数理解析研究所講究録
1065巻 1998年 33-43

種数4のコンパクト リーマン面の自己同型群の位相同値による分類について

愛知産業大学造形学部　木村　秀幸 (Hideyuki Kimura)

問題設定

Xを種数$g(\geq 2)$のコンパクト リーマン面、$\mathbf{Aut}(X)$をX上の双正則写像全体の作る群、$G\subset\mathbf{Aut}(X)$を$\mathbf{Aut}(X)$の部分群とする。このとき組(X,G)に次の同値関係を定義する：
2つの組$(X_1,G_1),(X_2,G_2)$が（位相）同値であるとは向きを保つ同相写像$h:X_1\to X_2$および同型写像$\iota:G_1\to G_2$が存在して

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\iota(\sigma) \\ X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \end{array}\qquad\qquad \forall\sigma\in G_1$$

が成り立つことをいう。ここでは$g=4$の場合の位相同値による分類について述べる。

これまでの研究

位相同値による分類に関連して次のような研究が行われてきた。

(1)X上の正則1形式の空間を表現空間とした表現$\rho:\mathbf{Aut}(X)\to GL(g,\mathbf{C})$の像$\rho(G)$の分類。

種数2の場合I.Kuribayashi [4]、種数3, 4の場合A.Kuribayashi and I.Kuribayashi [3], 種数5の場合A.Kuribayashi and H.Kimura [2]によって$\rho(G)$の分類が得られている。

(2) 上記の位相同値による分類

種数2の場合I.Kuribayashi [5]、種数2, 3の場合S.A.Broughton[1]によって組(X,G)の位相同値による分類が得られている。

I.Kuribayashi [5]は種数2の場合には$\rho(G)$の分類と組(X,G)の位相同値による分類が一致することを示した。またS.A.Broughton[1]より種数3の場合も同様のことが成立することがわかる。

主結果

定理　Xを種数4のコンパクト リーマン面、$\mathbf{Aut}(X)$をX上の双正則写像全体の作る群、$G\subset\mathbf{Aut}(X)$を$\mathbf{Aut}(X)$の部分群とする。このとき組(X,G)は表1の全射準同型写像φに対応する(X',G')のいずれかに位相同値となる。また表1のφに対応する(X',G')は互いに位相同値でない。

この定理をもう少し具体的にいうと『Gが位数5の巡回群$\mathbf{Z}_5$、位数10の二面体群D_{10}のどちらとも同型でないならば$\rho(G)$の分類と組(X,G)の位相同値による分類は一致し、G

が $\mathbf{Z}_5$ または D_{10} に同型の場合には $\rho(G_1)=\rho(G_2)$ であるが (X_1,G_1) と (X_2,G_2) が位相同値でないものが存在する』となる。

注意

位相同値にはもう１つ異なる流儀の定義がある、つまり X を種数 $g(\geq 2)$ のコンパクトリーマン面、$\mathbf{Aut}(X)$ で X 上の双正則写像全体の作る群、G を有限群、$\iota : G \to \mathbf{Aut}(X)$ を中への単射準同型写像とする。このとき組 (X,ι) に次の同値関係を定義する：

2 つの組 $(X_1,\iota_1),(X_2,\iota_2)$ が（位相）同値であるとは向きを保つ同相写像 $h : X_1 \to X_2$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \\ \iota_1(\sigma)\downarrow & & \downarrow \iota_2(\sigma) \\ X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \end{array} \qquad \forall\sigma\in G.$$

が成り立つことをいう。(X,ι) の位相同値による分類より (X,G) の位相同値による分類のほうが粗い分類になっている、つまり一般に (X,G) の同値類に対して (X,ι) の複数個の同値類が対応する。種数４の場合には (X,G) の同値類に対応する (X,ι) の同値類には異なる r 符号（分岐データを精密にしたもの）が対応している。従って種数４の場合 (X,ι) の位相同値による分類は (X,G) の位相同値による分類結果をさらに r 符号によって分類することにより得られる。

準備

組 (X,G) が与えられたとする。X を Fuchs 群 K を用いて $X={}^{U}\!/_{K}$ と表わし、G の元の U への持ち上げと K の元で生成された群を Γ とする、ただし U は上半平面。このとき $\tilde{\gamma}\in\Gamma$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^{U}\!/_{K} & \xrightarrow{\gamma} & {}^{U}\!/_{K} \end{array} \qquad \tilde{\gamma}\in\Gamma$$

