数理解析研究所講究録
1068 巻 1998 年 171-181

自己双対システムを使った内点法

文部省統計数理研究所　水野 眞治* (Shinji Mizuno)

1998 年 10 月

Abstract

線形計画問題を実際に内点法で解く場合に重要な問題の一つに、初期点をいかに求めるかといったことがある。これにはいくつかのアプローチがあるが、ここでは、自己双対システムを使う方法を二つ紹介する。一方は Ye, Todd, and Mizuno [11] により提案された方法であり、他方は最近 Nesterov, Todd, and Ye [8] により提案された方法である。これらの方法は、センターパスを逆方向に追跡するといったように、一見全く異なるように見える。Mizuno and Todd [5] は、これら二つの方法の関連を詳細に調べた。その結果の一部についても紹介する。

1　はじめに

線形計画問題を解く内点法は、Karmarkar [1] により提案されて以来、活発に研究されてきた。線形計画問題を実際に内点法で解く場合に重要な問題の一つに、初期点をいかに求めるかといったことがある。これにはいくつかのアプローチがあり、大きな係数を使った人工問題を作る方法、初期点をまず求めて (Phae I) から問題を解く (Phase II) 方法、勝手な正の初期点を使うインフィージブル内点法などがある。ここでは、それらとは異なり、自己双対システムを使う方法を紹介する。この方法は、Ye, Todd, and Mizuno [11] により提案され、その後、Xu, Hung, and Ye [9], Xu and Ye [10] らによりさらに研究された。この方法の特徴には、勝手な初期内点を使うことができる、反復回数が多項式オーダで理論的におさえられている、問題の実行不能性を判定できる、実行可能な

*〒 106-8569　港区南麻布 4-6-7, mizuno@ism.ac.jp

場合には解を計算できる、big M と呼ばれる大きな係数を必要としないといったことがある。

本論では、二つの異なった自己双対システムを使った内点法を紹介する。一方は Ye, Todd, and Mizuno [11] により提案された方法であり、自己双対線形計画問題を使う。他方は最近 Nesterov, Todd, and Ye [8] により提案された方法である。これらの方法は、センターパスを逆方向に追跡するといったように、一見全く異なるように見える。Mizuno and Todd [5] は、これら二つの方法の関連を詳細に調べた。その結果の一部についても紹介する。

2 線形計画問題と双対問題

次の標準形の線形計画問題を考える。

$$\begin{array}{lll}(P) & \text{minimize} & c^T x \\ & \text{subject to} & Ax = b, \quad x \geq 0.\end{array}$$

ここで、A, b, c は与えられたデータであり、適当な自然数 m と $n (m \leq n)$ に対して、A は $m \times n$ 行列、b は m 次元ベクトル、c は n 次元ベクトルである。また、x は n 次元の変数ベクトルである。行列 A のランクが m であると仮定する。一般に線形計画問題は、上記のように線形の等式と不等式であらわされた制約条件を満たす解 x（実行可能解と呼ばれる）のなかで、線形の目的関数値を最小化（あるいは最大化）する解（最適解と呼ばれる）を求める問題である。最適解での目的関数値を最適値という。

上で定義した標準形の問題を主問題とするとき、その双対問題は、次のようにあらわされる。

$$\begin{array}{lll}(D) & \text{maximize} & b^T y \\ & \text{subject to} & A^T y + s = c, \quad s \geq 0.\end{array}$$

ここで、yは m 次元の変数ベクトル、s は n 次元のスラック変数ベクトルである。

線形計画問題の主問題と双対問題に関する基本的性質をいくかまとめて示す。

- 双対問題の双対問題は、主問題と一致する。したがって、以下の性質は主問題と双対問題を入れ替えても成立する。
- 主問題に最適解が存在すれば、双対問題にも最適解が存在し、その最適値は等しい。
- 主問題が実行可能であるがその最適解が存在しないならば、双対問題は実行不能である。

