数理解析研究所講究録
1057巻 1998年 67-71

Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras

眞田　克典 (Sanada, Katsunori)
東京理科大学理学部数学教室

1 序論

有限群のコホモロジー論において、最も完成された理論の一つとして「周期性」の理論があります。これを Frobenius algebra あるいは Frobenius extension の（相対的）コホモロジー論の場合に拡張することを目標としています。まず背景として、有限群の場合を概観し、次章以降で拡張への試みを記します。

G を有限群としたとき、Tate cohomology $\hat{H}^n(G,M)$ が周期 d ($\geqslant 1, \in \mathbb{Z}$) をもつというのは、加群としての同型 $\hat{H}^n(G,M)\cong\hat{H}^{n+d}(G,M)$ が、任意の整数 n と任意の G-加群 M に対して成り立っていることをいう。そして、周期を持つためには、G のすべての abelian subgroup が巡回群であることが必要十分であることが知られている (Artin-Tate)。この理論を Cartan, Eilenberg [C-E] の方法に沿って見ていく際のポイントを記すと次のようになる：

1. **Tate cohomology (complete cohomology).** すべての次元で定義されたコホモロジーを用いる。ホモロジーも負の次元のコホモロジーとして取り込まれている: $\hat{H}^n(G,M)\cong\hat{H}_{-n-1}(G, M)$ for any $n\in\mathbb{Z}$.

2. **Cup product.** $\cup:\hat{H}^n(G,M)\otimes\hat{H}^m(G,N)\to\hat{H}^{n+m}(G,M\otimes N)$ を定義する。これから、cohomology ring $\hat{H}^*(G,\mathbb{Z}):=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\hat{H}^n(G,\mathbb{Z})$ が定義される。

3. **Duality Theorem.** 同型

$$\gamma_{n,-n}:\hat{H}^n(G,\mathbb{Z})\to\mathrm{Hom}(\hat{H}^{-n}(G,\mathbb{Z}),\hat{H}^0(G,\mathbb{Z}))$$

が $\gamma_{n,-n}(\alpha)(\beta)=\alpha\cup\beta$ によって与えられる。この証明には二つの方法が知られており、一つは dimension-shifting を用いて 0 ないし -1 次元での同型に帰着させる方法 ([C-E])。もう一つは、コホモロジーとホモロジーの間のある種の同型及び cap product を用いる方法である (Brown [Br])。

4. **周期性定理 (Artin-Tate).** $\alpha(\in\hat{H}^n(G,\mathbb{Z}))$ に対し次は同値：
   1. There exists $\beta\in\hat{H}^{-n}(G,\mathbb{Z})$ such that $\alpha\cup\beta=1$. (i.e. α is an *invertible* element in $\hat{H}^*(G,\mathbb{Z})$)
   2. $\alpha\cup-:\hat{H}^m(G,M)\to\hat{H}^{n+m}(G,M)$ is an isomorphism for any integer m and any G-module M.
   3. $\alpha\cup-:\hat{H}^0(G,\mathbb{Z})\to\hat{H}^n(G,\mathbb{Z})$ is an isomorphism.
   4. ord $\alpha=\mid G\mid$ (α is a *maximal generator*)

ここで、 $4 \Rightarrow 1$ のために上記 Duality Theorem が用いられる。

5. 周期を持つ G は $\cdots$. $\hat{H}^n(G, M)$ が周期的であるためには、「G のすべての abelian subgroup が巡回群であること」が必要十分である。また、「G のすべての Sylow subgroup が巡回群または一般四元数群であること」も同値な条件である。

なお、巡回群及び一般四元数群については、実際に周期 2 の complete resolution を作ることで、そのコホモロジーが周期 2 であることがわかる。

2 Frobenius Algebra

前節での流れに順じて、finitely generated free Frobenius R-algebra Λ （左 Λ-加群としての同型 $\Lambda \cong \mathrm{Hom}_R(\Lambda, R)$ が存在するもの）の場合に拡張を試みると以下のようになる。
より一般に Frobenius extension の場合は後に記します。

1. Complete cohomology. 1957年、Nakayama [Na] によって complete cohomology $\hat{H}^n(\Lambda, A)$ for $n \in \mathbb{Z}$ が定義された。これは Hochschild [H] あるいは [C-E] による cohomology $H^n(\Lambda, A)$ for $n \geqslant 0$ のある種の一般化である。すなわち、$\hat{H}^n(\Lambda, A) = H^n(\Lambda, A)$ for $n \geqslant 1$, $\hat{H}^0(\Lambda, A) = A^\Lambda / N_\Lambda(A)$ が成り立っている。

> この場合、complete homology $\hat{H}_n(\Lambda, A)$ も同様に定義されるが、有限群のコホモロジーの場合とは異なり、Nakayama automorphism Δ を用いて少し modify した homology との同型が知られています; $\hat{H}^n(\Lambda, A) \cong \hat{H}^{\Delta}_{-n-1}(\Lambda, A)$ for any $n \in \mathbb{Z}$.

