

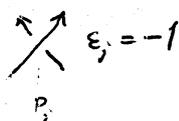
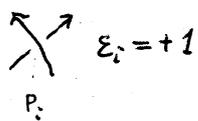
Kontsevich の universal Vassiliev invariant について

島田信夫 (Nobuo Shimada)

Abstract - After the initial impetus by Vassiliev [V]_{1,2}, Kontsevich [K] has been able to give an explicit formula for a universal invariant of knots using the evaluation of some complicated multiple integrals depending on the actual realization of a knot by a smooth curve in the 3-space \mathbb{R}^3 . In this expository note, we would like to introduce the recent attempt of Cartier [C], which provides a combinatorial construction of the Vassiliev-Kontsevich invariant, through utilizing famous results of Drinfeld [D]_{1,2} to produce a definition of the invariant which can be read off from a plane diagram. The key point in this method is a category theoretical approach. An explicit formula of the Kontsevich-Cartier functor will be presented.

1. 準備 ノット (knot 結び目) とは, 御承知の様に, 3次元空間 \mathbb{R}^3 に埋め込まれた滑らかな閉曲線 K , または, それを像とする単位円周 S^1 からの imbedding を意味し, その ambient isotopy (全同位) 類を ノット型 と呼ぶ. 有向 (向きをついた) ノット型の全

体を K で表わす。ノットが自明な法ベクトル野を伴ったものは framed knot (枠付きノット) と呼ばれ、その場合は枠付き同位を考える。枠付き有向ノット型の全体を K^+ で表わす。集合 $K(K^+)$ で生成された自由加群を $\Lambda(\Lambda^+)$ と記し、(枠付き)有向ノット加群と呼ぶ。ノットの連結和によって積を入れると、可換な積をもつ有向ノット代数 Λ (および Λ^+) が得られる。次に、特異点として有限個の double pt. (= 重点) だけを持つような singular knot (特異ノット) を考えると、前と同様に $\mathcal{S}K, \mathcal{S}K^+$ などの集合、またそれらから生成された加群 $S\Lambda = \mathbb{Z}\{\mathcal{S}K\}, S\Lambda^+$ などが得られる。特異ノットの場合の同位は、各二重点の内核近傍を保存したままの変形を考えるものとする。 n 個の二重点をもつ特異ノット型の集合 $\mathcal{S}_n K$ から張られた $S\Lambda$ の部分加群を $S_n \Lambda$ で表わす。以下すべてノットは有向なものだけを考える。自然な線形写像 $\tau: S_n \Lambda \rightarrow \Lambda$ ($\tau: S_n \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$) が次の様に定義される: $K \in \mathcal{S}_n K$ をとり、その二重点集合 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ から $\{+1, -1\}$ への任意の写像 $\alpha: \alpha(p_i) = \varepsilon_i = +1 \text{ 或 } -1$, に対して、記号 K_α は、各二重点 p_i において K の交点を“用いて”上下道の交差点を作り、その交差点にあける“符号”が丁度 ε_i となるようにしたものを表わす:



$K_\alpha = K_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}$ と表わしてもよいからわかる。これは従って特異点を持たない普通のノットとなる。

これら K_α に符号 $\varepsilon(\alpha) = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i$ をつけて加えたもの $\sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha) \cdot K_\alpha = \tau(K)$

により写像 $\tau: S_n \Lambda \rightarrow \Lambda$ が定義される。($\tau: S_n \Lambda^f \rightarrow \Lambda^f$ と同様)
 この写像の像 $\tau(S_n \Lambda)$ を $\Lambda_n \subset \Lambda$ とおく. このとき容易に
 $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$ が驗される. 従って $\Lambda = \Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \dots \Lambda_n \supset \Lambda_{n+1} \supset \dots$
 なる減少 filtration が得られる. ($\Lambda^f = \Lambda_0^f \supset \Lambda_1^f \supset \dots \Lambda_n^f \supset \dots$ と同様)
 さて $\Lambda(\Lambda^f)$ は上記の様に可換余積をもち, この積は
 $\Lambda_n \cdot \Lambda_e \subset \Lambda_{n+e}$ の条件を満たし, 従って対応する grade 加群
 $G(\Lambda) = \bigoplus_n G_n(\Lambda)$, $G_n(\Lambda) = \Lambda_n / \Lambda_{n+1}$ において可換積 $G_p(\Lambda) \otimes G_q(\Lambda) \rightarrow$
 $G_{p+q}(\Lambda)$ を導びく ($G(\Lambda^f)$ と同様) 詳細は略すが, 実はノ
 ット代数 $\Lambda, \Lambda^f, G(\Lambda), G(\Lambda^f)$ 等はこの積の他に可換余積を
 もち Hopf 代数と存在ことが知られている.

