} の近傍である. したがって $E_r = F_r \cap R$ とおくと, (4) より

$$(5) \quad {}^R\hat{R}_{k_p}^{E_r} \circ \pi = \hat{R}_{k_p \circ \pi}^{\pi^{-1}(E_r)} \geq c^{-1} \hat{R}_{\tilde{k}_{\tilde{p}}}^{\pi^{-1}(E_r)} = c^{-1} \tilde{k}_{\tilde{p}}.$$

一方, Martin 基本定理より,

$$k_p = \int k_q d\mu(q)$$

となるような Δ_1^R 上の正測度 μ が存在する.

$$h_r = \int_{\Delta_1^R \cap F_r} k_q d\mu(q), \quad f_r = k_p - h_r = \int_{\Delta_1^R - F_r} k_q d\mu(q)$$

とおくとき, (5) より

$${}^R\hat{R}_{k_p}^{E_r} \circ \pi = {}^R\hat{R}_{h_r}^{E_r} \circ \pi + {}^R\hat{R}_{f_r}^{E_r} \circ \pi \geq c^{-1} \tilde{k}_{\tilde{p}}.$$

ここで, ${}^R\hat{R}_{f_r}^{E_r} = \int_{\Delta_1^{R-E_r}} {}^R\hat{R}_{k_q}^{E_r} d\mu(q)$ は R 上の potential である (cf. e.g. [HL]) から, ${}^R\hat{R}_{f_r}^{E_r} \circ \pi$ は \tilde{R} 上の potential である. 故に

$$h_r \circ \pi \geq {}^R\hat{R}_{h_r}^{E_r} \circ \pi \geq c^{-1}\tilde{k}_{\tilde{p}}.$$

ところが, $p \in \Delta^R - \Delta_1^R$ より $\lim_{r \downarrow 0} h_r = 0$ であるから, これは矛盾である. \square

命題 8. $p \in \Delta_1^R$, $\tilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ とする. このとき, $1 \leq \nu_{\tilde{R}}(p) \leq m$. さらに, $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p) = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n\}$ とおくと, 正定数 c_1, \dots, c_n が存在して

$$(6) \quad k_p \circ \pi = c_1 \tilde{k}_{\tilde{p}_1} + \dots + c_n \tilde{k}_{\tilde{p}_n}.$$

証明. 先ず, $\nu_{\tilde{R}}(p) \leq m$ を示す (cf. [H]). $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)$ の任意の有限部分集合 $\{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n\}$ に対し, $n \leq m$ を示せばよい. (3) より, 正定数 b_i ($i = 1, \dots, n$) が存在して $\varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}_i}] = b_i k_p$, したがって $b_i^{-1} \tilde{k}_{\tilde{p}_i} \leq k_p \circ \pi$ となる. これより

$$(7) \quad k_p \circ \pi \geq \sum_{i=1}^n b_i^{-1} \tilde{k}_{\tilde{p}_i}$$

となる. 故に

$$m k_p = \varphi[k_p \circ \pi] \geq \varphi\left[\sum_{i=1}^n b_i^{-1} \tilde{k}_{\tilde{p}_i}\right] = \sum_{i=1}^n b_i^{-1} \varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}_i}] = \sum_{i=1}^n k_p = n k_p,$$

即ち $m \geq n$ が得られた.

次に, $\nu_{\tilde{R}}(p) \geq 1$ を示す. Martin 基本定理により

$$k_p \circ \pi = \int \tilde{k}_{\tilde{q}} d\tilde{\mu}(\tilde{q})$$

となる $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}$ 上の正測度 $\tilde{\mu}$ が存在する. $\tilde{\mu}$ の support が $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)$ に含まれることを示せばよい. F_r , E_r は命題 7 の証明と同様とし, さらに

$$\tilde{f}_r = \int_{\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}} - \pi^{*-1}(F_r)} \tilde{k}_{\tilde{q}} d\tilde{\mu}(\tilde{q})$$