2. Cup product. $\cup : \hat{H}^n(\Lambda, A) \otimes \hat{H}^m(\Lambda, B) \to \hat{H}^{n+m}(\Lambda, A \otimes_\Lambda B)$ が定義される (1992, Sanada [S1, S2])。したがって、cohomology ring $\hat{H}^*(\Lambda, \Lambda) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{H}^n(\Lambda, \Lambda)$ も定義される。同時に、Λ の Frobenius extension Γ に関して、restriction map $\mathrm{Res} : \hat{H}^n(\Gamma, A) \to \hat{H}^n(\Lambda, A)$ 及び corestriction map $\mathrm{Cor} : \hat{H}^n(\Lambda, A) \to \hat{H}^n(\Gamma, A)$ 等が定義できる。

3. Duality. $\gamma_{n,-n}(\alpha)(\beta) = \alpha \cup \beta$ によって与えられる写像

$$\gamma_{n,-n} : \hat{H}^n(\Lambda, \Lambda) \to \mathrm{Hom}_{Z\Lambda}(\hat{H}^{-n}(\Lambda, \Lambda), \hat{H}^0(\Lambda, \Lambda))$$

が同型になるかどうかは不明。ここで、$Z\Lambda$ は Λ の中心。ただ、特殊な case: Λ が complete local field 上の commutative separable algebra の maximal R-order (f. g. free) の場合には同型となる。

4. 周期について. $\alpha (\in \hat{H}^n(\Lambda, \Lambda))$ に対し $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ が成り立つ。$3 \Rightarrow 1$ については、"Duality Theorem" が成立すれば、当然ながら正しい。

1. There exists $\beta \in \hat{H}^{-n}(\Lambda, \Lambda)$ such that $\alpha \cup \beta = 1$. (i.e. α is an *invertible* element in $\hat{H}^*(\Lambda, \Lambda)$)
2. $\alpha \cup - : \hat{H}^m(\Lambda, A) \to \hat{H}^{n+m}(\Lambda, A)$ is an isomorphism of $Z\Lambda$-modules for any integer m and any two-sided Λ-module A.
3. $\alpha \cup - : \hat{H}^0(\Lambda, \Lambda) \to \hat{H}^n(\Lambda, \Lambda)$ is an isomorphism of $Z\Lambda$-modules.

5. 周期を持つ Λ は $\cdots$. 例えば、次のようなものが知られている。

1. 代数体の整数環、central simple algebra の maximal order は周期 2 のコホモロジーをもつ; 実際、complete local case に帰着させて、周期 2 の complete resolution を作ることによる (1968, Bobovich, Faddeev [Bo-F]; 1992, Larsen [L1, L2])。この場合、degree 2 の invertible element を見つけることもできる。
2. complete local case における central simple algebra の minimal hereditary order は周期 2 のコホモロジーをもつ; 実際に、degree 2 の invertible element を見つけることによる (1995, Sanada [S4])。

一方、周期をもたないものとしては、例えば整数環 $\mathbb{Z}$ 上の quaternion algebra がある (1993, Sanada [S3])。

ところで、Λ として群環 $\mathbb{Z}G$ をとると、同型 $\hat{H}^n(\mathbb{Z}G, A) \cong \hat{H}^n(G, {}_\psi A)$ が成り立つことから、有限群のコホモロジーの場合に帰着される。ここで、両側 Λ-加群 A に対し、${}_\psi A$ は G-conjugation によって作用する G-加群を表す。

定理 (1997, Nozawa, Sanada [No-S])　上記同型 $\hat{H}^n(\mathbb{Z}G, A) \cong \hat{H}^n(G, {}_\psi A)$ は cup product を保存する。よって、環同型 $\hat{H}^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G) \cong \hat{H}^*(G, {}_\psi \mathbb{Z}G)$ が存在する。

系　群環の cohomology ring $\hat{H}^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G)$ が degree n の invertible element を持つことと、群の cohomology ring $\hat{H}^*(G, \mathbb{Z})$ が degree n の invertible element を持つこと（よって、群のコホモロジーが周期 n をもつこと）とは同値である。

3 Frobenius Extension

Γ, Λ を R 上有限生成射影的多元環とする。環の拡大 Γ/Λ を Frobenius extension とする、すなわち、Γ は Λ 上加群として有限生成射影的であり、左 Γ-, 右 Λ- 加群としての同型 $\Gamma \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\Gamma, \Lambda)$ が存在するとする。Onodera [O] 等により、Γ の complete relative $(\Gamma \otimes_R \Gamma^{\mathrm{opp}}, \Lambda \otimes_R \Lambda^{\mathrm{opp}})$-projective resolution $X_{\Gamma/\Lambda}$ の存在が知られている。前節までと同様に各項目ごとに記すと、