ノット加群 $\Lambda(\Lambda^f)$ の係数域を拡大し体係数例えば \mathbb{C} -係数
 としよう. このとき $V_n = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bigwedge \Lambda_{n+1}, \mathbb{C}) = (\bigwedge \Lambda_{n+1})^*$ (* は双対ベクトル
 空間を意味する) とおいて, V_n の元を, 位数 n の Vassiliev 不変量
 (または有限型不変量) と呼ぶ. $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$ であるから,

$$V_{n-1} = (\bigwedge \Lambda_n)^* \hookrightarrow V_n = (\bigwedge \Lambda_{n+1})^* \rightarrow V_n / V_{n-1} \cong (\bigwedge \Lambda_{n+1} / \Lambda_n)^* \quad \dots (1)$$

という完全系列が得られ, 枠付きの場合も同様である

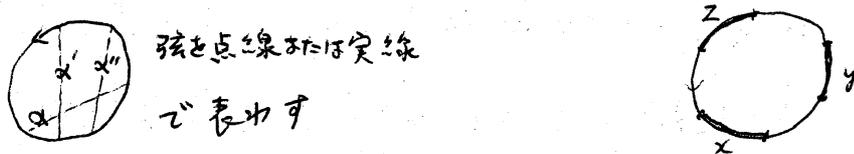
$$V_{n-1}^f = (\bigwedge \Lambda_n^f)^* \hookrightarrow V_n^f = (\bigwedge \Lambda_{n+1}^f)^* \rightarrow V_n^f / V_{n-1}^f \cong (\bigwedge \Lambda_{n+1}^f / \Lambda_n^f)^* \quad \dots (1)^f$$

Vassiliev 不変量は上記の様に総称的存在もので, 概念的には,
 従来多くのノット不変量 (多項式不変量等) を含んでいることが知られている.

2. chord diagram

向きをついた円周 S^1 に張られた弦の有限列 $\{\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(n)}\}$ を

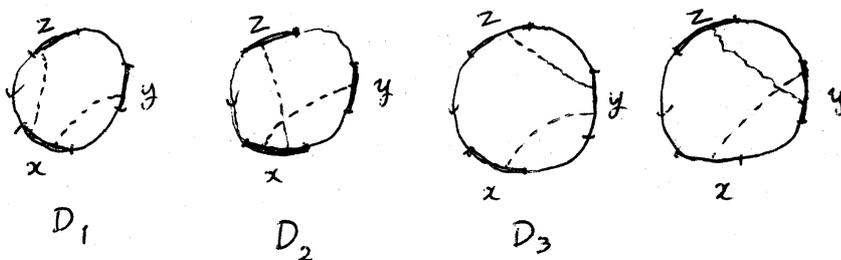
chord diagram (弦図式) とよぶ。これは S^1 上の点対 (各弦の両端) の集合を与えることと同値である。この様な弦図式 (向きを込めた) を弦図式型とよび、それらの全体を \mathcal{D}^c で表わす。特に弦が n 本から成る図式型の集合を \mathcal{D}_n^c で表わす。1つの場合と同様に加群 $\mathbb{Z}\langle \mathcal{D}^c \rangle$, $\mathbb{Z}\langle \mathcal{D}_n^c \rangle$, $\mathbb{C}\langle \mathcal{D}^c \rangle$ 等を考える。これらの加群に次の様



な 4 項関係 (4T-relation) と呼ばれるものを導入する: 先づ有向円周上で三つの disjoint な線分 x, y, z を定めおく。(上図参照)

これに対し、次の様な弦図式 D_1, D_2, D_3, D_4 の1次結合を零と置いたものを 4項関係 と呼ぶ:

$$D_1 - D_2 - D_3 + D_4 \sim 0 \quad (\text{または } (D_1 - D_2) \sim (D_3 - D_4)) \quad (2)$$



ただし、これらの図式において、 x, y, z -部分に端点をもち二つの弦は上図の様は点線で表わしたものであり、^{別に} $S^1 - \{x \cup y \cup z\}$ の部分に端点をもち弦は D_1, D_2, D_3, D_4 のすべてに共通の状態は何本あっても可とする。

よって 4 項関係で生成された部分加群による商加群を考える。

$$\mathcal{A}_n^+ = \mathbb{C}\langle \mathcal{D}_n^c \rangle / (4T\text{-rel.}) \quad (3)$$

$$\mathcal{A}_n = \mathbb{C}\langle \mathcal{D}_n^c \rangle / (4T\text{-rel.}, \delta_i) \quad \delta_i = \text{弦がただ一本のもの}$$

$\mathcal{A}^+ = \sum_n \mathcal{A}_n^+$, $\mathcal{A} = \sum_n \mathcal{A}_n$ は弦図式の連続和によって、可換代数となる。

3. 弦図式からノットへの対応

\mathcal{D}_n^c から 特異 ノット 集合 \mathcal{S}_n^k への自然な対応 (ただし一意でない) が、弦図式 D を \mathbb{R}^3 へ immerse することによって得られる。ただしこの場合 D の弦は考えず、単に、弦の両端を一点に重ねる (つまり=重点をつくる) 写像を考え、弦の両端点以外 ^(の内部部分) は滑らかに埋め込むに際してかなりの自由度がある。(どの様なノット状態でもかまわぬから)。しかし、この一意でない対応を更に $S_n \Lambda \xrightarrow{\tau} \Lambda_n$ を通して考えると、4項関係式は実際 0 になる。従って $\mathbb{Z}\langle \mathcal{D}_n^c \rangle$ から Λ_n への写像は \mathcal{A}_n^+ から Λ_n^+ (\mathcal{A}_n から Λ_n) への写像を導く。しかしこの写像も一意的でなく、modulo Λ_{n+1} で考えれば well-defined な線形写像 $\varphi_n: \mathcal{A}_n \rightarrow \Lambda_n / \Lambda_{n+1}$, $\mathcal{A}_n^+ \xrightarrow{\varphi_n^+} \Lambda_n^+ / \Lambda_{n+1}^+$ (4) となる。 φ_n は surjective (上への写像) である。(係数域は体としておく) これから $\dim(\mathbb{Z}\langle \mathcal{D}_n^c \rangle) > \dim \mathcal{A}_n \geq \dim(\Lambda_n / \Lambda_{n+1}) = \dim \varphi_n(\Lambda)$ (5) により $\dim(\mathbb{Z}\langle \mathcal{D}_n^c \rangle) = (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1$

$$(4) \text{ から } \mathcal{A}_n^* \xrightarrow{\varphi_n^*} (\Lambda_n / \Lambda_{n+1})^* \cong \frac{V_n}{V_{n-1}} \quad (\text{framed version と同じ}) \quad (6)$$