を可換にする G の元 γ が定まる。この対応は Γ から G への全射準同型写像でありその核 K は torsion free である。この準同型写像に φ と名前をつける。

Γ が次の表示を持つとき、$[g_0,|G|,r;m_1,...,m_r]$ を G の分岐データと呼ぶ：

$$\Gamma=\left\langle \alpha_1,\beta_1,...,\alpha_{g_0},\beta_{g_0},\gamma_1,...,\gamma_r \,\middle|\, \prod_{i=1}^{g_0}[\alpha_i,\beta_i]\prod_{j=1}^{r}\gamma_j=\gamma_1^{m_1}=...=\gamma_r^{m_r}=1\right\rangle$$

もし (X_1,G_1) と (X_2,G_2) が位相同値ならば向きを保つ同相写像 $h : X_1 \to X_2$ の U への持ち上げ (で向きを保つ同相写像) $\tilde{h} : U \to U$ で

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{h}} & U \\ \sigma_1\downarrow & & \downarrow \sigma_2 \ (\forall\sigma_1\in\Gamma_1,\sigma_2\in\Gamma_2) \\ U & \xrightarrow{\tilde{h}} & U \end{array}$$

を満たすものが存在する。そして$\sigma \to \tilde{h}\sigma\tilde{h}^{-1}$は$\Gamma_1$と$\Gamma_2$の間の同型写像を与える、これを$\theta$と書く。この$\theta$を向きを保つ同相写像$\tilde{h}$から induce された同型写像と呼ぶ。このとき図式

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & G_1 \\ \theta\downarrow & & \downarrow\iota \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & G_2 \end{array}$$

が可換となる。ただしφ_1, φ_2は$(X_1, G_1), (X_2, G_2)$が定める全射準同型写像である。

逆にこの図式を可換にする向きを保つ同相写像から induce された同型写像θおよび同型写像$\iota : G_1 \to G_2$が存在すれば対応する 2 つの組$(X_1, G_1), (X_2, G_2)$は位相同値となる。

以上より 2 つの組$(X_1, G_1), (X_2, G_2)$が位相同値であることと向きを保つ同相写像が induce する同型写像$\theta : \Gamma_1 \to \Gamma_2$と同型写像$\iota : G_1 \to G_2$が存在して

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & G_1 \\ \theta\downarrow & & \downarrow\iota \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & G_2 \end{array}$$

が成立することとは同値であることがわかる。この場合φ_1とφ_2が位相同値であると呼ぶ。さらに同じ符号を持つ Fuchs 群Γ_1, Γ_2に対しては擬等角写像$w : U \to U$で同型写像$\tilde{\theta} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$を induce するものが存在することが知られている。

従って、組(X, G)を位相同値で分類するためには全射準同型写像$\varphi : \Gamma \to G$で$Ker\varphi$が torsion free となるものを位相同値で分類すればよいことがわかる。

<u>注意</u>　$\varphi : \Gamma \to G$に対して$Ker\varphi$が torsion free となることとφがΓの位数有限の元の位数を保つこととは同値。

[3] において$\rho(G)$が分類されているので我々は各$\rho(G)$に対して$\rho(G)$の分岐データ$[g_0, |G|, r; m_1, ..., m_r]$から定義される Fuchs 群

$$\Gamma = \left\langle \alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_{g_0}, \beta_{g_0}, \gamma_1, ..., \gamma_r \,\middle|\, \prod_{i=1}^{g_0} [\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^{r} \gamma_j = \gamma_1^{m_1} = ... = \gamma_r^{m_r} = 1 \right\rangle$$

から$\rho(G)$と同型な群Gへの torsion free な核を持つ全射準同型写像$\varphi : \Gamma \to G$を位相同値で分類すればよい。以下では位数 10 の非巡回群の場合を例に我々の定理の証明の概略を述べる。

<u>証明の概略</u>

[3] から種数 4 の位数 10 の非巡回自己同型群に対応する$\rho(G)$は次の群に$GL(4, \mathbf{C})$-共役になる：

$$\left\langle \begin{pmatrix} \zeta & & & \\ & \zeta^2 & & \\ & & \zeta^3 & \\ & & & \zeta^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \right\rangle, \zeta = \zeta_5 = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}.$$

この群は二面体群$D_{10} = \langle A, B \,|\, A^5 = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{-1} \rangle$に同型であり、分岐データは$[0, 10, 4; 2, 2, 5, 5]$である。

従って$\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, | \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^5 = \gamma_4^5 = 1 \rangle$ から D_{10}への全射準同型写像φ でΓの位数有限の元の位数を保つもので互いに位相同値でないものをすべて求めればよい。