- 主問題が実行不能であるならば、双対問題は実行可能で最適解を持たないか、あるいは実行不能である。
- 主問題と双対問題が実行可能であれば、ともに最適解を持ち、任意の最適解において相補性条件が成立する。ここで、相補性条件とは、主問題の非負変数 x と双対問題の非負変数 s の間に条件

$$x_i = 0 \quad \text{or} \quad s_i = 0 \quad \text{for each} \quad i,$$

あるいは別な表現をすると

$$Xs = 0$$

が成立することである。ただし、$X = \mathrm{diag}(x)$ は、ベクトル x の要素を対角要素とする対角行列をあらわす。

- 主問題と双対問題が実行可能であれば、強相補性条件をみたす最適解（強相補解と呼ぶ）が存在する。強相補性条件とは、すべての要素 i に対して

$$x_i > 0 \quad \text{and} \quad s_i = 0$$

または

$$x_i = 0 \quad \text{and} \quad s_i > 0$$

が成立することである。この条件は

$$Xs = 0, \quad x + s > 0$$

とあらわすこともできる。

- 主問題と双対問題の実行可能解が相補性条件をみたせば、それぞれの最適解である。

主問題と双対問題の間のこれらの性質を利用することにより、内点法には、主問題を解く主内点法以外にも、双対問題を解く双対内点法、主問題と双対問題を同時に解く主双対内点法などがある。本論では、それらとは異なる自己双対システムを使う内点法を紹介する。その方法も、上記の主問題と双対問題の間の性質をうまく利用する。

3 自己双対線形計画問題

前節で定義した線形計画問題 (P) とその双対問題 (D) に対して、Ye, Todd, and Mizuno [11] は、次の線形計画問題を導入した。

$$
\begin{array}{lrrrrrrcl}
(SD_1) & \text{minimize} & & & h^0\theta & & & & \\
 & \text{subject to} & & Ax & -b\tau & +b^0\theta & & = & 0, \\
 & -A^Ty & & & +c\tau & -c^0\theta & -s & = & 0, \\
 & b^Ty & -c^Tx & & & -g^0\theta & \quad -\kappa & = & 0, \\
 & -(b^0)^Ty & +(c^0)^Tx & +g^0\tau & & & & = & -h^0, \\
 & & x \geq 0 & \tau \geq 0 & & s \geq 0 & \kappa \geq 0. & &
\end{array}
$$

ここで、適当な初期点 $(y^0, x^0, \tau^0, \theta^0, s^0, \kappa^0)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
b^0 &:= b\tau^0 - Ax^0, \\
c^0 &:= c\tau^0 - A^Ty^0 - s^0, \\
g^0 &:= b^Ty^0 - c^Tx^0 - \kappa^0, \\
h^0 &:= (x^0)^Ts^0 + \tau^0\kappa^0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

である。初期点は、条件 $(x^0, \tau^0, s^0, \kappa^0) > 0$ と $\theta^0 = 1$ をみたすとする。(y^0の値については特に何も仮定しない。また、文献 [11] では、さらに$\tau^0 = 1$ と$\kappa^0 = 1$ も仮定している。) これらの条件から、初期点 $(y^0, x^0, \tau^0, \theta^0, s^0, \kappa^0)$ において、問題 (SD_1) のはじめの 3 つの等式と不等式は明らかに成立し、4 番目の等式も

$$
\begin{aligned}
&-(b^0)^Ty^0 + (c^0)^Tx^0 + g^0\tau^0 \\
&= -(b\tau^0 - Ax^0)^Ty^0 + (c\tau^0 - A^Ty^0 - s^0)^Tx^0 + (b^Ty^0 - c^Tx^0 - \kappa^0)\tau^0 \\
&= -(x^0)^Ts^0 - \tau^0\kappa^0 \\
&= -h^0
\end{aligned}
$$

により成立する。したがって、この初期点は線形計画問題 (SD_1) の実行可能解である。問題 (SD_1) の特徴は、制約条件の係数行列が歪対称 (skew-symmetric) となっていることである。このことから、この問題の双対問題は、適当に変換を施せば主問題と一致する。すなわち、(SD_1) は自己双対線形計画問題である。

