数理解析研究所講究録
1064巻 1998年 15-24

古典変分解析より確率場の変分へ

名城大学　理工学部　　飛田　武幸　（ Takeyuki Hida ）

§1　始めに

関数や図形を変数とする関数、すなわち汎関数の解析を扱うのが変分法である。その歴史は古く、多くの結果があるが、これまで汎関数の極値を求めることに大きなウエイトがおかれていたようである。

変分の理論は一面1変数あるいは多変数（有限個の変数）の解析の拡張と考えられるかもしれないが、実はそのような視点を遥かに超えて、深いものがあって、内容も豊富である。さらに、幅広い応用のあることも特徴である。

ところで、確率解析の発展に伴い、ランダムな汎関数である確率場の重要性が認識されるようになってきた。ここで思い出したいのは古典関数解析がホワイトノイズ解析に大きな刺激を与えた経緯である。同じように、確率場の解析にも古典変分解析が重要な貢献をするであろうことが期待される。

このように、多分に限定された立場から、再び温故知新の故知にならい、変分法の歴史を訪ねてホワイトノイズ解析の発展に資したい。これまで、確率場の変分を考えるにあったて、我々が最も多くの示唆を与えられたものは前世紀末から今世紀の前半にかけてヨーロッパで発展した関数解析、すなわち

Volterra → Hadamard → Fréchet → Lévy

と続いた関数解析の中で特に変分法に関するものであった。また、これに関連した研究の中にも教えられるところが多いであろうことを期待して、変分法の歴史をひもどくことにした。

なお、情報理論的な立場から古典的な結果に対して若干の考察を加えることも今回の目標の一つである。

§2　一つの展望

前節で触れたように、ホワイトノイズ解析を進めるにあたって、前世紀の終わり頃から今世紀の中頃までに隆盛を極めた古典関数解析の中にアイディアを見出すことが多かった。その事情をみれば、どちらの解析も

1）無限次元解析であること、

2）関数空間の測度（あるいはそれに相当するもの）を導入すること、それは有限次元の場合と異なる困難さがあり、それを克服していること、

3）関数空間の変換群のもつ役割が認識され、調和解析の要素が重要視されていること、

4）諸分野、特に物理学からの問題提起が多く、それが刺激になっている、

等をあげることができる。これらのことを念頭におきながら、古典との対比を考えたい。

もう一つの観点がある。確率論の話をしようとするとき、なぜ確率場を重要なものとして取り上げるのか、その理由である。

確率過程 $X(t)$ の場合、それは時刻 t の動きに応じた偶然量の推移の様子を表している。そこではパラメータ t の動きは1次元的でしかありえない。ところが、確率場のときには、事情は複雑になる。モデルで言うと、環境（領域）によって変化する偶然量とか、ループを変数にもつ確率変数のシステムのような確率場では、各パラメータは1次元以上であり、その動く範囲は一般に無限次元である。そのため、情報論的にみれば、パラメータの動きに応じて記述する偶然量の変化は $X(t)$ のときと較べて比較にならない程豊富であり、興味深いものとなる。

これが我々を変分に駆り立てる一つの要因である。そして、確率変分の難しさを認識するとともに、可能なアプローチの仕方をできるだけ模索しようとするのである。本稿はその一環であり、この試みが目標への小さな一歩となることを期待する。

§ 3　変分法小史

重要な記録として残っているものとして、先ず次の事実を取り上げよう。

1696 Johann Bernoulli　brachistochrone の問題

ギリシャ語　bracistos = shortest,　chronos = time

最速降下曲線を求めた。

Leonhard Euler

1707 スイスに生まれる。父は牧師、神学より数学を選んだ。

14 才で Basel 大学入学、 Johann Bernoulli に師事した。

1727 - 1741 St. Petersburg Academy

1741 - 1766 Berlin Academy

1766 - 1783 St. Petersburg Academy

33 才までに数学と物理の著書および論文８０編を発表。

同時にロシヤ政府の高官。教科書も書く。

ドイツ時代　Academy の総裁 (Frederick the Great の時代)

政治でも活躍した。年金の問題なども扱う。

この時代に３８０編の著書および論文を書く。

1765 (58 才) 以後に生涯の業績の半分以上を発表した。

1783.9.18 没。

Euler の数学はいつも応用と結びついていた。物理の問題を数学的に解くだけでなく、それを一般論にまで高めていた。

Euler の遺産：

e (1727);　f(x) (1734);　sin x,　cos x,　tan x (1748)

Σ sum (1755);　$\sqrt{-1} = i$ (1777)

Cauchy-Riemann の方程式、　線積分　etc.

数学のあらゆる分野で (変分法を含め) 極めて大きな業績を残した。

全集 (Opera Omnia) 4 シリーズ、72 巻。第 24 巻 (タイトルは下記) と25 巻は変分を扱う。

<u>Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes</u>.