1. **Complete relative cohomology.** 上の $X_{\Gamma/\Lambda}$ を用いて、両側 Γ-加群 A に対して、complete relative cohomology $\hat{H}^n(\Gamma, \Lambda, A)$ for $n \in \mathbb{Z}$ が定義される (1993, Nozawa [No1])。特に、$\Lambda = R$ とすれば前述の $\hat{H}^n(\Gamma, A)$ に一致する。

   また、同時に定義される complete relative homology との間に同型が存在するかどうかについては、[No2] で議論されている。

   有限群の complete relative (co)homology に関しては、一般には同型 $\hat{H}^n(G, H, M) \cong \hat{H}_{-n-1}(G, H, M)$ は成り立たないことが知られている（[H] 参照）。

2. **Cup product.** $\cup : \hat{H}^n(\Gamma, \Lambda, A) \otimes \hat{H}^m(\Gamma, \Lambda, B) \to \hat{H}^{n+m}(\Gamma, \Lambda, A \otimes_\Gamma B)$ が定義される ([No1, No2])。したがって、relative cohomology ring

$$\hat{H}^*(\Gamma, \Lambda, \Gamma) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{H}^n(\Gamma, \Lambda, \Gamma)$$

   も定義される。

3. **Duality.** 上述した cohomology と homology の間の同型の存在が、"Duality Theorem" の成立に関わっていることが、わかりつつあるようです。

4. 周期について. 前章と同様です。

5. 周期を持つ Λ は …. 今後の課題です。

特に、有限群 G とその部分群 H に対して、$\Gamma = \mathbb{Z}G, \Lambda = \mathbb{Z}H$ とおくと、同型 $\hat{H}^n(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H, A) \cong \hat{H}^n(G, H, {}_\psi A)$ が存在するので、この場合は、Adamson [A] あるいは Hochschild [H] による群の relative cohomology に帰着される。そして、この場合も次が成り立つ：

定理 (1997, Nozawa, Sanada [No-S]) 上記同型 $\hat{H}^n(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H, A) \cong \hat{H}^n(G, H, {}_\psi A)$ は cup product を保存する。よって環同型 $\hat{H}^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H, \mathbb{Z}G) \cong \hat{H}^*(G, H, {}_\psi \mathbb{Z}G)$ が存在する。

系 群環の relative cohomology ring $\hat{H}^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H, \mathbb{Z}G)$ が degree n の invertible element を持つことと、群の relative cohomology ring $\hat{H}^*(G, H, \mathbb{Z})$ が degree n の invertible element を持つこととは同値である。

参考文献

[A] I. T. Adamson, Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields, *Proc. Glasgow Math. Assoc.* **2** (1954), 66–76

[Bo] F. R. Bobovich, Cohomologies of maximal orders of simple central algebras, *Math. Notes* **6** (1969), 589–592

[Bo-F] F. R. Bobovich and D. K. Faddeev, Hochschild cohomologies for $\mathbb{Z}$-rings with a power basis, *Math. Notes* **4** (1968), 575–581

[Br] K. S. Brown, "Cohomology of Groups", *Springer, Berlin* (1982)

[C-E] H. Cartan and S. Eilenberg, "Homological Algebra", *Princeton University Press, Princeton, NJ* (1956)

[L1] M. Larsen, Homology of maximal orders in central simple algebras, *Comm. Math. Helv.* **67** (1992), 613–634

[L2] M. Larsen, Filtrations, mixed complexes, and cyclic homology in mixed characteristic, *K-Theory* **9** (1995), 173–198

[Na] T. Nakayama, On the complete cohomology theory of Frobenius algebras, *Osaka Math. J.* **9** (1957), 165–187

[No1] T. Nozawa, On the complete relative cohomology of Frobenius extensions, *Tsukuba J. Math.* **17** (1993), 99–113

[No2] T. Nozawa, On the complete relative homology and cohomology of Frobenius extensions, *Tsukuba J. Math.* **19** (1995), 57–78

[No3] T. Nozawa, On the periodicity of the complete cohomology of Frobenius extensions, preprint

[No-S] T. Nozawa and K. Sanada, Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras, preprint (1997)

[O] T. Onodera, Some studies on projective Frobenius extensions, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.* **18** (1964), 89–107

[S1] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **80** (1992),65–88

[S2] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras II, *J. Pure Appl. Algebra* **80** (1992),89–106

[S3] K. Sanada, On the Hochschild cohomology of crossed products, *Comm. Algebra* **21** (1993),2727–2748

[S4] K. Sanada, Hochschild cohomology of minimal hereditary orders, *J. Algebra* **176** (1995),786–805

162-0827 東京都新宿区若宮町 26
東京理科大学理学部数学教室
E-mail: `sanada@rs.kagu.sut.ac.jp`