数理解析研究所講究録
1067 巻 1998 年 57-64

多変数Bloch関数について
– Kähler 多様体上の Bloch 関数 –

新井仁之 (東北大・理)
H. Arai (Tohoku University)

概 要

本稿では，まず多変数 Bloch 関数を調和解析の視点から眺める．次に，Kähler 多様体上の Bloch 関数を確率論的な方法で特徴づけ，無限遠境界での挙動を研究する．

1 Bloch関数の調和解析

Bloch 関数の興味深い点の一つは，その多種多様な特徴づけにある．さまざまな言葉で特徴づけられているため，関数論はもとより，調和解析，作用素論などの視点からも研究が進められている．ここでは，Bloch 関数の調和解析的な特性について，いくつかの結果を紹介したい．

調和解析の目で見ると，Bloch 関数空間は，BMO と類似している．はじめに，類似点から述べよう．以下では，$\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ とし，$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ とする．また，dV により，$\mathbf{C}$ 上の Lebesgue 測度を表し，$d\sigma$ により $\mathbf{T}$ 上の正規化された弧長測度を表す．

定義 1 f を $\mathbf{D}$ 上の正則関数とする．

$$\|f\|_B := \sup_{z\in\mathbf{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| \tag{1}$$

が有限のとき，f を $\mathbf{D}$ 上の *Bloch* 関数という．*Bloch* 関数全体のなす集合を $\mathcal{B}(D)$ で表す．

次の結果は，Fefferman-Stein の Hardy 空間論から得られるものとしてよく知られている：

定理 1 (Fefferman-Stein) (i) S を $\mathbf{T}$ 上の *Szegö* 射影とすると

$$S(L^p(\mathbf{T})) = H^p(\mathbf{T}), \quad 1 < p < \infty \tag{2}$$

$$S(L^\infty(\mathbf{T})) = \mathrm{BMOA}(\mathbf{T})\ (=: \mathrm{BMO}(\mathbf{T}) \cap H^2(\mathbf{T})) \tag{3}$$

である．

(ii) $H^1(\mathbf{T})^* = \mathrm{BMOA}(\mathbf{T})$

(iii) $f \in H^2(\mathbf{T})$ とする．このとき，$f \in BMOA(\mathbf{T})$ であるための必要十分条件は，

$$d\nu_f = \log(1/|z|)|f'(z)|dV(z)$$

は，*Carleson* 測度なることである．

これらの結果は単位円板上の古典調和解析では基本的な役割を果たしている．また，現在では，これらの結果は，Krantz, Li などにより，単位円板から C^∞ 境界をもつ強擬凸領域，$\mathbf{C}^2$ の有限形擬凸領域に一般化されている (cf Krantz and Li [7])．

面白いことに Bloch 空間は，次の意味で BMO 空間と類似した性質をもっている: $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$A^p(\mathbf{D}) = \{f : f \text{ は } D \text{ 上正則で，} \|f\|_p < \infty\}$$

とする．ただし，ここで $\|f\|_p$ は f の $L^p(D, dV)$ ノルムである．

定理 2 (well known) (i) B を *Bergman* 射影とすると

$$B(L^p(D, dV)) = A^p(D), \quad 1 < p < \infty \tag{4}$$

$$B(L^\infty(D, dV)) = \mathcal{B}(D) \tag{5}$$

(ii) $(A^1(D))^* = \mathcal{B}(D)$

(iii) f を D 上の正則関数とする．$f \in \mathcal{B}(D)$ であるための必要十分条件は，

$$d\mu_f = (1 - |z|)^2 |f'(z)| dV(z)$$

が *Bergman-Carleson* 測度になっていることである．すなわち，恒等写像 I が $L^2(D, dV)$ から $L^2(D, d\mu_f)$ への有界作用素になっている．