D_{10}の指標表

元の位数	1	2	5	5
共役類の濃度	1	5	2	2
共役類	C_0	C_1	C_2	C_3
代表元	1	B	A	A^2
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	1
χ_2	2	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
χ_3	2	0	$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ただし $C_0 = \{1\}, C_1 = \{B, AB, A^2B, A^3B, A^4B\}, C_2 = \{A, A^4\}, C_3 = \{A^2, A^3\}$。上の D_{10} の指標表を固定するとφ は位数有限の元の位数を保つので$\varphi(\gamma_1), ..., \varphi(\gamma_4)$ は次の (1), (2), (3) のいずれかを満足する：

(1) $\varphi(\gamma_1), \varphi(\gamma_2) \in C_1, \varphi(\gamma_3), \varphi(\gamma_4) \in C_2$

(2) $\varphi(\gamma_1), \varphi(\gamma_2) \in C_1, \varphi(\gamma_3), \varphi(\gamma_4) \in C_3$

(3) $\varphi(\gamma_1), \varphi(\gamma_2) \in C_1, \varphi(\gamma_3) \in C_2, \varphi(\gamma_4) \in C_3$ $(\varphi(\gamma_3) \in C_3, \varphi(\gamma_4) \in C_2)$

いずれの場合も$\varphi(\gamma_1) \in C_1$なので$\varphi(\gamma_1)$ は B, AB, A^2B, A^3B, A^4Bのいずれかとなる。$x \in \Gamma$ に対して$\varphi'(\gamma) := \varphi(x\gamma x^{-1})$ とおくと

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\varphi} & G \\ i_x \downarrow & & \downarrow id \\ \Gamma & \xrightarrow{\varphi'} & G \end{array}$$

が可換になる、ただし $i_x(y) = x^{-1}yx$. つまりφ とφ'は位相同値となる。従って$\varphi(\gamma_1) = B$ と仮定できる。同様に Bの中心化群 $C_G(B) = \langle B \rangle$ の元 Bを用いて

$$B^{-1}(AB)B = A^4B$$

$$B^{-1}\left(A^2B\right)B = A^3B$$

が成り立つことを考慮すると

$$\varphi(\gamma_2) = B\text{または} AB\text{または} A^2B$$

としてよい。さらに同様の議論を繰り返すことにより次の 10 通りのφ を考えればよいこと

がわかる:

	$\varphi(\gamma_1)$	$\varphi(\gamma_2)$	$\varphi(\gamma_3)$	$\varphi(\gamma_4)$
φ_1	B	B	A	A^4
φ_2	B	B	A^2	A^3
φ_3	B	AB	A	1
φ_4	B	AB	A^4	A^2
φ_5	B	AB	A^2	A^4
φ_6	B	AB	A^3	A^3
φ_7	B	A^2B	A	A
φ_8	B	A^2B	A^4	A^3
φ_9	B	A^2B	A^2	1
φ_{10}	B	A^2B	A^3	A^4

$\varphi_1, ..., \varphi_{10}$の中で$\varphi_3$および$\varphi_9$は条件$\varphi(\gamma_4) \in C_2$または$C_3$に反するので不適。残りの8個の$\varphi$の中で$\varphi_4$と$\varphi_5$は

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\varphi_4} & G \\ \theta_{(3,4)} \downarrow & & \downarrow id \\ \Gamma & \xrightarrow{\varphi_5} & G \end{array}$$

が成り立つので位相同値となる、ただしidは恒等写像、

$$\theta_{(3,4)} \begin{pmatrix} \gamma_1 \to \gamma_1 \\ \gamma_2 \to \gamma_2 \\ \gamma_3 \to \gamma_4 \\ \gamma_4 \to \gamma_4^{-1}\gamma_3\gamma_4 \end{pmatrix}.$$

同様にφ_8とφ_{10}も位相同値となる。またφ_1とφ_7は

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\varphi_1} & G \\ \theta \downarrow & & \downarrow id \\ \Gamma & \xrightarrow{\varphi_7} & G \end{array}$$

が成り立つので位相同値となる、ただし

$$\theta \begin{pmatrix} \gamma_1 \to \gamma_1 \\ \gamma_2 \to (\gamma_3\gamma_1)^{-1}\gamma_2(\gamma_3\gamma_1) \\ \gamma_3 \to \gamma_3 \\ \gamma_4 \to \left(\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3\right)^{-1}\gamma_4\left(\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3\right) \end{pmatrix}.$$