補題 1 自己双対問題 (SD_1) は最適解を持ち、その最適値は 0 である。任意の最適解 $(y^*, x^*, \tau^*, 0, s^*, \kappa^*)$ は、相補性条件

$$X^*s^* = 0,$$

$$\tau^* \kappa^* = 0$$

をみたす。ここで、$X^* = \mathrm{diag}(x^*)$ は対角行列をあらわす。また、強相補性条件

$$X^* s^* = 0, \quad x^* + s^* > 0,$$
$$\tau^* \kappa^* = 0, \quad \tau^* + \kappa^* > 0$$

をみたす最適解が存在する。

証明： 自己双対問題 (SD_1) の双対問題は、(SD_1) と一致する。（ただし、最大化問題でその目的関数は $-h^0\theta$ である。）したがって、問題 (SD_1) とその双対問題が実行可能であるから、それぞれの問題の最適解が存在する。また、最適値は、主問題と双対問題で等しく、その符号が異なることから、ともに 0 である。線形計画問題の主問題と双対問題の最適解が相補性条件をみたし、強相補解が存在することから、自己双対問題の最適解にも同様なことがいえるので、補題に述べたことが成立する。 □

補題 2 自己双対問題 (SD_1) の強相補解を $(y^*, x^*, \tau^*, 0, s^*, \kappa^*)$ とする。このとき、$\tau^* > 0$ または $\kappa^* > 0$ である。もし、$\tau^* > 0$ ならば x^*/τ^* と $(y^*, s^*)/\tau^*$ は、それぞれ主問題 *(P)* と双対問題 *(D)* の最適解である。もし、$\kappa^* > 0$ ならば、主問題 *(P)* あるいは双対問題 *(D)* の少なくとも一方が実行不能である。

証明： まずはじめに、$\tau^* > 0$ とする。このとき、問題 (SD_1) の制約式において、$\theta = 0$ を代入し、両辺を τ^* で除することにより、x^*/τ^* と $(y^*, s^*)/\tau^*$ は、主問題 (P) と双対問題 (D) の実行可能解である。そして、x^*/τ^* と s^*/τ^* が相補性条件をみたすので、最適解である。

つぎに、$\kappa^* > 0$ であるとする。このとき、相補性条件より、$\tau^* = 0$ である。制約条件と $\tau^* = 0, \theta^* = 0$ より、

$$\begin{aligned} Ax^* &= 0 \\ -A^T y^* - s^* &= 0 \\ b^T y^* - c^T x^* - \kappa^* &= 0 \end{aligned}$$

が成立する。この 3 番目の式より、

$$\kappa^* = b^T y^* - c^T x^* > 0$$

である。したがって、$b^T y^* > 0$ または $c^T x^* < 0$ である。このとき、$b^T y^* > 0$ ならば主問題 (P) が実行不能であり、$c^T x^* < 0$ ならば双対問題 (D) が実行不能である。実際、もし主問題 (P) が実行可能ならば (実行可能解を $\bar{x}$ とすれば)、$A^T y^* + s^* = 0$ から

$$\begin{aligned} 0 &= (A\bar{x} - b)^T y^* \\ &= -(s^*)^T \bar{x} - b^T y^* \end{aligned}$$

となるので、$b^T y^* = -(s^*)^T \bar{x} \leq 0$ であり、双対問題 (D) が実行可能ならば (実行可能解を $(\bar{y}, \bar{s})$ とすれば)、$Ax^* = 0$ から

$$\begin{aligned} 0 &= (A^T \bar{y} + \bar{s} - c)^T x^* \\ &= \bar{s}^T x^* - c^T x^* \end{aligned}$$

となるので、$c^T x^* = \bar{s}^T x^* \geq 0$ である。 □

この補題の結果により、自己双対線形計画問題の強相補解を求めることにより、問題 (P) と (D) を解くことができる。次節では、このような解を求める方法を紹介する。