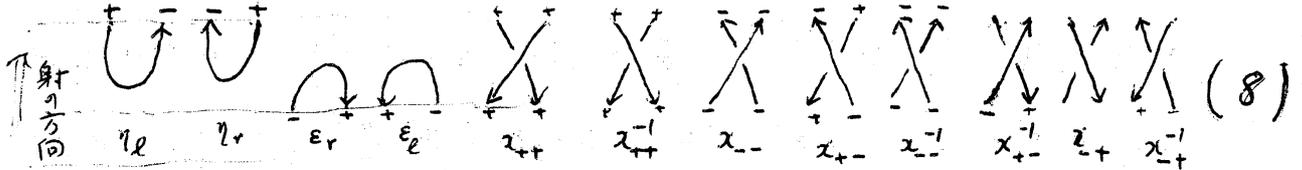
これは order n の Vassiliev 不変量の全体は \mathcal{A}_n^* の部分集合であることがわかる。 Kontsevich の定理は $\varphi_n(\varphi_n^*)$, φ_n^* 等が同型であることを証明する。

4. oriented tangles の圏 \mathcal{L} 。圏 \mathcal{L} の対象 (object) は、+、- の有限列および空集合 \emptyset とする。 \mathcal{L} は tensor 積 $\otimes: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ という関手 (functor) をもつ: $\{+-\} \otimes \{-+-\} = \{+--+-\}$ (つまり単なる併列) この場合、object \emptyset は単位元の標号分割を果すので、単位対象 I と呼ばれる。射 (morphism) としては、矢が

対象 \uparrow の恒等射 id_{\uparrow} (記号 \downarrow を使う) と \downarrow の恒等射 $id_{\downarrow} = \uparrow$, および

basic morphism と呼ばれる次のもの $\eta_{\downarrow} : I = \mathcal{P} \rightarrow \{+-\}$, $\eta_{\uparrow} : I \rightarrow \{-+\}$,
 $\varepsilon_r : \{-+\} \rightarrow I$, $\varepsilon_l : \{+-\} \rightarrow I$, $x_{ij} : i \otimes j \rightarrow j \otimes i$, $x_{ij}^{-1} : j \otimes i \rightarrow i \otimes j$ (注) (7)

は $+$ または $-$ と表わす) などがあり, それらは以下の様に図示される:



x_{ij} は braiding と呼ばれ, x_{++} などの表示は紛らわしいので番号をつけて x_{12} で表わす
 こともある. 1 は 1 番目の $+$, 2 は 2 番目の $+$ の意味, x_{+-} は x_{12} で表わす, 7 番目
 1 番目が $+$, 2 番目は $-$ の意味である, また x_{ij} は交差点の符号が \oplus のものを, x_{ij}^{-1} は符
 号が \ominus であるものを意味し, x_{ij}^{-1} は x_{ij} の逆である.

また, これら basic 射の一つと, いくつかの恒等射 \downarrow, \uparrow の tensor 積の形

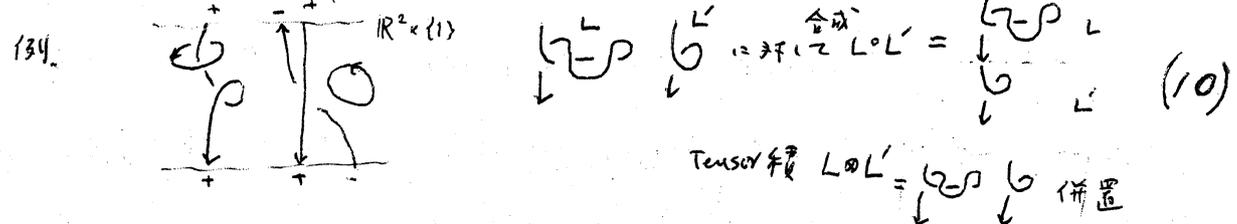
例えば $\downarrow \otimes \cap, \cup \otimes \downarrow \otimes \uparrow, \uparrow \otimes \times \otimes \downarrow$ 等々 (9)

のものを elementary 射 (elementary tangle) と呼ぶ. 一般の oriented

tangle とは, \mathcal{L} の射として, elementary 射の合成によって得られるものである

が, 直観的には, $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ に埋め込まれた, 1次元有向コンパクト多様体

M の境界 $\partial M = M \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\} \cup \mathbb{R}^2 \times \{1\})$ とするものと考える.