類似のΓの自己同型写像を用いることによりφ_2とφ_6、φ_4とφ_8は位相同値となる。さらにφ_1とφ_2は

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\varphi_1} & G \\ id \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \Gamma & \xrightarrow{\varphi_2} & G \end{array}$$

が成り立つので位相同値となる、ただし

$$\sigma \begin{pmatrix} A \to A^2 \\ B \to B \end{pmatrix}.$$

以上の考察より G が D_{10} に同型の場合には torsion free な核を持つ全射準同型写像 φ は φ_1 または φ_4 のどちらかに位相同値となる。

最後に φ_1 と φ_4 は位相同値でないことを示す。今、φ_1、φ_4 に対応するコンパクトリーマン面と自己同型群の組をそれぞれ $(X_1, G_1), (X_4, G_4)$ とする。もし (X_1, G_1) と (X_4, G_4) が位相同値ならば G_1 の位数 5 の元 σ_1 と G_4 の位数 5 の元 σ_4 および向きを保つ同相写像 $h : X_1 \to X_4$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_4 \\ \sigma_1 \downarrow & & \downarrow \sigma_4 \\ X_1 & \xrightarrow{h} & X_4 \end{array}$$

が成り立つ。σ_1, σ_4 は 4 個の不動点を持ち、不動点 P における回転角 $\zeta_P(\sigma)$ を

$$\#\{P \in X \,|\, \zeta_P(\sigma) = \zeta_5^u\} = \sum_{\substack{j \\ 5|m_j}} \frac{1}{m_j} \# \left\{ \alpha \in G \,\middle|\, \sigma = \alpha \varphi(\gamma_j)^{u\frac{m_j}{5}} \alpha^{-1} \right\}$$

で計算すると σ_1 の不動点における回転角は

$$\zeta_5, \zeta_5, \zeta_5^4, \zeta_5^4 \text{ または } \zeta_5^2, \zeta_5^2, \zeta_5^3, \zeta_5^3$$

σ_4 の不動点における回転角は

$$\zeta_5, \zeta_5^2, \zeta_5^3, \zeta_5^4$$

となる。一方 $P \in X_1$ における回転角 $\zeta_P(\sigma_1)$ と $h(P) \in X_4$ における回転角 $\zeta_{h(P)}(\sigma_4)$ とは一致するので矛盾を生じる。

以上より G が位数 10 の非巡回群の場合には

$$\varphi_1 \begin{pmatrix} \gamma_1 \to B \\ \gamma_2 \to B \\ \gamma_3 \to A \\ \gamma_4 \to A^4 \end{pmatrix} \text{ または } \varphi_4 \begin{pmatrix} \gamma_1 \to B \\ \gamma_2 \to AB \\ \gamma_3 \to A^4 \\ \gamma_4 \to A^2 \end{pmatrix}$$

のいずれかに位相同値であり、この 2 つは位相同値でないことがわかる。　　証明の概略終

参考文献

[1] S.A.Broughton, Classifying finite group actions on surfaces of low genus, J. Pure Applied Algebra69(1990) pp.233-270.

[2] A.Kuribayashi and H.Kimura, Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus five, J. Algebra134(1990) pp.80-103.

[3] I.Kuribayashi and A.Kuribayashi, Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genera three and four, J. Pure Applied Algebra65(1990) pp.277-292.

[4] I.Kuribayashi, On an algebraization of the Riemann-Hurwitz relation, Kodai Math. J. 7(1984) pp.222-237.

[5] I.Kuribayashi, Classification of automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus two, preprint,Tsukuba,(1986) .