本節の最後に、双対ギャップ $x^T s + \tau\kappa$ の値が θ の値に比例することを示す。

補題 3 問題 *(SD₁)* の任意の実行可能解は、

$$x^T s + \tau\kappa = \theta((x^0)^T s^0 + \tau^0 \kappa^0)$$

をみたす。

証明： 問題 (SD_1) の制約式の両辺に $-(y^T, x^T, \tau, \theta)$ を乗じると、係数行列が歪対称であることからほとんどの項が消去され、次の関係式が得られる

$$x^T s + \tau\kappa = \theta h^0.$$

ここで、$h^0 = (x^0)^T s^0 + \tau^0 \kappa^0$ を代入すれば、補題の関係式が得られる。 □

この結果からも、$\theta = 0$ ならば、(x, τ) と (s, κ) の間に相補性条件が成立することがわかる。

4 自己双対線形計画問題の内点法

自己双対線形計画問題 (SD_1) の強相補解を求める内点法を紹介する。その方法は、線形計画問題の主双対内点法と多くの点で類似している。

まず、(SD_1) の実行可能領域を

$$F_1 := \{(y, x, \tau, \theta, s, \kappa) : (\mathrm{SD}_1) \text{の実行可能解、ただし} \theta > 0\}$$

とする。この領域のセンターパス

$$P_1 := \{(y, x, \tau, \theta, s, \kappa) \in F_1 : Xs = \mu e, \tau\kappa = \mu, \mu > 0\}$$

とその近傍

$$\begin{aligned} N_1(\beta) \quad := \quad & \{(y, x, \tau, \theta, s, \kappa) \in F_1 : \|(Xs - \mu e, \tau\kappa - \mu)\|_p \leq \beta\mu, \\ & \mu = (x^T s + \tau\kappa)/(n+1), \mu > 0\} \end{aligned}$$

を定義する。ここで、$e = (1, 1, \cdots, 1)^T$, $\beta \in (0, 1)$ は適当な定数であり、$\|\cdot\|_p$は ℓ_P ノルムをあらわす。

センターパス P_1は、実行可能領域内の一次元の滑らかなパスになっている。そして、パス上の点は、$\mu \to 0$ のときに問題 (SD_1) の強相補解に収束する。この性質は、近傍 $N_1(\beta)$ 内の点列でも成立する、すなわち、任意の点列 $\{(y^k, x^k, \tau^k, \theta^k, s^k, \kappa^k) \in N_1(\beta)\}$ において、$k \to \infty$ のとき $(x^k)^T s^k + \tau^k \kappa^k \to 0$ ならば、任意の集積点は強相補解である。したがって、内点法により近傍 $N_1(\beta)$ 内に点列を生成することにより、センターパス P_1 を$\mu \to 0$ の方向へ追跡すれば、自己双対線形計画問題の強相補解を求めることが可能となる。このような内点法をパス追跡法と呼ぶ。

パス追跡法

- ステップ０： 初期点 $(y^0, x^0, \tau^0, \theta^0, s^0, \kappa^0)$ と定数$\beta \in (0, 1)$ を初期点が近傍 $N_1(\beta)$ 内に入るように定める。$k = 0$ とする。
- ステップ１：$\mu^k = ((x^k)^T s^k + \tau^k \kappa^k)/(n+1)$ とする。適当な$\mu \in [0, \mu^k]$ の値を定め、このμに対応するパス上の点を定義する方程式系に点 $(y^k, x^k, \tau^k, \theta^k, s^k, \kappa^k)$ においてニュートン法を適用し、ニュートン方向 $(\Delta y, \Delta x, \Delta\tau, \Delta\theta, \Delta s, \Delta\kappa)$ を計算する。
- ステップ２： 近傍 $N_1(\beta)$ から出ない適当なステップサイズαを求めて

  $$\begin{aligned} & (y^{k+1}, x^{k+1}, \tau^{k+1}, \theta^{k+1}, s^{k+1}, \kappa^{k+1}) \\ = \quad & (y^k, x^k, \tau^k, \theta^k, s^k, \kappa^k) + \alpha(\Delta y, \Delta x, \Delta\tau, \Delta\theta, \Delta s, \Delta\kappa) \in N_1(\beta) \end{aligned}$$