注. 射 x_{ij} (とその逆 x_{ij}^{-1}) は braid 群の生成元である, braid (組み紐) は tangle
 のうちで数えられる. knot も tangle の一部であり, link (いくつかの knots が結び合った
 もの) もそうである. $Mod_{\mathcal{L}}(I, I) = \{links\}$

二つの tangles M, N は, $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ の ambient isotopy (ただし $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{1\}$ はそれぞれ点 $0, 1$ が固定される) により互に移り合うとき, 同じ同位型に属するものとして区別しない. 実際には knot の場合と同様, 平面投影図式において, 三つの基本 Reidemeister 運動の積み重ねにより移り合うときに限り同位である. 前と同様 tangle においても framed (枠つき) のものが考えられ, framed (oriented) tangles の圏 \mathcal{L}^f に対して, 上述の様な事柄が殆んどすべて同様に成り立つ. 但し射の同位関係では重要な違いがある:

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \sim \downarrow \sim \downarrow \sim \downarrow \sim \downarrow \quad \text{in } \mathcal{L} \\
 \Downarrow \quad \downarrow \sim \downarrow \sim \downarrow \quad \text{in } \mathcal{L}^f
 \end{array}$$

} このベクトル野と tangle の方向 tangent ベクトルと共にこの平面上にとるとリボン状の tangle ができる. framed tangle を ribbon tangle と呼ぶこともある (11)

5. monoidal category モノイド圏 (またはテンソル圏) \mathcal{C} とは, 関手 (functor)

$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, unit object I を持ち, また自然同型

$$\ell : I \otimes A \xrightarrow{\cong} A, \quad r : A \otimes I \xrightarrow{\cong} A, \quad \alpha : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$$

が存在するもので, ℓ, r については, 恒等射と見なしてよい場合が多い. ここで簡単のため $I \otimes A = A = A \otimes I$ で ℓ, r は共に恒等射であると仮定する. α は associativity constraint と呼ばれるものだが, 一般的には, 恒等射と見る

わけに行かず, したがって次の Pentagon axiom を満たすものと仮定する:

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A, B \otimes C, D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\
 \downarrow \alpha_{A \otimes B, C, D} & & \downarrow \alpha_{A, B, C \otimes D} \\
 ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{(A \otimes B), C, D}} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \\
 \downarrow \alpha_{A \otimes B, C, D} & & \downarrow \alpha_{A, B, C \otimes D} \\
 (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D)
 \end{array}$$

(12)

特に $\alpha_{A,B,C} = id$ と見ればよい場合は \mathcal{C} を strict monoidal category と
いう。例えは tangles の cat. $\mathcal{L}^{(+)}$ は 2 可である。

monoidal category が braided であるとは, braiding $C_{X,Y} = X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$
という自然同型 (nat. isomorphism) があって, 次の Hexagon axiom が
成り立っているものとする;

$$C_{X \otimes Y, Z} = \alpha_{Z, X, Y} \circ (C_{X, Z} \otimes 1_Y) \circ \alpha_{X, Z, Y}^{-1} \circ (1_X \otimes C_{Y, Z}) \circ \alpha_{X, Y, Z} \quad (13)$$

$$C_{X, Y \otimes Z} = \alpha_{Y, Z, X}^{-1} \circ (1_Y \otimes C_{X, Z}) \circ \alpha_{Y, X, Z} \circ (C_{X, Y} \otimes 1_Z) \circ \alpha_{X, Y, Z}$$

例えは, tangle の 圈 $\mathcal{L}^{(+)}$ は braiding $\sigma_{X,Y}$ をもち braided 圈 である。

6. 圈 $\mathcal{J}[[\mathcal{H}]]$

strict monoidal category で $Ob \mathcal{J} = Ob \mathcal{L}$ であり, $Mor_{\mathcal{J}}(X, Y)$ は
 \mathbb{C} -vector 空間で射の tensor 積 $f \otimes g$ は bilinear であるから 圈 \mathcal{J}
を構成しよう。braiding としては単なる交換射 $\sigma_{X,Y} = X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$,
 $\sigma_{Y,X} = \sigma_{X,Y}^{-1}$ をもち, basic 射としては, $\eta_l: I \rightarrow (+-)$, $\eta_r: I \rightarrow (-+)$
 $\varepsilon_l: (-+) \rightarrow I$, $\varepsilon_r: (+-) \rightarrow I$ は \mathcal{L} の場合と同じで, $\sigma_{X,Y}$ が \mathcal{L} における
 $\alpha_{X,Y}$ に相当する。 $id_+ = \downarrow$ $id_- = \uparrow$ は \mathcal{L} の場合と同じである。

記号として を用いる場合もある。(14)

その他に, \mathcal{L} の場合と違って, infinitesimal braiding とよばれる自然変換 $t_{X,Y} (X \neq Y)$,

$t_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow X \otimes Y$ があって, 記号として

$t_{X,Y}$ を用いる場合がある。 $t_{X,Y}$ に関する関係式として,

$$t_{ij} = t_{ji} \quad (i \neq j), \quad [t_{ij}, t_{kl}] = 0 \quad (i, j, k, l \text{ が互不相同なとき}) \quad (15)$$

$$[t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0 \quad (i, j, k \text{ が互不相同なとき})$$

これらの式において $[,]$ は交換子積であり ij など \bar{i}, \bar{j} がおまかえてよい。

\mathcal{J} における二つの射を同値とするのは, \mathcal{L} の場合と同じ同位関係である。

上の最後の関係式は次のことを意味する:

$$\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \\ i \quad j \quad k \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \\ i \quad j \quad k \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \\ i \quad j \quad k \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \\ i \quad j \quad k \end{array} = 0 \tag{16}$$

$$t_{ij}t_{ik} - t_{ik}t_{ij} + t_{ij}t_{jk} - t_{jk}t_{ij}$$

射の関係式として

i) $\sigma_{X,Y} t_{X,Y} = t_{Y,X} \sigma_{X,Y}$ (対称性)

ii) $t_{X \otimes Y, Z} = 1_X \otimes t_{Y,Z} + (1_X \otimes \sigma_{YZ})^{-1} (t_{X,Z} \otimes 1_Y) (1_X \otimes \sigma_{YZ})$ (加法性)
 (或いは略記に $t_{(X,Y)Z} = t_{Y,Z} + t_{X,Z}$ を用いる.)