とおく. 各 $\tilde{q} \in \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}} - \pi^{*-1}(F_r)$ に対し $\hat{R}_{\tilde{k}_{\tilde{q}}}^{\tilde{R} - \pi^{-1}(E_r)} = \tilde{k}_{\tilde{q}}$ だから, $\hat{R}_{\tilde{f}_r}^{\tilde{R} - \pi^{-1}(E_r)} = \tilde{f}_r$ である (cf. e.g. [HL]). 故に, (4) を使って

$$\tilde{f}_r = \hat{R}_{\tilde{f}_r}^{\tilde{R} - \pi^{-1}(E_r)} \leq \hat{R}_{k_p \circ \pi}^{\tilde{R} - \pi^{-1}(E_r)} = {}^R\hat{R}_{k_p}^{R-E_r} \circ \pi.$$

ところが ${}^R\hat{R}_{k_p}^{R-E_r}$ は R 上の potential であるから, ${}^R\hat{R}_{k_p}^{R-E_r} \circ \pi$ は \tilde{R} 上の potential である. 故に $\tilde{f}_r = 0$, 即ち $\tilde{\mu}$ の support は $\tilde{\Delta}_1 \cap \pi^{*-1}(F_r)$ に含まれる. $r > 0$ は任意だから, $\tilde{\mu}$ の support は $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)$ に含まれることになる.

最後に, $\tilde{\mu}$ の support は $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)$ に含まれることと (7) より, $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p) = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n\}$ とおけば, $k_p \circ \pi = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{k}_{\tilde{p}_i}$ ($c_i > 0$) となる. \square

4. ここでは定理 3 の証明を与える. まず, minimally thin と minimal fine neighborhood の定義を与える.

定義. $p \in \Delta_1^R$ とする. R の部分集合 E が p で **minimally thin** であるとは, ${}^R\hat{R}_{k_p}^E \neq k_p$ が成立する (${}^R\hat{R}_{k_p}^E$ が potential であることと同値) ことである. また, R の部分集合 M に対し, $M \cup \{p\}$ が p の **minimal 細近傍** であるとは, $R - M$ が p で minimally thin となることである.

この定義と balayage の基本性質から, 次のことは容易に分かる.

事実 (A). R の部分集合 E_1, E_2 が $p \in \Delta_1^R$ で **minimally thin** であるとき, $E_1 \cup E_2$ は p で **minimally thin** である. また, $M_1 \cup \{p\}, M_2 \cup \{p\}$ ($M_1, M_2 \subset R$) が p の **minimal fine neighborhood** であるとき, $(M_1 \cap M_2) \cup \{p\}$ は p の **minimal fine neighborhood** である.

1 節で述べたように, R の連結開集合 M で $R \setminus M$ が p での minimally thin となるものの class を $\mathcal{M}_R(p)$ で表し, さらに, 各 $M \in \mathcal{M}_R(p)$ に対し, $\pi^{-1}(M)$ の成分の個数を $n_{\tilde{R}}(M)$ で表す. 定理 3 の証明において, 次の命題 9 は本質的な役割を果たす (cf. [M]).

命題 9. $p \in \Delta_1^R, \tilde{E} \subset \tilde{R}$ とする. このとき, \tilde{E} が $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)$ の各点で **minimally thin** であるための必要十分条件は, $\pi(\tilde{E})$ が p で **minimally thin** であることである.

証明. 必要性: $\{R_n\}$ を R の exhaustion とし, $\tilde{E}_n = \tilde{E} - \pi^{-1}(R_n)$ とおく. 各 $\tilde{p} \in \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)$ に対して $\hat{R}_{\tilde{k}_{\tilde{p}}}^{\tilde{E}}$ は potential だから, (6) より, $\hat{R}_{k_p \circ \pi}^{\tilde{E}} = \sum_{\tilde{p} \in \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)} c_{\tilde{p}} \hat{R}_{\tilde{k}_{\tilde{p}}}^{\tilde{E}}$ も potential である. 故に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{R}_{k_p \circ \pi}^{\tilde{E}_n} = 0$$