表 1

$No.$	G	$\lvert G\rvert$	$[g_0, \lvert G\rvert, r; m_1, ..., m_r]$	G の表示	$(\varphi(\alpha_1), ..., \varphi(\beta_{g_0}), \varphi(\gamma_1), ..., \varphi(\gamma_r))$
1	$\mathbf{Z}_1$	1	$[4, 1, 0; -]$	$\langle A \mid A = 1\rangle$	$(1,1,1,1,1,1,1,1)$
2	$\mathbf{Z}_2$	2	$[0, 2, 10; 2, ..., 2]$	$\langle A \mid A^2 = 1\rangle$	(A,A,A,A,A,A,A,A,A,A)
3	$\mathbf{Z}_2$	2	$[1, 2, 6; 2, 2, 2, 2, 2, 2]$	$\langle A \mid A^2 = 1\rangle$	$(1,1,A,A,A,A,A,A)$
4	$\mathbf{Z}_2$	2	$[2, 2, 2; 2, 2]$	$\langle A \mid A^2 = 1\rangle$	$(1,1,1,1,A,A)$
5	$\mathbf{Z}_3$	3	$[2, 3, 0; -]$	$\langle A \mid A^3 = 1\rangle$	$(1,1,1,A)$
6	$\mathbf{Z}_3$	3	$[1, 3, 3; 3, 3, 3]$	$\langle A \mid A^3 = 1\rangle$	$(1,1,A,A,A)$
7	$\mathbf{Z}_3$	3	$[0, 3, 6; 3, 3, 3, 3, 3, 3]$	$\langle A \mid A^3 = 1\rangle$	(A,A,A,A,A,A)
8	$\mathbf{Z}_3$	3	$[0, 3, 6; 3, 3, 3, 3, 3, 3]$	$\langle A \mid A^3 = 1\rangle$	(A,A,A,A^2,A^2,A^2)
9	$\mathbf{Z}_4$	4	$[0, 4, 6; 2, 2, 2, 2, 4, 4]$	$\langle A \mid A^4 = 1\rangle$	(A^2,A^2,A^2,A^2,A,A^3)
10	$\mathbf{Z}_4$	4	$[0, 4, 5; 2, 4, 4, 4, 4]$	$\langle A \mid A^4 = 1\rangle$	(A^2,A,A,A,A^3)
11	$\mathbf{Z}_4$	4	$[1, 4, 2; 4, 4]$	$\langle A \mid A^4 = 1\rangle$	$(1,1,A,A^3)$
12	$\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$	4	$[0, 4, 7; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$	$\langle A, B \mid A^2 = B^2 = 1, AB = BA\rangle$	(A,A,A,B,B,B,AB)
13	$\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$	4	$[0, 4, 7; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$	$\langle A, B \mid A^2 = B^2 = 1, AB = BA\rangle$	(A,A,A,A,A,B,AB)
14	$\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$	4	$[1, 4, 3; 2, 2, 2]$	$\langle A, B \mid A^2 = B^2 = 1, AB = BA\rangle$	$(1,1,A,B,AB)$
15	$\mathbf{Z}_5$	5	$[0, 5, 4; 5, 5, 5, 5]$	$\langle A \mid A^5 = 1\rangle$	(A,A,A,A^2)
16	$\mathbf{Z}_5$	5	$[0, 5, 4; 5, 5, 5, 5]$	$\langle A \mid A^5 = 1\rangle$	(A,A,A^4,A^4)
17	$\mathbf{Z}_5$	5	$[0, 5, 4; 5, 5, 5, 5]$	$\langle A \mid A^5 = 1\rangle$	(A,A^2,A^3,A^4)
18	$\mathbf{Z}_6$	6	$[0, 6, 4; 2, 6, 6, 6]$	$\langle A \mid A^6 = 1\rangle$	(A^3,A,A,A)
19	$\mathbf{Z}_6$	6	$[1, 6, 2; 2, 2]$	$\langle A \mid A^6 = 1\rangle$	(A,A,A^3,A^3)
20	$\mathbf{Z}_6$	6	$[0, 6, 5; 2, 2, 2, 3, 6]$	$\langle A \mid A^6 = 1\rangle$	(A^3,A^3,A^3,A^2,A)
21	$\mathbf{Z}_6$	6	$[0, 6, 5; 2, 2, 3, 3, 3]$	$\langle A \mid A^6 = 1\rangle$	(A^3,A^3,A^2,A^2,A^2)
22	$\mathbf{Z}_6$	6	$[0, 6, 4; 3, 3, 6, 6]$	$\langle A \mid A^6 = 1\rangle$	(A^2,A^2,A,A)
23	$\mathbf{Z}_6$	6	$[0, 6, 4; 3, 3, 6, 6]$	$\langle A \mid A^6 = 1\rangle$	(A^2,A^4,A,A^5)
24	D_6	6	$[0, 6, 6; 2, 2, 2, 2, 2, 2]$	$\langle A, B \mid A^3 = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{-1}\rangle$	(B,B,B,B,AB,AB)
25	D_6	6	$[1, 6, 2; 2, 2]$	$\langle A, B \mid A^3 = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{-1}\rangle$	$(1,A,B,B)$
26	D_6	6	$[0, 6, 5; 2, 2, 3, 3, 3]$	$\langle A, B \mid A^3 = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{-1}\rangle$	(B,B,A,A,A)
27	$\mathbf{Z}_8$	8	$[0, 8, 4; 2, 2, 8, 8]$	$\langle A \mid A^8 = 1\rangle$	(A^4,A^4,A,A^7)
28	D_8	8	$[0, 8, 5; 2, 2, 2, 2, 4]$	$\langle A, B \mid A^4 = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{-1}\rangle$	(B,B,B,AB,A)
29	D_8	8	$[0, 8, 5; 2, 2, 2, 2, 4]$	$\langle A, B \mid A^4 = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{-1}\rangle$	(A^2,A^2,B,AB,A)
30	Q_8	8	$[0, 8, 4; 2, 4, 4, 4]$	$\langle A, B \mid A^4 = 1, A^2 = B^2 = (AB)^2\rangle$	(A^2,A,B,AB)