iii) $\begin{array}{c} \curvearrowright \circ \cup \\ \varepsilon_1 \circ \eta_2 \end{array} = \bigcirc \sim \bigcirc = \begin{array}{c} \curvearrowright \circ \cup \\ \varepsilon_2 \circ \eta_2 \end{array}, \bigcirc = id_I$ (=これは \mathcal{L} の場合) (17)
 (=同じ)

iv) $\begin{array}{c} \curvearrowright \circ t_{12} \\ \varepsilon_1 \circ \eta_2 \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \varepsilon_1 \circ \eta_2 \end{array} = 0$ (framing free condition)

v) $\begin{array}{c} \curvearrowright \circ \downarrow \\ \varepsilon_1 \circ \eta_2 \end{array} \circ \left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \varepsilon_1 \circ \eta_2 \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \varepsilon_2 \circ \eta_2 \end{array} \right) = 0$ (或いは $\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \varepsilon_1 \circ \eta_2 \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \varepsilon_2 \circ \eta_2 \end{array} = 0$)
 または $\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \varepsilon_1 \circ \eta_2 \end{array} \circ (t_{13} - t_{23}) = 0$

vi) $\begin{array}{c} \curvearrowright \circ X \\ \varepsilon_1 \circ \eta_2 \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \varepsilon_2 \end{array}$ ($\varepsilon_1 \circ \sigma = \varepsilon_2$)
 $X \circ \cup = \cup$ ($\sigma \circ \eta_2 = \eta_1$)

vii) $\downarrow \# = \cup$ (\mathcal{L} にあいて) (連結性) (合成) (同様)

などがある。iv) の関係は framing free condition $\delta_i = 0$ in \mathcal{A} に相当する。従って圏 \mathcal{T} に対して、ただ条件 iv) のだけが「圈」を \mathcal{T} と書いて、 \mathcal{T} の framed version と考える。
 (「他はすべて \mathcal{T} と同じ」)

条件 iv) は圏 \mathcal{L} における Reidemeister move 1) $\downarrow \sim \downarrow$ に対応するものと考えればかまわない。 $\text{Mor}_{\mathcal{T}}(I, I)$ の連結成分 $\text{Mor}_{\mathcal{T}}(I, I)_0 = \mathcal{A}$: 弦図式代数と見なせる。

tensor 圏 \mathcal{T} とその infinitesimal braiding t_{ij} から新しい「圈」 $\mathcal{T}[[\hbar]]$ を

定義する。これは \mathcal{T} の deformation と見なせるから $Ob(\mathcal{T}[[\hbar]]) = Ob \mathcal{T}$,

射 $f: X \rightarrow Y$ in $\mathcal{T}[[\hbar]]$ は 形式的中級数 $f = \sum_n f_n \hbar^n$, $f_n: X \rightarrow Y \in \text{Mor}_{\mathcal{T}}$ (これは $\text{Mor}_{\mathcal{T}}$ と可換不定元)

と与えられる. $\text{Mor}_{\mathcal{T}[[\hbar]]}(X, Y)$ は, \mathbb{C} -vector spaces の tensor 積 $\text{Mor}_{\mathcal{T}}(X, Y) \otimes \mathbb{C}[[\hbar]]$ の商空間の射影的系 $\text{Mor}_{\mathcal{T}}(X, Y) \otimes \mathbb{C}[[\hbar]] / (\hbar^n) \leftarrow \text{Mor}_{\mathcal{T}}(X, Y) \otimes \mathbb{C}[[\hbar]] / (\hbar^{n+1})$ の逆極限 $\overleftarrow{\lim}_n \text{Mor}_{\mathcal{T}}(X, Y) \otimes \mathbb{C}[[\hbar]] / (\hbar^n)$ として定義された完備位相加群とみる. 従って $\sum_n \hbar^n$ は一つの元 f に収束する. $\mathcal{T}[[\hbar]]$ における tensor 積は object 上では \mathcal{T} におけると同いであり, \mathcal{T} が strict monoidal であるから, 積は $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ が成り立つ. 射の tensor 積は $f = \sum_n f_n \hbar^n$, $g = \sum_n g_n \hbar^n$ のとき $f \otimes g = \sum_n \left(\sum_{k+l=n} f_k \otimes g_l \right) \hbar^n$ と与えられる. $\mathcal{T}[[\hbar]]$ が一般的に monoidal (圏) として定義されるためには, associativity constraint α が何う与えられるかが問題である. それは

$$a) \text{ associativity constraint } \alpha_{x, y, z} = \Phi(\hbar t_{x, y}, \hbar t_{y, z}) : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z) \quad (18)$$