となる. これと ${}^R\hat{R}_{k_p}^{\pi(\tilde{E}_n)} \leq \varphi[\hat{R}_{k_p \circ \pi}^{\tilde{E}_n}]$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^R\hat{R}_{k_p}^{\pi(\tilde{E}_n)} = 0$$

となる. これと ${}^R\hat{R}_{k_p}^{\pi(\tilde{E}) \setminus \pi(\tilde{E}_n)}$ が potential であることから, ${}^R\hat{R}_{k_p}^{\pi(\tilde{E})}$ が potential であることが容易に示される. 即ち $\pi(\tilde{E})$ は p で **minimally thin** である.

十分性: ${}^R\hat{R}_{k_p}^{\pi(\tilde{E})}$ が R 上の potential であるから, ${}^R\hat{R}_{k_p}^{\pi(\tilde{E})} \circ \pi$ は \tilde{R} 上の potential である. $\tilde{p} \in \tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p)$ を任意にとり, $k_p \circ \pi \geq c\tilde{k}_{\tilde{p}}$ をみたす正定数 c をとる. (4) より,

$${}^R\hat{R}_{k_p}^{\pi(\tilde{E})} \circ \pi = \hat{R}_{k_p \circ \pi}^{\pi^{-1}(\pi(\tilde{E}))} \geq c\hat{R}_{\tilde{k}_{\tilde{p}}}^{\tilde{E}}.$$

これより, $\widehat{R}_{\tilde{p}}^{\tilde{E}}$ は \tilde{R} 上の potential, 即ち \tilde{E} は \tilde{p} で minimally thin である. \square

定理 3 の証明では, 上の命題 9 の他に次の事実が使われる (cf. [N]).

事実 (B). U を R の開集合で $U \cup \{p\}$ が $p \in \Delta_1^R$ の minimal fine neighborhood となるものとするとき, U の成分 M で $M \cup \{p\}$ が p の minimal fine neighborhood となるものが存在する.

定理 3 の証明. $\nu_{\tilde{R}}(p) = n$, $\tilde{\Delta}_1^{\tilde{R}}(p) = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n\}$ とする.

各 \tilde{p}_i に対し $\tilde{N}_i \cup \{\tilde{p}_i\}$ が \tilde{p}_i の minimal 細近傍となるような互いに素な領域列 $\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_n$ をとり, $\tilde{E} = \bigcap_{i=1}^n \tilde{N}_i^c$ とおく. \tilde{E} は各 \tilde{p}_i で minimally thin であるから, 命題 9 より, $\pi(\tilde{E})$ は p で minimally thin である. 故に, 事実 (B) より, $R \setminus \pi(\tilde{E})$ の連結成分 M で $M \in \mathcal{M}_R(p)$ となるものがある. 命題 9 より, $\pi^{-1}(R \setminus M)$ は各 \tilde{p}_i で minimally thin, 即ち $\pi^{-1}(M) \cup \{\tilde{p}_i\}$ は \tilde{p}_i の minimal 細近傍である. したがって, 事実 (B) より, $\pi^{-1}(M)$ の連結成分 \tilde{O}_i で $\tilde{O}_i \cup \{\tilde{p}_i\}$ が \tilde{p}_i の minimal 細近傍となるものがとれる ($i = 1, \dots, n$). $\tilde{N}_i \cap \tilde{O}_i \neq \emptyset$ と $\pi(\partial \tilde{N}_i) \subset R \setminus M$ より, $\tilde{O}_i \subset \tilde{N}_i$ となることが判る. 故に, $n \leq n_{\tilde{R}}(M)$, 即ち (左辺) \leq (右辺) となる.