ここで minimum or maximumm $\int Zdx$, Z は x, y, p = dy/dx,,...の関数
x の区間を等分した近似、微分は定差で近似するなどを扱う。

Euler 方程式は、いつまでも最も基本的なものとして変分法の中に君臨し続けているようだ。

Vito Volterra (Italy) 1860 - 1940.

1882 Pisa 大学 物理学博士 （流体力学）

1883 Pisa 大学 力学教授

汎関数（この命名は後に Hadamard によってなされた）の概念の導入、その解析の展開が始まる。積分可能の条件など。

1887 曲線の汎関数の取り扱い（曲線は関数によって表示）。

1888 Academia dei Lincei: non-resident member.

1896 積分方程式論： Volterra 型方程式。

$$g(y) = f(y) + \int^{y} f(x) S(x,y) dx$$

1901 この頃から生物学に興味をもつ。

1909 積分微分方程式

1931 生存競争の数学に関する著書：

"Lecon sur la Theorie mathematique de la Lutte pour la Vie" 1931.

The Lotka-Volterra equation

$$dN_1/dt = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)N_1 \qquad \text{(prey)}$$

$$dN_2/dt = (-\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1)N_2 \qquad \text{(predator)}$$

人口統計的エネルギー保存則。

quantity of life, vital action, demographic energy,etc.を定義して<u>変分原理により取り扱う</u>（cf.古典力学）。この方面でのパイオニア的な仕事とみられる。

その後も、関数解析に対する貢献、さらに積分方程式論、関数空間の回転群などを論じた。

David Hilbert (Germany) 1862 - 1943

1900 Paris ICM <u>Hilbert の第２３問題</u>として。

「変分学の方法の研究の発展」

Courant-Hilbert の数理物理学の名著には変分に関する重要な記述が多い。

Weierstrass の仕事を評価していたようだ。

Jacques S. Hadamard (France) 1865 - 1963

500 ページを越える変分法の大著：

Leçons sur le Calcul des Variations. Librairie Scientifique.

A.Herman et Fils. 1910

があり、古典的な結果はこの書物に負うところが多く基本的なテキストとして大事な位置を占めてきた。ここでは Euler 型の汎関数の変分の総合的な結果の他、閉曲線の汎関数も扱っていて歴史的にも高く評価されている。

グリーン関数の変分に対するいわゆる Hadamard equation はいくつかの彼の論文で詳しく論じられている。

変分法に対する Hadamard の功績は格別に大きなものであり、他の視点も加えて別な機会に論じたい。

Leonida Tonelli (Italy) 1885 - 1946

次の二大部作がある。

Fondamenti di Calcolo delle Variazioni. vol.Primo 1921, 466頁

〃 vol.Secondo 1923, 660頁

ここでは、曲線Cの関数、Euler 方程式、等周問題、変分の具体的な諸例を述べている。

Paul Lévy (France) 1886 - 1971

1911 年の学位論文

"Sur les equations integro-differentielles definissant des fonctions de lignes" 120 pages.

では Hadamard equation の一般化とその積分可能性で占められている。

変分法一般の解説と問題の解法については次の二つの著書で論じられている。

Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, 1922.

Problèmes concréts d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars. 1951.

これらの書物において、変分法が関数解析の重要な課題として位置づけられていることに注意したい。

G(x,y;C) を境界Cの領域に対するグリーン関数とするとき、Cの微小変化 δC に対してGの変分 δG は次の Hadamard equation で与えられる：

$$\delta G(x,y,C) = -(1/2\pi)\int_C (\partial G(t,x,C)/\partial n_t)(\partial G(y,t,C)/\partial n_t)\,\delta n_t ds_t$$

ただし法線方向の変異 δn は内向きにとる。

さらに Levy は帯電曲面のなす電磁場について曲面が変形するときの場の変分問題 (1918)とか、Neumann 関数の変分なども扱う (1967) など、いづれにも興味深い公式を出している。

また、1951 年の書物には、周知のように

$\boxed{\text{ホワイトノイズ解析や確率場の変分に移行できる}}$

ような議論が多く、我々の目指す現代的な確率解析に対する示唆に富んでいる。また、その意味で新しい解釈によって、問題提起と受け取れる事柄が随所に見られ注目すべき文献である。

Eberhard Hopf 1902 - 1983

Statistical hydromechanics and functionalcalculus. J. Rational Mech. and Analysis.(1952), 87 - 123.