この結果のうち，(i), (ii) は古典的によく知られたものであるが，(4) は McNeal により強擬凸領域及び $\mathbf{C}^2$ の有限形擬凸領域に一般化されている (cf. [10])．また，(5), (ii) は，Krantz-Ma [8] により強擬凸領域に一般化されている．多変数の Bloch 関数は，最初対称領域の場合に Timoney [12] が定義し，多くの特徴づけを与えた．それは，Krantz-Ma [8] により強擬凸領域に一般化された．Krantz-Ma の定義は次のものである．Ω を $\mathbf{C}^n$ 内の C^∞ 級の有界強擬凸領域とし，$F_K(z, \xi)$ を Ω 上の infinitesimal Kobayashi metric とする．すなわち，

$$F_K(z, \xi) = \inf\{\alpha > 0 : \exists \varphi \in H(\mathbf{D}, \Omega) : \varphi(0) = z, \varphi'(0)(e_1) = \xi/\alpha\}$$

とする．Ω 上の正則関数 f が

$$\|f\|_B := \sup_{z\in\Omega,\xi\in\mathbf{C}^n} |f_*(z)\xi|/F_K(z,\xi) < \infty$$

なる関数である．

(iii) は Xiao が 1994 年に証明し，新井 [3], [1] が強擬凸領域に一般化した．[1] では消滅的 Carleson 測度と little Bloch 関数の関連性，Bloch 関数と Toeplitz 作用素との関連も証明している．

2　1 変数 Bloch 関数と境界挙動について

1 変数の場合，Bloch 関数の境界挙動は，調和測度の regularity の問題と密接に関連から詳しく研究された．多変数の場合，Bloch 関数の境界挙動が調和測度の regularity の問題と関係しているかどうかわからないが，本節では，境界挙動について調べることにする．まず，1 変数の場合の結果を紹介しておく．Bloch 関数は間隙級数と密接な関係がある：

$q > 1$ を実数とし，n_k を $n_{k+1}/n_k \geq q$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を満たす自然数とする．このとき，次の Hadamard gap を考える．

$$g(z) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{n_k}. \tag{6}$$

次のことが成り立っている．

定理 3 (Pommerenke)

$$g \in \mathcal{B}(D) \Longleftrightarrow \sup_k |b_k| < \infty$$

一方，フーリエ級数の有名な Salem-Zygmund の定理は，$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$ とすると，$\mathbf{T}$ 上でこの間隙フーリエ級数は

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|s(e^{i\theta})|}{\sqrt{n \log\log n}} = 1 \quad a.e. \tag{7}$$

となっている．したがって，ここで $r = 1 - e^{-n}$ とおけば，

$$\limsup_{r\to 1} \frac{|s(re^{i\theta})|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r} \log\log\log\frac{1}{1-r}}} = 1 \quad a.e. \tag{8}$$

定理 3 より s は Bloch 関数であるから ($\|s\|_B \leq 4$)，Bloch 関数の境界値は a.e. で発散することがあることを示している．一方，Makarov [9] は，Bloch 関数の境界値の発散は最悪でもこの重複対数の法則に従っていることを証明した：

定理 4 (Makarov) $f \in \mathcal{B}(D)$ であるならば,

$$\limsup_{r \to 1} \frac{|f(re^{i\theta})|}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log\log\log \frac{1}{1-r}}} \le C\|f\|_B \quad a.e. \tag{9}$$

ただし, C は f に依存しない正定数である.

多変数 Bloch 関数については, つぎのようなことがわかっている.

定理 5 (Ullrich) $\mathbf{C}^n$ の単位球 $\mathbf{B}_n$ 上の *Bloch* 関数で, *a.e.* で境界値が発散するようなものが存在する.

本稿の目的の一つは, 多変数 Bloch 関数の境界値の発散のオーダーを Kähler 拡散過程の観点から論ずることである.

3 Kähler 拡散

ここでは, Bloch 関数の Kähler 拡散による特徴づけを述べる. まず, 一般の Riemann 多様体上の拡散過程について述べる. Kähler 拡散は, Kähler 多様体の Laplace-Beltrami 作用素に対する拡散のことである.