  とする。
- ステップ３： kを１増加し、ステップ１へ行く。

ここで、二つのパラメータ（ステップ１のμとステップ２のα）の求め方を変えることにより、さまざまなパス追跡法を構築することができる。主双対内点法で提案されている方法が利用でき、たとえば、ショートステップ法 (Kojima, Mizuno, and Yoshise [3], Monteiro and Adler [7])、ロングステップ法 (Kojima, Mizuno, and Yoshise [2], Mizuno, Todd, and Ye [6])、プレディクタ・コレクタ法 (Mizuno, Todd, and Ye [6]) などが利用できる。また、パス追跡法以外に、主双対ポテンシャル減少法 (Kojima, Mizuno, and Yoshise [4]) も自己双対線形計画問題に適用できる。

5　自己双対システム

線形計画問題 (P) に対して、Nesterov, Todd, and Ye [8] は、つぎの自己双対システムを導入した。(文献 [8] では、より一般的な非線形型計画問題を対象としているが、ここでは線形計画問題について述べる。)

$$
(SD_2) \qquad \begin{array}{rrrrrcl}
 & Ax & -b\tau & & & = & -b^0, \\
-A^T y & & +c\tau & -s & & = & c^0, \\
b^T y & -c^T x & & & -\kappa & = & g^0, \\
 & x \geq 0 & \tau \geq 0 & s \geq 0 & \kappa \geq 0. & &
\end{array}
$$

ここで、b^0, c^0, g^0は、(1) により定義されている。したがって、初期点 $(y^0, x^0, \tau^0, s^0, \kappa^0)$ は、このシステムの条件をすべてみたす。このシステムをみたす点の集合に含まれるような半直線の方向 (y, x, τ, s, κ)(recession direction) を考える、すなわち、等式条件の右辺をゼロとした次の条件

$$
\begin{array}{rrrrrcl}
 & Ax & -b\tau & & & = & 0, \\
-A^T y & & +c\tau & -s & & = & 0, \\
b^T y & -c^T x & & & -\kappa & = & 0, \\
 & x \geq 0 & \tau \geq 0 & s \geq 0 & \kappa \geq 0 & &
\end{array}
\tag{2}
$$

をみたすベクトル (y, x, τ, s, κ) を考える。このような方向を $(y^*, x^*, \tau^*, s^*, \kappa^*)$ とするとき、係数行列が歪対称であることから、上の条件式にこの点を代入し、両辺にベクトル $-((y^*)^T, (x^*)^T, \tau)$ を乗じれば

$$(x^*)^T s^* + \tau^* \kappa^* = 0$$

が得られる。それぞれの成分が非負であることから、相補性条件

$$X^* s^* = 0,\ \tau^* \kappa^* = 0$$

が成立する。このことからも類推されるように、次の結果が得られる。

補題 4 $(y^*, x^*, \tau^*, s^*, \kappa^*)$ を問題 *(SD_2)* の *recession direction* であるとする。もし$\tau^* > 0$ ならば、x^*/τ^*と $(y^*, s^*)/\tau^*$は、それぞれ主問題 *(P)* と双対問題 *(D)* の最適解である。もし$\kappa^* > 0$ ならば、主問題 *(P)* あるいは双対問題 *(D)* の少なくとも一方が実行不能である。

証明： 上記の条件 (2) より、問題 (SD_2) の recession direction は、適当なスケーリングをほどこせば、自己双対線形計画問題 (SD_1) の最適解である。したがって、補題 2から この結果が得られる。 □

また、補題 1より、recession direction には、強相補性条件をみたすものが存在する。そのような方向 $(y^*, x^*, \tau^*, s^*, \kappa^*)$ を求めれば、$\tau^* > 0$ または$\kappa^* > 0$ であるので、上記の結果から主問題 (P) と双対問題 (D) を解くことができる。

Nesterov, Todd, and Ye [8] は、問題 (SD_2) の条件をみたす点の集合

$$F_2 := \{(y, x, \tau, s, \kappa) : (\mathrm{SD}_2) \text{ の条件をみたす } \}$$

に対して、センターパス

$$P_2 := \{(y, x, \tau, s, \kappa) \in F_2 : Xs = \mu e, \tau\kappa = \mu, \mu > 0\}$$