と与えられる. ここで $\Phi(u, v)$ は Drinfeld series と呼ばれるもので, Knizhnik-Zamolodchikov 微分方程式の解空間の monodromy を通じて, 後述の braiding $R_{x, y}$ と共に捉えられた. 詳細は文献 ([D]_{1,2}, [Ko]) に譲り, 多少の説明を付す. 先づ不定元 t_{ij} ($1 \leq i < j \leq m$) から生成され, relations として (15) をとつ. \mathbb{C} 上の Lie 環 \mathfrak{t}_m を考え, $U(\mathfrak{t}_m)$ をその universal enveloping algebra を表わす, $\deg t_{ij} = 1$ において, grade algebra とみる. $U(\mathfrak{t}_m)$ を degree により完備化したものを $\widehat{U(\mathfrak{t}_m)}$ と記す. $\Phi(u, v)$ は非可換 formal series in $\widehat{U(\mathfrak{t}_m)}$ として, $\Phi(v, u) = \Phi(u, v)^{-1}$ かつ, 次の等式を満足するものとして定義される:

$$\Phi(t_{12}, t_{23} + t_{24}) \cdot \Phi(t_{13} + t_{23}, t_{34}) = \Phi(t_{23}, t_{34}) \cdot \Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34}) \circ \Phi(t_{12}, t_{23}) \exp \frac{1}{2} (t_{13} + t_{23}) = \Phi(t_{13}, t_{12}) \cdot \exp \frac{1}{2} t_{13} \Phi(t_{13}, t_{23})^{-1} \cdot \exp \frac{1}{2} t_{23} \cdot \Phi(t_{12}, t_{23}) \quad (19)$$

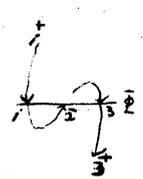
b) 圏 $\mathcal{T}[[\hbar]]$ における braiding としては, ($\mathcal{T}^f[[\hbar]]$ と同じもの)

$$R_{x, y} = \sigma_{x, y} \circ \exp \left(\frac{\hbar}{2} t_{x, y} \right) \quad \text{をとる.}$$

Drinfeld $[D]_{1,2}$ によつて, $\alpha_{x,y,z} = \Phi(ht_{x,y}, ht_{y,z})$ と braiding $R_{x,y}$ が

Pentagon axiom (12) と Hexagon axiom (13) を満足することを示された.

$\mathcal{U}[[\hbar]]$ における重要な射として次のものがある.

$$\lambda_+ = \left(\downarrow \otimes \downarrow \right) \circ \Phi(ht_{1,2}, ht_{2,3}) \circ \left(\downarrow \otimes \downarrow \right) : \frac{+}{3} \rightarrow \frac{+}{3} \quad (20)$$


$$\lambda = \downarrow \circ (\lambda_+ \otimes \uparrow) \circ \uparrow : \phi \rightarrow \phi$$

$$\Phi(ht_{1,2}, ht_{2,3}) = \Phi_{1,2,3} : (1 \otimes 2) \otimes 3 \rightarrow 1 \otimes (2 \otimes 3)$$

と略記するのが便利である.

Φ が invertible であるので λ_+ も λ もそうである.

Drinfeld によれば, $\Phi(ht_{x,y}, ht_{y,z}) = 1_{x \otimes y \otimes z} + \frac{1}{24} [t_{x,y}, t_{y,z}] \hbar^2 \pmod{\hbar^3}$.

7. VDKC functor 上述の圏 \mathcal{L} , \mathcal{L}^+ , $\mathcal{U}[[\hbar]]$, $\mathcal{U}^+[[\hbar]]$ 等は

すべて braided と monoidal (圏) であるが, 中でも \mathcal{L}^+ は universal な性格

をもち, 他の braided monoidal 圏 (圏) \mathcal{C} とその一つの object V を与えれば,

(他に \mathcal{C} は duality をもつという条件があるが) monoidal, braided と functor

$F: \mathcal{L}^+ \rightarrow \mathcal{C}$ を, $F(+)=V$ なるものが一意的に存在するという定理

(Joyal-Street, Turaev) がある. 以下では具体的に, \mathcal{C}

の様な functor $Z^+: \mathcal{L}^+ \rightarrow \mathcal{U}^+[[\hbar]]$ またそれから定まる $Z: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{U}[[\hbar]]$

を定義しよう. これらを仮りに Yassiliev-Drinfeld-Kontsevich-Cartier functor

と呼ぶ. Z^+ と Z は殆んど違わない. $Z^+(f \circ g) = Z^+(f) \circ Z^+(g)$ は常に成

立するが, $Z^+(f \otimes g) = Z^+(f) \otimes Z^+(g)$ は必ずしも成立たない. せい

の場合には特に注意することとして, これらの functor を先づ basic

および elementary tangle について定義しよう.

$\mathcal{L}^{\pm}, \mathcal{L}, \mathcal{T}[\pm 1], \mathcal{T}^{\pm}[\pm 1]$ すべてを通じて, objects は $+$, $-$ の有限列および \mathbb{I} 中にある n の functor Z^{\pm} , Z 共 object 上では恒等的である, $Z^{\pm}(\pm) = \pm$, 従って $Z^{\pm}(\downarrow) = \downarrow = id_{\pm}$ $Z^{\pm}(\varepsilon, \eta)$ についてはそれ程単純ではないので後回しにする.

$$Z^{\pm}(\downarrow_x \uparrow_y) = R_{x,y} = \exp(\frac{\hbar}{2} t_{x,y}) : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X \quad (21)$$

単独の ε や η については

$$\begin{aligned} Z^{\pm}(\curvearrowright) &= \curvearrowright \quad (\text{矢印は一方をとる, 恒等的}) \\ Z^{\pm}(\cup) &= \cup \quad (\quad \quad \quad) \end{aligned} \quad (22)$$