次に, $M \in \mathcal{M}_R(p)$ を任意にとり $\pi^{-1}(M)$ の連結成分全体を $\{\tilde{O}_1, \dots, \tilde{O}_k\}$ とおく. 上で述べたように, 各 \tilde{p}_i に対し $\tilde{O}_j \cup \{\tilde{p}_i\}$ が \tilde{p}_i の minimal 細近傍となる \tilde{O}_j が唯 1 つ決まる. この対応で定まる $\{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n\}$ から $\{\tilde{O}_1, \dots, \tilde{O}_k\}$ への写像を τ とする. τ が全射であることを示せば, (左辺) \geq (右辺) となって証明が終わる. $\bigcup_{i=1}^n \tau(\tilde{p}_i) = \tilde{M}$ とおくと, \tilde{M} は各 \tilde{p}_i で minimally thin である. τ が全射でなければ, $\tilde{O}_l \subset \tilde{M}^c$ となる \tilde{O}_l がある. このとき, 命題 9 より, $M = \pi(\tilde{O}_l)$ は p で minimally thin となり $M \in \mathcal{M}_R(p)$ に矛盾する. \square

5. $X = \widehat{C} \setminus \{0\}$, $D = \{|z| < 1\}$ とする. $R = X$ または D のとき, 定理 3 の応用例を与える.

X に対しては, $X^* = \widehat{C}$, $\Delta^X = \Delta_1^X = \{0\}$ であることは容易に確かめられる. $\{a_n\}$ を $1 > a_n \downarrow 0$ をみたす数列とする. $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{2n}, a_{2n-1}]$, $G = X - I$ (resp. $G = D - I$) とおく. G の copy G_1, \dots, G_m を用意し, G_i 上の I の下岸と G_{i+1} 上の I の上岸を (mod m) 溶接してできる $\mathcal{E}_m(X)$ に属する被覆面を \tilde{X}_0 とする.

命題 10. (i) I が $0 \in \Delta_1^X$ で minimally thick (=not thin) ならば, $\nu_{\tilde{X}_0}(0) = 1$;
(ii) I が $0 \in \Delta_1^X$ で minimally thin ならば, $\nu_{\tilde{X}_0}(0) = m$.

証明. (i) $M \in \mathcal{M}_X(0)$ を任意にとる. $X \setminus M$ は $0 \in \Delta_1^X$ で minimally thin である. このとき, $E := \{|z| : z \in X \setminus M\}$ は $0 \in \Delta_1^X$ で minimally thin であることが知られている (cf. [HL]). 従って, 仮定と事実 (A) より, $I \setminus E$ は $0 \in \Delta_1^X$ で minimally thick である. 故に, $C := \{|z| = r\} \subset M$ をみたす実数 $r \in I$ が存在する. \tilde{X}_0 の作り方から, $\pi_{\tilde{X}_0}^{-1}(C)$ が連結であることが容易に分かる. これと $C \subset M$ および M が連結であることから, $\pi_{\tilde{X}_0}^{-1}(M)$ が連結, すなわち $n_{\tilde{X}_0}(M) = 1$ となる. $M \in \mathcal{M}_X(0)$ は任意であったから, 定理 3 より結論を得る.

(ii) $M = X \setminus I$ とおくと, 仮定より, $M \in \mathcal{M}_X(0)$ である. \widetilde{X}_0 の作り方から, $n_{\widetilde{X}_0}(M) = m$ であることは明かである. 故に, 任意の $N \in \mathcal{M}_X(0)$ に対し $n_{\widetilde{X}_0}(N) \leq m$ であることに注意すれば, 定理 3 より $\nu_{\widetilde{X}_0}(0) = m$ が従う. \square

次に, $D = \{|z| < 1\}$ について考える. よく知られているように (cf [C-C], [HL]), $D^* = \{|z| \leq 1\}$, $\Delta^D = \Delta_1^D = \{|z| = 1\}$ である. $\{b_n\}$ を $0 < b_n \uparrow 1$ をみたす数列とする. $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} [b_{2n-1}, b_{2n}]$, $G = D - J$ おく. G の copy G_1, \dots, G_m を用意し, G_i 上の J の下岸と G_{i+1} 上の J の上岸を (mod m) 溶接してできる $\mathcal{E}_m(D)$ 属する被覆面を \widetilde{D}_0 とする.