$(\mathcal{R}, g)$ を非コンパクト完備 Riemann 多様体とし, L を $\mathcal{R}$ 上の C^∞ 係数 2 階楕円型偏微分作用素

$$Lu = \mathrm{div}(A\nabla u) + \langle B, \nabla u \rangle, \quad u \in C^2(\mathcal{R}) \tag{10}$$

とする. $\mathcal{R}$ の一点コンパクト化を $\mathcal{R}^\partial = \mathcal{R} \cap \{\partial\}$ とする.

w が連続なサンプル・パスであるとは, $w : [0, \infty] \mapsto \mathcal{R}^\partial$ なる写像で,

$$\exists\ \zeta(w) \in [0, \infty]\ :\ w(t) = \partial \Leftrightarrow \zeta(w) \le t \tag{11}$$

$$w \text{ は } [0, \zeta(w)) \text{ で連続} \tag{12}$$

をみたすもの d である. 連続なサンプル・パス全体のなす集合を $W(\mathcal{R})$ とおく. 混乱のないときは単に W と略記する.

$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ (resp. $\mathcal{B}(\mathcal{R}^\partial)$) により $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}^\partial$) 上の Borel σ-集合体とし, $\mathcal{F}_t^0$ により $\{w \in W : w(s) \in E\}$ ($E \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$, $s \in [0, t]$) で生成される W 上の σ-集合体とする. $\mathcal{F}^0$ は $\bigcup_{t \ge 0} \mathcal{F}_t^0$ で生成される σ-集合体とする.

定義 (Markov 過程). $x \in \mathcal{R}^\partial$ に対して $(W(\mathcal{R}), \mathcal{F}^0)$ 上の確率測度 P_x が存在し,

$$\forall B \in \mathcal{F}^0 \text{ に対して } x \mapsto P_x(B) \text{ は } \mathcal{R} \text{ 上 Borel 可測} \tag{13}$$

$$P_a(\{w : w(0) = a\}) = 1 \quad a \in \mathcal{R}^\partial \tag{14}$$

$$\text{任意の } t > s \ge 0 \text{ と } A \in \mathcal{F}_s^0,\ \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^\partial) \text{ に対して} \tag{15}$$

$$P_x(A \cap \{w : w(t) \in \Gamma\}) = \int_A P_{w(s)}(w(t-s) \in \Gamma) P_x(dw) \tag{16}$$

をみたすとき，$X=(P^a;a\in\mathcal{R}^\partial)$ をマルコフ系という．上の条件のうち (16) をマルコフ性という．

いま，マルコフ系 $X=(P^a;a\in\mathcal{R}^\partial)$ が与えられているとする．このとき，$\mathcal{F}_t^0$ の P^a に関する完備化を $\overline{\mathcal{F}}_t^a$ と表し，$\mathcal{F}_t=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{a\in\mathcal{R}^\partial}\overline{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}^a$ とする．$\mathcal{F}_\infty$ により $\bigcup_{t\in[0,\infty)}\mathcal{F}_t$ で生成される σ-集合体を表す．

特にマルコフ系が条件

$$\begin{aligned}&\text{任意の } t\geq 0 \text{ と } (\mathcal{F}_t)\text{-停止時間 } \sigma,\ A\in\mathcal{F}_\sigma,\ \Gamma\in\mathcal{B}(\mathcal{R}^\partial) \text{ に対して}\\ &P_x(A\cap\{w:w(t+\sigma(w))\in\Gamma\})=\int_A P_{w(\sigma(w))}(\{w:w(t)\in\Gamma)P_x(dw)\end{aligned}\tag{17}$$

を満たすとき，強マルコフ系という．

さて，L に関する拡散とは次のように定義される:

定義 (拡散). $(W,\mathcal{F}^0)$ 上の確率測度の族 $\{P_x:x\in\mathcal{R}^\partial\}$ が L-拡散であるとは，強マルコフ系であって，すべての $f\in C_c^\infty(\mathcal{R})$ と $x\in\mathcal{R}$ に対して

$$H_s^f(w):=f(w(t))-f(w(0))-\int_0^t(Lf)(w(s))ds\tag{18}$$

が $(P_x,\mathcal{F}_t^0)$-マルチンゲールになることである．

$X_t(w)=w(t)$ と定義し，(X_t,P^a) を出発点 a の L-拡散過程ということもある．

本節で考えている偏微分作用素 L に対して，L-拡散が存在することが知られている ([6], [5] 参照).