とするが, elementary 射 $\downarrow \otimes \curvearrowright$ 等については, 多少複雑となる.

$$1) Z^{\pm}(\downarrow \otimes \curvearrowright) = \downarrow \otimes_{\alpha} \curvearrowright = (\downarrow \otimes \curvearrowright) \circ \Phi_{1,2,3}$$

$$2) Z^{\pm}(\downarrow \otimes \cup) = \downarrow \otimes_{\alpha} \cup = \Phi_{1,2,3}^{-1} \circ (\downarrow \otimes \cup)$$

$$3) Z^{\pm}(\uparrow \otimes \curvearrowleft) = \uparrow \otimes_{\alpha} \curvearrowleft = (\uparrow \otimes \curvearrowleft) \circ \Phi_{1,2,3}$$

$$4) Z^{\pm}(\uparrow \otimes \cup) = \uparrow \otimes_{\alpha} \cup = \Phi_{1,2,3}^{-1} \circ (\uparrow \otimes \cup)$$

$$5) Z^{\pm}(\cup \otimes \downarrow) = \cup \otimes_{\alpha} \downarrow = (\cup \otimes \downarrow)$$

$$6) Z^{\pm}(\curvearrowleft \otimes \downarrow) = \curvearrowleft \otimes_{\alpha} \downarrow = \curvearrowleft \otimes \downarrow$$

$$7) Z^{\pm}(\cup \otimes \uparrow) = \cup \otimes_{\alpha} \uparrow$$

$$8) Z^{\pm}(\curvearrowright \otimes \uparrow) = \curvearrowright \otimes_{\alpha} \uparrow$$

\otimes は $\mathcal{T}[\pm 1]$ における \otimes の
 assoc. constr. α にある補正
 の組挿入である α ; 134.
 $Z^{\pm}(\downarrow \otimes \cup) = \downarrow \otimes_{\alpha} \cup = \Phi_{1,2,3}^{-1} \circ (\downarrow \otimes \cup) \circ \Phi_{1,2,3}$
 等々.

$$(23)$$

以下 tensor 積の左右を入れかえた積に対して Z^{\pm} の値は, 右側の tensor 積の左右を入れかえたものと同じ
 134 参照

$$1) Z^{\pm}(\curvearrowright \otimes \downarrow) = \curvearrowright \otimes_{\alpha} \downarrow \quad 2) Z^{\pm}(\curvearrowleft \otimes \uparrow) = \curvearrowleft \otimes_{\alpha} \uparrow$$

$$3) Z^{\pm}(\cup \otimes \downarrow) = \downarrow \otimes_{\alpha} \cup \quad \text{など}$$

(21) ~ (23) は Z^{\pm} を Z に置きかえても同じである. 両方を兼ねて $Z^{(\pm)}$ と記した.

ここで右辺の tensor 積 \otimes_q は, $(\uparrow \sim \delta)$ に λ を示した通り associativity constraint による補正をほどこしたものの意味である. この様な面倒なことをする理由は, いわゆる duality $(\downarrow \otimes \uparrow) \circ (\uparrow \otimes \downarrow) \sim \downarrow$ in $\mathcal{L}^{(f)}$ が $Z^{(f)}$ によって保存されるようにしたい為である. $Z^{(f)}((\downarrow \otimes \uparrow) \circ (\uparrow \otimes \downarrow)) = Z^{(f)}(\downarrow \otimes \uparrow) \circ Z^{(f)}(\uparrow \otimes \downarrow)$ は $(\downarrow \otimes \uparrow) \circ (\uparrow \otimes \downarrow) = (\downarrow \otimes_{x_3} \uparrow) \circ \mathbb{P}_{1,2,3} \circ (\uparrow \otimes \downarrow) = \lambda_+ = \lambda \cdot \downarrow$ ((20)参照) となるのが自然であるが, それが $Z^{(f)}(\downarrow)$ つまり, \downarrow となるように $Z^{(f)}(\downarrow \otimes \uparrow)$ や $Z^{(f)}(\uparrow \otimes \downarrow)$ を適当に定義しなくてはならない. それが上記の結果である. 上記で $\lambda^{\pm \frac{1}{2}}$ とあるのは, まづ $\lambda^{\pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ の意味で, λ は初項1で始まる h の powerseries であるので2乗根をとること, 逆数をとること可能である ($\text{Hom}_{\mathbb{Q}(h)}(I, I)$ の元として) また \downarrow の上に積の形で $\lambda^{\pm \frac{1}{2}} \downarrow$ と書いたのは, $\text{Mor}_{\mathbb{Q}(h)}(I, I)$ の元 $\lambda^{\pm \frac{1}{2}}$ は無限本の弦をもつ弦図式 (chord diagram) と考えられ, その17周と線 \downarrow との連結和で定義された積を意味する. (例えば(20)において, $\lambda_+ = \lambda \cdot \downarrow$ である.)