命題 11. (i) J と $J^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} [b_{2n}, b_{2n+1}]$ が共に $1 \in \Delta_1^D$ で minimally thick ならば, $\nu_{\widetilde{D}_0}(1) = 1$;
(ii) J または J^* が $1 \in \Delta_1^D$ で minimally thin ならば, $\nu_{\widetilde{D}_0}(1) = m$.

命題 11 の証明のためには, 定理 3 とは別に次の 2 つの事実が必要である (cf. [A], [E], [LF]).

事実 (C). S を $z = 1$ を頂点とする D の Stolz 領域とする. S の部分集合 E が $1 \in \Delta_1^D$ で minimally thin のとき, $E' := \{1 - |z - 1| : z \in E\}$ も $1 \in \Delta_1^D$ で minimally thin である.

事実 (D). $M \in \mathcal{M}_D(1)$ とする. このとき, $\{|z - 1| = 1\}$ の極 (polar) 部分集合 Z で次の性質を持つものが存在する: $l_\theta \cap Z = \emptyset$, $l_\theta \cap D \neq \emptyset$ をみたす任意の半直線 $l_\theta = \{\arg(z - 1) = \theta\}$ に対して, $l_\theta \cap \{0 < |z| < \rho\} \subset M$ となる $\rho (> 0)$ が存在する.

命題 11 の証明. (i) $M (\in \mathcal{M}_D(1))$ を任意にとる. 事実 (D) より, 実数 $\alpha, \beta (\pi/2 < \alpha < \pi < \beta < 3\pi/2)$ および $r (> 0)$ で

$$\{z : \arg(z - 1) = \alpha, 0 < |z - 1| \leq r\} \cup \{z : \arg(z - 1) = \beta, 0 < |z - 1| \leq r\} \subset M$$

をみたすものが存在する. 次に, $E := D \cap \{z : \alpha \leq \arg(z - 1) \leq \beta\} \setminus M$ は $1 \in \Delta_1^D$ で minimally thin であるから, 仮定と事実 (A) および (C) より, $J \setminus E'$ と $J^* \setminus E'$ は共に $1 \in \Delta_1^D$ で minimally thick である. 故に, 実数 $s, t (0 < t < s)$ で $s \in J, t \in J^*$ および

$$\{z : |z - 1| = s, \alpha \leq \arg(z - 1) \leq \beta\} \cup \{z : |z - 1| = t, \alpha \leq \arg(z - 1) \leq \beta\} \subset M$$

をみたすものが存在する.

$$\begin{aligned} &\{z : \arg(z - 1) = \alpha, t \leq |z - 1| \leq s\}, \quad \{z : |z - 1| = s, \alpha \leq \arg(z - 1) \leq \beta\}, \\ &\{z : \arg(z - 1) = \beta, t \leq |z - 1| \leq s\}, \quad \{z : |z - 1| = t, \alpha \leq \arg(z - 1) \leq \beta\} \end{aligned}$$

を順に結んで得られる閉曲線を C とおく. \widetilde{D}_0 の作り方から, $\pi_{\widetilde{D}_0}^{-1}(C)$ が連結となることが容易に確かめられる. これと $C \subset M$ および M が連結であることから, $\pi_{\widetilde{D}_0}^{-1}(M)$ が連結, すなわち $n_{\widetilde{D}_0}(M) = 1$ となる. $M (\in \mathcal{M}_D(1))$ は任意であったから, 定理 3 より結論を得る.

(ii) J (または J^*) が $1 \in \Delta_1^D$ で minimally thin とする. $M = D \setminus J$ (または $D \setminus (J \cup [-1, b_1])$)

とおくと, $M \in \mathcal{M}_D(1)$ である. \widetilde{D}_0 の作り方から, $n_{\widetilde{D}_0}(M) = m$ であることは明かである. 故に, 任意の $N \in \mathcal{M}_D(1)$ に対し $n_{\widetilde{D}_0}(N) \leq m$ であることに注意すれば, 定理 3 より $\nu_{\widetilde{D}_0}(1) = m$ が従う. \square

6. 前節と同様に $D = \{|z| < 1\}$ する. 本節では, 定理 2 の見地から定理 3 を使って, $HP(\widetilde{D}) = HP(D) \circ \pi_{\widetilde{D}}$ となる $\widetilde{D} \in \mathcal{E}(D)$ の例を与える.