N-S equation —> ensemble —> measure —> chracteristic functional

の図式から、特性汎関数のみたす汎関数微分方程式を示した。

1964年の論文では、 続いて Hamilton-Jacobi equation への展開をはかっている。

P.A.M.Dirac (England) 1902 - 1984

量子力学の設定について、Hamiltonian Theory より Lagrangian Dynamics を選ぶ。理由は

i) Action integral を用いて stationary property が定義できる。変分法が使える。これは Hamiltonian ではできない。

ii)Lagrangian 法なら相対論にできる。Hamiltonian では essentially non-relativistic である。

著書 Quantum Mechanics 1958, §32 Action principle で経路積分を指向した記述があるが、内容的には以前からあったアイデイアと思はれる。実際、1933年の論文 (Phys.Z.USSR, vol.3) では既にこれを場の場合に拡張しようとしている。従って Schrödinr equatin の代わりに自然に変分方程式が出る筈である。

ホワイトノイズ解析の発展の一つの方向として場の量子論へのアプローチを試みようとするとき、上記の書物をはじめとして、我々にとって注目すべき興味深い論文を多数見出すことができる。

朝永 振一郎　1906 - 1979

<u>朝永方程式</u>

相対論的場の理論：　状態ベクトルを$\Psi[\sigma]$と書く。ただしσは曲面を表す。このとき

$$\boxed{i\delta\Psi[\sigma]/\delta\sigma = H(x,\sigma)\Psi[\sigma]}$$

積分可能条件は次のように表される。

$$\delta H(x,\sigma)/\delta\sigma(x') - \delta H(x'\sigma)/\delta\sigma(x) = i[H(x,\sigma),H(x',\sigma)],$$

ここで　[,] は commutator.

「註」Hadamard equation などの変分法の現代的な扱い (Aomoto,その他) や最適制御の問題などで重要な貢献が知られているが、ここではそれに立ち入ることはできない。

§4　確率場 X(C) へ

確率過程 X(t) の場合、t は0次元の図形で1次元空間を動く。一方、確率場 X(C) では C は1次元、2次元など有限次元で、それが動く空間は無限次元である。時刻や空間の点などのパラメータが動くにしたがって、つぎつぎに獲得される情報は後者のほうが遥かに豊富であることは容易に推測できよう。当然それは複雑系の記述には好都合である。

我々が特に興味をもつ偶然現象としての複雑系がホワイトノイズの汎関数となるときを研究の対象としたいのであるが、上記の理由により、その現象の観測にあたっては時刻 t のみに依存した確率過程として測定するよりも、時空のパラメータ C の関数である確率場としてデータを得るほうが破格に多くの情報を得ることになる。

解析にあたっては innovation を構成するのが一つの強力な手段であるが、その際パラメータの選択によって有効さに大きな差異ができる。当然のことながら場として対処できるに越したことはない。ところで、innovation の重要性はそれ自身が深い意味をもつ他、確率変分方程式を定式化するのに必須なものである。この方程式についての詳しい話の理解には、新しい理論による説明を待たなければならない。

当然、応用にあたっては、Weierstrass の条件を確かめる必要がある。

これまでに確率場の変分解析のための Background として当面整備すべき次の諸点が考えられた。

（1） C の動く範囲として定めておくクラス $\mathbf{C}$ の決定。

（2） 許容されてる C の deformations のなす変換群の選択。

（3） ホワイトノイズのパラメータを C に制限するために周辺分布の定義が必用。

（4） 確率変分に移行するために key point となる idealized elementary random variables （ 確率素子 ）の導入。

などがある。詳しい議論はここでは省略して、以上のことを要請させる原因となったいくつかの例をあげるにとどめる。

例１。マルチンゲール型の確率場.
x をホワイトノイズとする。

$$X(C) = \int_{(C)} f(u)\ x(u)\ du \quad , \quad u \varepsilon R^d, \quad (C)\text{は } C \text{ で囲まれた領域、}$$

例２。Langevin type random field.

$$X(C) = A\int_{(C)} \exp[-d(C,u)f(u)]v(u)x(u)du, \qquad x\text{: white noise, } C\text{:円周, } d \text{ 距離。}$$

パラメータが t のときの Langevin equation を、パラメータが C の場合に拡張することは自明ではない。ここでは、X(C) の変分 $\delta X(C)$ 形を整えるため C を円周にとった。

例３。Homogeneous random field.

確率場がホワイトノイズの斉次多項式で与えられるときには innovation が具体的に求められる。そのとき、当然非線形な演算を必用とする。

例４。グリーン関数を積分核とする場合。

曲線 C の動く範囲を卵形線に限定しておく。C の囲む領域に対するグリーン関数を G(u,v,C) と書く。ここでも x をホワイトノイズとして

$$X(C) = X(C,u) = \int_C G(u,v,C)x(v)dv$$

により確率場 X(C) を定義する。　明らかに変分 $\delta X(C)$ の表現にはグリーン関数の変分 $\delta G(u,v,C)$ が必要となる。ここで Hadamard equation が登場することになるが、その証明にあたりクラスＣの選択に注意が必要である。

すぐわかるように、変数を u とするラプラシアンを施せば innovation としての x(u) が求まる。

「文献追加」

[1] I.M. Gel'fand and Fomin, ロシア語　1861;

日本語版　：　関根智明訳、変分法　文一総合出版、1970.

[2] E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, tom III, Chap.34, Gauthier-Villars. 1927.

[3] P. Lévy, Sur la variation de la distribution de l'électricité sur un conducteur dont la surface se déforme. Bull.Soc. Math. France 46, (1918), 35 - 68.

[4] V.Volterra, Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations. Dover Edition. 1959.