とその近傍

$$\begin{aligned} N_2(\beta) \quad := \quad & \{(y, x, \tau, s, \kappa) \in F_2 : \|(Xs - \mu e, \tau\kappa - \mu)\|_p \leq \beta\mu, \\ & \mu = (x^T s + \tau\kappa)/(n+1), \mu > 0\} \end{aligned}$$

を導入した。そして、近傍 $N_2(\beta)$ 内に点列を生成し、センターパス P_2を$\mu \to \infty$ の方向に追跡した点をスケーリングすることにより、強相補性条件をみたす recession direction (あるいはその近似) を求めることができることを示した。そして、そのような点列を求めるための内点法を提案した。

6 二つのアプローチの関係

ここまでに、線形計画問題を解くために自己双対システム使う方法を二つ紹介した。前節で説明したことからも類推されるように、この二つの方法には密接な関係がある。Mizuno and Todd [5] は、その関係を詳しく調べた。ここでは、その結果の一部を簡単に紹介する。

写像$\Phi : F_1 \rightarrow F_2$を

$$\Phi(y,x,\tau,\theta,s,\kappa) = (y,x,\tau,s,\kappa)/\theta$$

により定義する。この写像は、全単射(one-to-one and onto)であり、逆写像も簡単に求められる。この写像により、問題(SD_1)のセンターパスP_1上の点は、問題(SD_2)のセンターパスP_2上に移る。ただし、その方向は逆向きである、すなわち、P_1上でμが減少する向きに点が移動すれば、P_2で対応した点はμが増加する方向に動く。同様に、問題(SD_1)のセンターパスの近傍$N_1(\beta)$上の点も、写像Φにより、近傍$N_2(\beta)$上に移る。

Mizuno and Todd [5] は、二つの自己双対システムの内点法に使われる探索方向とステップサイズの関係も調べた。その結果、ロングステップ法あるいはプレディクタ・コレクタ法を適用した場合には、適当な初期点とパラメータを設定することにより、生成される点列が写像Φにより完全に対応していることを明らかにした。他方、ショートステップ法などで生成される点列に対しては、このような対応が得られないことも示した。

また、ポテンシャル減少法と呼ばれる内点法では、適当なポテンシャル関数を採用することにより、二つの自己双対システムに適用したときに、写像Φにより完全に対応した点列を生成することを明らかにした。

参考文献

[1] N. K. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.

[2] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise, A Primal-Dual Interior-Point Algorithm for Linear Programming; in N. Megiddo ed., *Progress in Mathematical Programming*, Interior Point and Related Methods, Springer-Verlag, 29–47, 1989.

[3] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise, A Polynomial-Time Algorithm for a Class of Linear Complementarity Problems; *Mathematical Programming* Vol. 44, No. 1, 1–26, 1989.

[4] M. Kojima, S. Mizuno and A. Yoshise: An $O(n^{0.5}L)$ Iteration Potential Reduction Algorithm for Linear Complementarity Problems; *Mathematical Programming* Vol. 50, No. 3, 331–342, 1991.

[5] S. Mizuno and M. J. Todd, On two homogeneous self-dual systems for linear pro-

gramming and its extensions, Research Menorandum 687, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, 1998.

[6] S. Mizuno, M. J. Todd, and Y. Ye, On Adaptive-Step Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Linear Programming; *Mathematics of Operations Research* Vol. 18, No. 4, 964–981, 1993.

[7] R. D. C. Monteiro and I. Adler, Interior path following, primal-dual algorithms: Part I: Linear programming, *Mathematical Programming*, 44:27–41, 1989.

[8] Yu. E. Nesterov, M. J. Todd and Y. Ye, Infeasible-start primal-dual methods and infeasibility detectors for nonlinear programming problems, to appear in *Mathematical Programming.*

[9] X. Xu, P.-F. Hung, and Y. Ye, A simplified homogeneous and self-dual linear programming algorithm and its implementation, *Annals of Operations Research*, 62:151–171, 1996.

[10] X. Xu and Y. Ye, A generalized homogeneous and self-dual linear programming algorithm, *Operations Research Letters*, 17, 1995.

[11] Y. Ye, M. J. Todd, and S. Mizuno, An $O(\sqrt{n}L)$-iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm, *Mathematics of Operations Research*, 19:53–67, 1994.