L-拡散 $\{P_a\}$ に対して $P(t,a,A)=P_a[\{X_t\in A\}]$ $(t>0,a\in\mathcal{R},A\in\mathcal{B}(\mathcal{R}))$ を推移確率という．また，$\mathcal{R}$ 上の有界可測関数全体を $B(\mathcal{R})$ とし，$f\in B(\mathcal{R})$ に対して

$$T_tf(x)=E_x[f(X_t)]=\int_{\mathcal{R}}P(t,x,dx)f(x)$$

とおく．$\{T_t\}$ は $B(\mathcal{R})$ 上の作用素半群になっている．これを L-拡散半群という．特に，各 $t>0$ に対して，T_t が $C_0(\mathcal{R})$ から $C_0(\mathcal{R})$ への有界作用素になっているとき，$\{T_t\}$ は FD 半群であるという．また，一般に $T_t1\leq 1$ であるが，$T_t1=1$ $(t>0)$ が成り立つとき，$\{T_t\}$ は保存的であるという．$\{T_t\}$ が保存的であることと，$\zeta=\infty$ a.s. P_z $(\forall z\in\mathcal{R})$ なることと同値である．

どのような L に対して $\{T_t\}$ が FD-半群あるいは保存的になっているかは，重要な問題であり，すでにさまざまな十分条件が知られている ([13], [4], [5], etc 参照).

たとえば，$(\mathcal{R},g)$ が Bergman 計量付きの強擬凸領域であれば L-拡散から作られる半群は，保存的な FD 半群になっている．

4 Kähler 多様体上の Bloch 関数

本節では，$(\mathcal{R}, g)$ を完備 Kähler 多様体とする．この上の Bloch 関数を次のように定義する．

定義 2 ([2]) $\mathcal{R}$ 上の正則関数 f が *Bloch* 関数であるとは，

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := \sup_{z\in\mathcal{R}} \sum_{j,k} g^{j\bar{k}}(z) \frac{\partial f}{\partial z^j} \overline{\frac{\partial f}{\partial z^k}} (= \|\nabla f\|^2) < \infty$$

なるものとする．

ここで次の問題が考えられる：

Bloch 関数の第 I 問題 (存在問題) 定数でない Bloch 関数は，どのような Kähler 多様体上に存在するか? あるいは存在しないか?

負曲率の場合存在するか?

たとえば，一つの注意として，**下に有界なリッチ曲率をもつ完備 Kähler 多様体では，有界な正則関数は Bloch 関数になっている**ことが Yau の不等式 (cf. [11]) を使うと得られる ([2])．また $\mathbf{C}$ にユークリッド計量を入れると，断面曲率はいたるところ 0 であるが非自明な Bloch 関数が存在することも証明できる．

次に 完備 Kähler 多様体上の Bloch 関数を Kähler 拡散を使って解析する．まず，Kähler 拡散による特徴づけをしておきたい．

定理 6 ([2]) $\mathcal{S}$ を $(\mathcal{F}_t)$-停止時間全体のなす集合とする．f を $\mathcal{R}$ 上の正則関数とするとき，

$$\|f\|_{BP}^2 := \sup_{z\in\mathcal{R}} \sup_{T\in\mathcal{S}} \frac{E_z[|f(Z_T) - f(Z_0)|^2]}{E_z[T]} < \infty$$