定理 12. $\zeta \in \Delta_1^D$, $\widetilde{D} \in \mathcal{E}(D)$, \widetilde{D} の分岐点全体の射影を A とする. A の可算部分集合 $B_\zeta = \{b_n : n \geq n_0\}$ および正定数 $C (< 1)$ が存在して次の条件をみたすとする:

(a) 各 $b_n (\in B_\zeta)$ の上には位数 $m-1$ (重複度 m) の \widetilde{D} の分岐点がある,

(b) 任意の $b_n (\in B_\zeta)$ と $z (\in A \setminus \{b_n\})$ に対し, $|z - b_n| \geq C2^{-n}$.

(c) $2^{-n-1} \leq |b_n - \zeta| \leq 2^{-n}$ ($n \geq n_0$),

(d) $B_\zeta \subset S_C(\zeta) := \{z \in D : C|z - \zeta| \leq 1 - |z|\}$,

このとき, $\nu_{\widetilde{D}}(\zeta) = 1$ である.

C の相対 compact な Borel 集合 K に対し, K の対数容量を $\lambda(K)$ とする (cf. [T]). D における minimal thinness の必要条件として, 次のことが知られている (cf. [LF], [J]).

事実 (E). $\zeta \in \Delta_1^D$, E を $S_C(\zeta)$ の閉部分集合とする. E が ζ で minimally thin ならば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_n)}} < \infty,$$

ただし, $E_n = E \cap \{2^{-n-1} \leq |z - \zeta| \leq 2^{-n}\}$ とする.

定理 12 の証明. $M (\in \mathcal{M}_D(\zeta))$ を任意にとる. もし $b_n \in M \cap B_\zeta$ となる b_n が存在すれば, (a) と M の連結性より, $\pi_{\widetilde{D}}^{-1}(M)$ の連結性が容易に従い, 定理 3 より結論を得る. それ故, 以下では, $M \cap B_\zeta = \emptyset$ (従って, $B_\zeta \subset D \setminus M$) と仮定する. $F = D \setminus M$ とおき, b_n を含む F の連結成分を F_n とする ($n \geq n_0$). ここで, さらに, ある F_n に対して $d(F_n) < C2^{-n}$ が成り立つとする ($d(K)$ は K の直径). このとき, F_n をその内部に含む Jordan 閉曲線 γ_n で

$$d(F_n) < d(\gamma_n) < C2^{-n} \quad \text{かつ} \quad \gamma_n \subset M$$

となるものが存在する. (b) に注意すれば, γ_n の上または内部にある A の点は b_n のみである. 故に, (a) より, $\pi_{\widetilde{D}}^{-1}(\gamma_n)$ は連結となる. これと $\gamma_n \subset M$ および M の連結性より, $\pi_{\widetilde{D}_1}^{-1}(M)$ も連結となり, 定理 3 より結論を得る. 以上より, $d(F_n) < C2^{-n}$ となる F_n が存在することを示せば良い.

背理法により, $d(F_n) < C2^{-n}$ となる F_n が存在することを示す. すべての n ($n \geq n_0$) に対して,

$$(8) \quad d(F_n) \geq C2^{-n}$$

と仮定する. $E = F \cap S_{\frac{c}{2}}(\zeta)$ とおき, b_n を含む E の連結成分を F_n^* とする. このとき, (c), (d) および (8) より,

$$(9) \quad d(F_n^*) \geq C_1 2^{-n} \quad (n \geq n_0)$$

をみたす正定数 $C_1 (\leq C)$ が存在することが確かめられる. $E_n = E \cap \{2^{-n-1} \leq |z - \zeta| \leq 2^{-n}\}$ とおく. 各 $n (\geq n_0)$ に対し, $b_n \in E_n$ と (9) より, E_{n-1}, E_n, E_{n+1} の少なくとも1つは, 直径が $C_1 2^{-n-1}$ 以上の連続体を含むことが分かる. これより

$$\max\{\lambda(E_{n-1}), \lambda(E_n), \lambda(E_{n+1})\} \geq C_1 2^{-n-3} \quad (n \geq n_0)$$