$No.$	G	$\lvert G\rvert$	$[g_0, \lvert G\rvert, r; m_1, ..., m_r]$	G の表示	$(\varphi(\alpha_1), ..., \varphi(\beta_{g_0}), \varphi(\gamma_1), ..., \varphi(\gamma_r))$
31	$\mathbf{Z}_9$	9	$[0,9,3;9,9,9]$	$\langle A \mid A^9=1\rangle$	(A, A, A^7)
32	$\mathbf{Z}_3\times\mathbf{Z}_3$	9	$[0,9,4;3,3,3,3]$	$\langle A,B \mid A^3=B^3=1, AB=BA\rangle$	(A, A, B, AB^2)
33	$\mathbf{Z}_3\times\mathbf{Z}_3$	9	$[0,9,4;3,3,3,3]$	$\langle A,B \mid A^3=B^3=1, AB=BA\rangle$	(A, A^2, B, B^2)
34	$\mathbf{Z}_{10}$	10	$[0,10,4;2,2,5,5]$	$\langle A \mid A^{10}=1\rangle$	(A^5, A^5, A^2, A^8)
35	$\mathbf{Z}_{10}$	10	$[0,10,3;5,10,10]$	$\langle A \mid A^{10}=1\rangle$	(A^2, A^9, A^9)
36	$\mathbf{Z}_{10}$	10	$[0,10,3;5,10,10]$	$\langle A \mid A^{10}=1\rangle$	(A^2, A, A^7)
37	D_{10}	10	$[0,10,4;2,2,5,5]$	$\langle A,B \mid A^5=B^2=1, B^{-1}AB=A^{-1}\rangle$	(B, B, A, A^4)
38	D_{10}	10	$[0,10,4;2,2,5,5]$	$\langle A,B \mid A^5=B^2=1, B^{-1}AB=A^{-1}\rangle$	(B, AB, A^4, A^2)
39	$\mathbf{Z}_{12}$	12	$[0,12,3;3,12,12]$	$\langle A \mid A^{12}=1\rangle$	(A^4, A, A^7)
40	$\mathbf{Z}_{12}$	12	$[0,12,3;4,6,12]$	$\langle A \mid A^{12}=1\rangle$	(A^3, A^2, A^7)
41	$\mathbf{Z}_6\times\mathbf{Z}_2$	12	$[0,12,4;2,2,3,6]$	$\langle A,B \mid A^6=B^2=1, AB=BA\rangle$	(A^3, B, A^2, AB)
42	$\mathbf{Z}_6\times\mathbf{Z}_2$	12	$[0,12,3;6,6,6]$	$\langle A,B \mid A^6=B^2=1, AB=BA\rangle$	(A, AB, A^4B)
43	D_{12}	12	$[0,12,5;2,2,2,2,2]$	$\langle A,B \mid A^6=B^2=1, B^{-1}AB=A^{-1}\rangle$	(A^3, B, B, A^2B, A^5B)
44	D_{12}	12	$[0,12,4;2,2,3,6]$	$\langle A,B \mid A^6=B^2=1, B^{-1}AB=A^{-1}\rangle$	(B, AB, A^2, A^5)
45	A_4	12	$[1,12,1;2]$	$\left\langle A,B,C \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^2=B^2=C^3=1, AB=BA, \\ C^{-1}AC=B, C^{-1}BC=AB \end{array}\right\rangle$	(A, C, B)
46	A_4	12	$[0,12,4;2,3,3,3]$	$\left\langle A,B,C \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^2=B^2=C^3=1, AB=BA, \\ C^{-1}AC=B, C^{-1}BC=AB \end{array}\right\rangle$	(A, C, C, ABC)
47	$\mathbf{Z}_{15}$	15	$[0,15,3;3,5,15]$	$\langle A \mid A^{15}=1\rangle$	(A^5, A^3, A^7)
48	$\mathbf{Z}_{16}$	16	$[0,16,3;2,16,16]$	$\langle A \mid A^{16}=1\rangle$	(A^8, A, A^7)
49	D_{16}	16	$[0,16,4;2,2,2,8]$	$\langle A,B \mid A^8=B^2=1, B^{-1}AB=A^{-1}\rangle$	(A^4, B, A^3B, A^7)
50	$\langle 2,2,4\rangle$	16	$[0,16,3;4,4,8]$	$\left\langle A,B \,\middle\vert\, A^8=1, A^4=B^2=(AB)^2\right\rangle$	(B, A^3B, A^7)
51	$\mathbf{Z}_{18}$	18	$[0,18,3;2,9,18]$	$\langle A \mid A^{18}=1\rangle$	(A^9, A^2, A^7)
52	$D_6\times\mathbf{Z}_3$	18	$[0,18,4;2,2,3,3]$	$\langle A,B \mid A^2=B^3=1, A^{-1}BA=B^2\rangle$ $\times\langle C \mid C^3=1\rangle$	(A, AB, B^2C, C^2)
53	$D_6\times\mathbf{Z}_3$	18	$[0,18,4;2,2,3,3]$	$\langle A,B \mid A^2=B^3=1, A^{-1}BA=B^2\rangle$ $\times\langle C \mid C^3=1\rangle$	(A, A, BC, B^2C^2)
54	$D_6\times\mathbf{Z}_3$	18	$[0,18,3;3,6,6]$	$\langle A,B \mid A^2=B^3=1, A^{-1}BA=B^2\rangle$ $\times\langle C \mid C^3=1\rangle$	(B, AC, AB^2C^2)