なることである．しかも，$\|f\|_{BP}$ と $\|f\|_{\mathcal{B}}$ は同値なセミノルムになっている．

この特徴づけを使うと，Bloch 関数の漸近挙動が評価できる．

定理 7 ([2]) $\mathcal{R}$ を単連結な完備 *Kähler* 多様体でその断面曲率 K が二つの負の定数で $-\infty < -a^2 \le K \le -b^2 < 0$ と押さえられているとする．

(1) $o \in \mathcal{M}$ を固定し，$d(t) = \mathrm{dist}(o, Z_t)$ とする．このとき，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|f(Z_t)|}{d(t) \log\log d(t)} \le Const. \|f\|_{\mathcal{B}}$$

(2) 特に $\mathcal{R}$ が $\mathbf{C}^n$ の有界強擬凸領域で g がその *Bergman* 計量の場合，$\delta(z) = \inf\{|z - w| : w \in \partial\mathcal{R}\}$ とすると

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|f(Z_t)|}{\log \delta(Z_t)^{-1} \log\log\log \delta(Z_t)^{-1}} \le Const. \|f\|_{\mathcal{B}}$$

Bloch 関数の第 II 問題 (発散問題) $\mathcal{R}$ を単連結な完備 Kähler 多様体でその断面曲率が負であるとする．$S(\infty)$ を $\mathcal{R}$ の無限遠境界とし，ω をその上の調和測度とする．このとき，Bloch 関数でその境界値が a.e. で発散するようなものが存在するか?

Bloch 関数の第 III 問題 (LIL 問題) $\mathcal{R}$，$S(\infty)$ は発散問題と同じものとする．$o \in \mathcal{R}$, $\zeta \in S(\infty)$ に対して，γ_ζ を o と ζ を結ぶ unit speed の測地線とする．このとき，a.e. ω で

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|f(\gamma_\zeta(t))|}{t \log\log t} \leq Const.\|f\|_{\mathcal{B}}$$

が成り立つか．

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|f(\gamma_\zeta(t))|}{t \log\log t} > 0$$

が a.e.ω で成り立つような Bloch 関数が存在するか．

参考文献

[1] H. Arai. Bergman-Carleson measures and Bloch functions on strongly pseudoconvex domains. *to appear in "Reproducing Kernels and its Applications (S. Saitoh, T. Ohsawa et.al.eds), Kuwer Acad. Publ."*.

[2] H. Arai. Some remarks on Bloch functions on Kähler manifolds. *in preparation.*

[3] H. Arai. Some characterizations of bloch functions on strongly pseudoconvex domains. *Tokyo J. Math.*, Vol. 17, pp. 373–383, 1994.

[4] R. Azencott. Behavior of diffusion semi-groups at infinity. *Bull. Soc. math. France*, Vol. 102, pp. 193–240, 1974.

[5] K. D. Elworthy. *Stocahstic Differential Equations on Manifolds*, Vol. 70 of *London Math. Soc. Lect. Notes Series.* Combridge Univ. Press, 1982.

[6] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusions Processes, 2nd edition.* North-Holland/Kodansha, 1989.

[7] S. G. Krantz and S.-Y. Li. A note on hardy spaces and functions of bounded mean oscillation on domains in $\mathbf{c}^n$. *Michigan Math. J.*, Vol. 41, pp. 52–71, 1994.

[8] S. G. Krantz and D. Ma. Bloch funtions on strongly pseudoconvex domains. *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 37, pp. 145–168, 1988.

[9] N. G. Makarov. On the distortion of boundary sets under conformal mappings. *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 51, pp. 369–384, 1985.

[10] J. McNeal. The bergman projection as a singular integral operator. *J. Geom. Analysis*, Vol. 4, pp. 91–103, 1994.

[11] R. Schoen and S. T. Yau. *Lectures on Differential Geometry.* International Press, 1994.

[12] R. Timoney. Bloch funtions in several complex variables i. *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 12, pp. 241–267, 1980.

[13] S.-T. Yau. On the heat kernel of a complete Riemannian manifold. *J. Math. pures et appl.*, Vol. 57, pp. 191–201, 1978.