あとは $\mathcal{L}^{(f)}$ における射 (= tangles) の同位関係 $f \sim g$ に対して $Z^{(f)}(f) = Z^{(f)}(g)$ が成立することを要請するだけ. (= 上の例を挙げると, $\downarrow \circ \mathcal{X} \sim \downarrow$ in \mathcal{L} に対して, $Z^{(f)}(\downarrow \circ \mathcal{X}) = \downarrow \circ e^{\frac{h}{2} t_{1,2}}$ であるか" $Z(\downarrow \circ \mathcal{X}) = \downarrow \circ e^{\frac{h}{2} t_{1,2}} = \downarrow$ (= かつ (17) (18) による))

従って $\mathcal{X} + \emptyset$ in $\mathcal{L}^{(f)}$ に対して $Z^{(f)}(\downarrow \circ \mathcal{X} \circ \uparrow) = e^{\frac{h}{2} \emptyset}$

$\mathcal{X} \sim \emptyset$ in \mathcal{L} に対して $Z(\downarrow \circ \mathcal{X} \circ \uparrow) = \downarrow \circ \uparrow = \emptyset$

$(\downarrow \otimes \uparrow) \circ (\uparrow \otimes \downarrow) \sim \downarrow$ に対して $Z^{(f)}(\downarrow \otimes \uparrow) \circ Z^{(f)}(\uparrow \otimes \downarrow) = (\downarrow \otimes_{x_3} \uparrow) \circ \mathbb{P}_{1,2,3} \circ (\uparrow \otimes_{\lambda^{-\frac{1}{2}}} \downarrow) = \downarrow$
 ($(\downarrow \otimes \uparrow) \circ (\uparrow \otimes \downarrow) = \downarrow$ in \mathcal{T} であることに注意.)

一つの knot K は射 $\phi \rightarrow \phi$ in \mathcal{L} と考えられるから、最初が η 、最後が ε で終るような elementary morphisms の列の合成で表わされ、従って $Z^f(K)$ は射 K の因子である elementary 射の Z による像の合成として表わされる。結局

$$Z^f(K) = \sum_{m \geq 0} Z_m^f(K) \cdot h^m$$

の形の既成的中級数で h^m の係数 $Z_m^f(K)$ は m 本の chord を持つ chord diagrams の 1 次結合として \mathcal{A}_m^f の元を表わす。

補題. 特に K が m 本の弦を持つ弦図式 $D \in \mathcal{A}_m^c$ から定まる knot

$$K_D = \varphi_m(D) \in \Lambda_m \pmod{\Lambda_{m+1}}$$

である場合、 $Z^f(K_D) \equiv D \cdot h^m \pmod{h^{m+1}}$

証明. $K_D = \varepsilon(K_{\alpha(p_1), \dots, \alpha(p_m)})$ ($\{p_1, \dots, p_m\}$ は = 重点集合) と仮定しよう。このとき、

$$K_D = \sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha) K_{\alpha} = \sum_{\alpha} (K_{+, \alpha(p_1), \dots, \alpha(p_m)} - K_{-, \alpha(p_1), \dots, \alpha(p_m)})$$

$$Z^f(K_D) = \sum_{\alpha} \{ Z^f(K_{+, \alpha(p_1), \dots, \alpha(p_m)}) - Z^f(K_{-, \alpha(p_1), \dots, \alpha(p_m)}) \} = (R_{x_1, y_1} - R_{x_1, y_1}^{-1}) \cdot$$

$$\left(\sum_{\alpha} Z^f(K_{\alpha(p_1), \dots, \alpha(p_m)}) \right) = a \cdot (e^{\frac{h}{2} t_{x_1, y_1}} - e^{-\frac{h}{2} t_{x_1, y_1}}) \cdot \sum_{\alpha} Z^f(K_{\alpha(p_1), \dots, \alpha(p_m)})$$

$= a \cdot h t_{x_1, y_1} \cdot \dots$ の形となり、induction で $Z^f(K_D)$ が $h t_{x_1, y_1}, h t_{x_2, y_2}, \dots, h t_{x_m, y_m}$ の因子を含んで居り、それらの前後、中間の諸因子は ε, η の

他は associativity constraints α のから生じた id を初項とする h の中級数の形のものがかりである。従って h^m の係数は D であるとなり、その他 a 項は h^{m+1} で割り切れる。すなわち $Z^f(K_D) \equiv D \cdot h^m \pmod{h^{m+1}}$ を得る。(以上多少不正確な表現があるが 斟酌願いたい)。

これによって (4) にあたる φ_n は全射のみならず単射であることがわかり、 $\mathcal{A}_n^f \xrightarrow{\varphi_n} \Lambda_n^+ / \Lambda_{n+1}^+$ (同型) という

Kontsevich の結果が得られる。

文献

- [V], V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces, Theory of Singularities and its Applications* (V. I. Arnold ed.) Amer. Math. Soc. Providence 1990
- [V]₂ ———, *Complements of discriminants of smooth maps, Topology and Applications, Trans. of Math. Mono. 98, A.M.S. Providence 1992*
- [D], V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. J. 1 (1990), 1419-1457*
- [D]₂ ———, *On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. 2 (1991), 829-860*
- [K] M. Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants, Adv. Sov. Math. (1993), 137-150*
- [C] P. Cartier, *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevich des noeuds, C.R. Acad. Sci. Paris t. 316 Série I, p. 1205-1210 (1993)*
- [B], D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants, Topology 34 (1995) 423-472*
- [B]₂ ———, *Non-associative tangles, Preprint*
- [L-M] T. Q. T. Lê and J. Murakami, *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links, Compositio Math.*
- [P] S. Pionikhin, *Combinatorial expression for universal Vassiliev link invariant, Comm. Math. Physics 168, 1-22*
- [Ka] C. Kassel, *Quantum groups, Springer V. GTM 155, Heidelberg 1994.*

[Ko] T. Kohno, Monodromy Representations of Braided Groups and Yang-Baxter Equations, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 37A (1987) 139-160.