$No.$	G	$\lvert G\rvert$	$[g_0, \lvert G\rvert, r; m_1, ..., m_r]$	G の表示	$(\varphi(\alpha_1), ..., \varphi(\beta_{g_0}), \varphi(\gamma_1), ..., \varphi(\gamma_r))$
55	$D_6 \times \mathbf{Z}_3$	18	$[0, 18, 3; 3, 6, 6]$	$\langle A, B \mid A^2 = B^3 = 1, A^{-1}BA = B^2 \rangle \times \langle C \mid C^3 = 1 \rangle$	(BC, AC, AB^2C)
56	$((3, 3, 3; 2))$	18	$[0, 18, 4; 2, 2, 3, 3]$	$\left\langle A, B, C \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^2 = B^3 = C^3 = 1, \\ A^{-1}BA = B^2, \\ A^{-1}CA = C^2, \\ BC = CB \end{array} \right\rangle$	(A, AB, BC, BC^2)
57	$\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_3$	18	$[0, 18, 3; 3, 6, 6]$	$\langle A, B \mid A^6 = B^3 = 1, AB = BA \rangle$	(A^2, AB, A^3B^2)
58	D_{20}	20	$[0, 20, 4; 2, 2, 2, 5]$	$\langle A, B \mid A^{10} = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{-1} \rangle$	(A^5, B, A^3B, A^8)
59	$\langle 2, 2, 5 \rangle$	20	$[0, 20, 3; 4, 4, 5]$	$\langle A, B \mid A^{10} = 1, A^5 = B^2, B^{-1}AB = A^{-1} \rangle$	(B, A^3B, A^8)
60	$G(5, 4, 2, 1)$	20	$[0, 20, 3; 4, 4, 5]$	$\langle A, B \mid A^5 = B^4 = 1, B^{-1}AB = A^2 \rangle$	(B, AB^3, A^2)
61	$\mathbf{Z}_{10} \times \mathbf{Z}_2$	20	$[0, 20, 3; 2, 10, 10]$	$\langle A, B \mid A^{10} = B^2 = 1, AB = BA \rangle$	(A^5, AB, A^4B)
62	S_4	24	$[0, 24, 4; 2, 2, 2, 4]$	$\left\langle A, B, C \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^4 = B^2 = C^3 = 1, B^{-1}AB = A^{-1}, \\ A^{-1}CA = C^2A^2, C^{-1}BC = A^2B, \\ C^{-1}A^2C = B \end{array} \right\rangle$	(AB, A^3B, A^3C, ABC)
63	$D_8 \times \mathbf{Z}_3$	24	$[0, 24, 3; 2, 6, 12]$	$\langle A, B \mid A^{12} = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^7 \rangle$	(B, AB, A^5)
64	$\langle 2, 3, 3 \rangle$	24	$[0, 24, 3; 3, 4, 6]$	$\left\langle A, B, C \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^4 = 1, A^2 = B^2, B^{-1}AB = A^{-1}, \\ C^3 = 1, C^{-1}AC = B, C^{-1}BC = AB \end{array} \right\rangle$	(C, A^3, AC^2)
65	$\mathcal{S}_{32}$	32	$[0, 32, 3; 2, 4, 16]$	$\langle A, B \mid A^{16} = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^7 \rangle$	(B, A^9B, A)
66	$D_6 \times \mathbf{Z}_6$	36	$[0, 36, 3; 2, 6, 6]$	$\langle A, B \mid A^3 = B^2 = 1, B^{-1}AB = A^{-1} \rangle \times \langle C \mid C^6 = 1 \rangle$	(B, AC, A^2BC^5)
67	$A_4 \times \mathbf{Z}_3$	36	$[0, 36, 3; 3, 3, 6]$	$\left\langle A, B, D \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^2 = B^2 = D^3 = 1, AB = BA, \\ D^{-1}AD = B, D^{-1}BD = AB \end{array} \right\rangle \times \langle C \mid C^3 = 1 \rangle$	(D, AC^2D^2, ABC)
68	$(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2) \ltimes (\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3)$	36	$[0, 36, 4; 2, 2, 2, 3]$	$\left\langle A, B, C, D \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^2 = B^2 = C^3 = D^3 = 1, \\ AB = BA, A^{-1}CA = C^2, \\ A^{-1}DA = D^2, B^{-1}CB = C^2, \\ BD = DB, CD = DC \end{array} \right\rangle$	(A, BC, ABD, C^2D^2)