となる (cf. [T]). 従って

$$\frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_{n-1})}} + \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_n)}} + \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_{n+1})}} \geq \frac{1}{n \log 2 + \log(8/C_1)} \quad (n \geq n_0)$$

となる. 故に

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0-1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_n)}} &\geq \frac{1}{3} \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_{n-1})}} + \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_n)}} + \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_{n+1})}} \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n \log 2 + \log(8/C_1)} = \infty \end{aligned}$$

となり, E は $\zeta \in \Delta_1^D$ で minimally thin であるから, これは事実 (E) と矛盾する. \square

命題 13. $A = \{(1 - 2^{-n-1})e^{i2\pi k/2^{n+2}} : n = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, 2^{n+2}\}$ とする. \widetilde{D}_1 を A の各点の上に重複度 m の分岐点を持つ $\mathcal{E}_m(D)$ に属する被覆面をとする. このとき, $HP(\widetilde{D}_1) = HP(D) \circ \pi_{\widetilde{D}_1}$.

証明. $\zeta \in \Delta_1^D$ を任意にとる. 正整数 n に対し,

$$(10) \quad \left| \arg \zeta - \frac{2\pi k}{2^{n+2}} \right| \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

をみたす正整数 $k = k(\zeta, n)$ ($1 \leq k \leq 2^{n+2}$) をとり,

$$b_n = (1 - 2^{-n-1})e^{i2\pi k/2^{n+2}} (\in A),$$

さらに $B_\zeta = \{b_n : n \geq 1\}$, $C = \frac{1}{4}$ とおく. この B_ζ と C が定理 12 の条件 (a) をみたすことは言うまでもないし, 条件 (b) をみたすことは容易に示せる. また, (10) より

$$(2^{-n-1})^2 \leq |b_n - \zeta|^2 \leq (2^{-n-1})^2 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{2^{n+3}}$$

となることが分かる. これより, (c), (d) をみたすことも容易に確かめられる. 従って, 定理 12 より, 任意の $\zeta \in \Delta_1^D$ に対して $\nu_{\widetilde{D}_1}(\zeta) = 1$ となる. 故に, 定理 2 より, 結論を得る. \square

References

- [A] H. AIKAWA, *Quasiadditivity of capacity and minimal thinness*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **18**(1993), 65-75.
- [B-H] J. BLIEDTNER AND W. HANSEN, *Potential Theory*, Springer, 1986.
- [B] M. BRELOT, *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Lecture Notes in Math. **175**, Springer, 1971.
- [C-C] C. CONSTANTINESCU AND A. CORNEA, *Ideale Ränder der Riemannscher Flächen*, Springer, 1963.
- [E] M. ESSÉN, *Minimal thinness, reduced functions and Green potentials*, Proc. Edinburgh. Math. Soc., **36**(1992), 87-106.
- [H] M. HEINS, *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.
- [HL] L. HELMS, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.
- [J] H. L. JACKSON, *Some results on thin sets in a half plane*, Ann. Inst. Fourier, **20**(1970), 201-218.
- [LF] J. LELONG-FERRAND, *Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace*, Ann. Ecole N. Sup., **66**(1949), 125-159.
- [M] H. MASAOKA, *Criterion of Wiener type for minimal thinness on covering surfaces*, Proc. Japan Acad., **72**(1996), 154-156.
- [M-S1] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces*, Kodai Math. J., **17**(1994), 351-359.
- [M-S2] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, Osaka J. Math., **34**(1997), 659-672.
- [N] L. NAÏM, *Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **7**(1957), 183-281.
- [T] M. TSUJI, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, 1959.