$No.$	G	$\lvert G\rvert$	$[g_0, \lvert G\rvert, r; m_1, ..., m_r]$	Gの表示	$(\varphi(\alpha_1), ..., \varphi(\beta_{g_0}), \varphi(\gamma_1), ..., \varphi(\gamma_r))$
69	$(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2) \ltimes (\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3)$	36	$[0, 36, 3; 2, 6, 6]$	$\left\langle A, B, C, D \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^2 = B^2 = C^3 = D^3 = 1, \\ AB = BA, A^{-1}CA = C^2, \\ A^{-1}DA = D^2, B^{-1}CB = C^2, \\ BD = DB, CD = DC \end{array} \right\rangle$	(A, BCD, ABC^2D)
70	$\mathbf{Z}_4 \ltimes (\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3)$	36	$[0, 36, 3; 3, 4, 4]$	$\left\langle A, B, C \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^4 = B^3 = C^3 = 1, A^{-1}BA = C, \\ A^{-1}CA = B^2, BC = CB \end{array} \right\rangle$	(B, A, A^3B^2)
71	$D_8 \ltimes \mathbf{Z}_5$	40	$[0, 40, 3; 2, 4, 10]$	$\left\langle A, B, C \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^4 = B^2 = C^5 = 1, B^{-1}AB = A^{-1}, \\ A^{-1}CA = C^{-1}, BC = CB \end{array} \right\rangle$	(AB, A^3C, A^2BC^4)
72	A_5	60	$[0, 60, 3; 2, 5, 5]$	$\langle A, B \,\vert\, A = (13254), B = (13524) \rangle$	(AB, A, B)
73	$S_4 \times \mathbf{Z}_3$	72	$[0, 72, 3; 2, 3, 12]$	$\left\langle A, B, C \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^4 = B^2 = C^3 = 1, B^{-1}AB = A^{-1}, \\ A^{-1}CA = C^2B, C^{-1}BC = A^2 \end{array} \right\rangle \times \langle D \,\vert\, D^3 = 1 \rangle$	(AB, CD, A^3CD^2)
74	$D_8 \ltimes (\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3)$	72	$[0, 72, 3; 2, 4, 6]$	$\left\langle A, B, C, D \,\middle\vert\, \begin{array}{l} A^4 = B^2 = C^3 = D^3 = 1, \\ B^{-1}AB = A^{-1}, A^{-1}CA = D^2, \\ A^{-1}DA = C, B^{-1}CB = D, \\ CD = DC \end{array} \right\rangle$	(B, AC, A^3BC^2)
75	S_5	120	$[0, 120, 3; 2, 4, 5]$	$\langle A, B \,\vert\, A = (12), B = (12543) \rangle$	(A, AB^4, B)