数理解析研究所講究録
1082 巻 1999 年 16-33

Commuting difference operators arising from the elliptic $C_2^{(1)}$-face model

長谷川浩司 (東北大理), 池田岳 (岡山理科大理), 菊地哲也 (東北大理)
HASEGAWA Koji (Tohoku Univ.),
IKEDA Takeshi (Okayama Univ. of Science)
and KIKUCHI Tetsuya (Tohoku Univ.)

1 Introduction

対称直交多項式系の 2 パラメータ族であるいわゆる Macdonald 多項式は Macdonald による可換差分作用素系の同時固有対称多項式として特徴づけられるが [M], この可換差分系を表現論的に再構成する方法が 2 つ知られている。ひとつは Etingof-Kirillov による方法 [EK] で, 量子展開環 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ の適当な表現の intertwiner から得られる関数のみたす可換作用素系が Macdonald の作用素系と一致するというもので, 可換作用素系の起源は $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ の中心としてとらえられる. もう一つは Cherednik [Ch] によるもので, double affine Hecke 環の q 差分作用素による表現を考えると, その中心に対応する作用素として Macdonald 系が実現される.

一方筆者の一人は [H1] において, Belavin による Yang-Baxter 方程式の楕円函数解 (楕円 R 行列) [Be] に対する L 作用素を A 型のウェイト空間上の差分作用素の行列として与えた. この L 作用素のトレースは可換な差分作用素の族をなすが, それは Ruijsenaars により与えられた差分作用素 [R] と本質的に一致することが示された [H3]. Ruijsenaars の差分系は (A 型の) Macdonald 多項式が満たす差分系を楕円函数的に拡張したものと見ることができ, また Olshanetsky-Perelomov [OP] による楕円函数的 Calogero - Moser 系の差分拡張ともいえる.

共形場理論の立場からは, Etingof らの方法は, 楕円曲線上の相関函数をアフィン・リー環の表現の適当な intertwining operator であらわし, それが満たす方程式を導出する方法 (の三角極限) の q 類似といえる [EFK]. 楕円曲線 $\mathbb{C}^\times/\mathrm{p}^{\mathbb{Z}}$ ($|\mathrm{p}| < 1$) 上の一点相関関数は, p およびこの上の G 主束 (ゲージ群) の moduli parameter のみに依り, $G = SL_n(\mathbb{C})$ とすればこの moduli parameter は $z \in \mathbb{C}^\times$ 上のファイバーと pz 上のそれとをはりあわせる行列の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ($\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$) として良い. すると一点函数の p 微分はアフィン・リー環の可積分指標が満たすような熱方程式型の, $\tau = \frac{\log \mathrm{p}}{2\pi i}$ について一階の項, 各 λ_i について二階の項, およびポテンシャルと解釈できる項からなる, いわゆる Bernard 方程式を満たす [Fe1]. 臨界レベルとよばれる理論においてはこのうち τ 微分の項がなくな

り, Olshanetsky-Perelomov の作用素が現れる. 多点の場合も同様にして得られる臨界レベルにおける方程式系は Gaudin 模型と呼ばれるが, それは古典力学的極限では Hitchin の可積分系と一致し, Higgs 場とよばれる行列の冪のトレースで定まる可換作用素をもつ [ER][GN][Ne][重点]. つまり, Etingof らの方法は Hitchin 可積分系の特別な場合の量子化+差分化を扱うものであり, Hitchin 可積分系は Lax 形式で記述される. Hitchin 可積分系の Lax 行列 (Higgs 場) は [H3] の差分 L 作用素から適当な古典極限で得られることが計算で確かめられるので, 結局差分 L 作用素を用いる方法は Etingof-Kirillov の方法の楕円函数版と考えられる.

差分 L 作用素を考えるときに出発点とした Yang-Baxter 方程式の楕円函数解については Belavin-Drinfeld の分類 [BeDr] があり, (classical) Yang-Baxter 方程式には A 型以外の楕円函数解は存在しないことが知られている. しかし Yang-Baxter 方程式をいわゆる面型 (face type) のものに拡張して考えると, この場合には少くとも全ての古典型 Lie 環のベクトル表現に付随した楕円関数解が知られている. A 型の場合, Belavin の R 行列に対する L 作用素はいわゆる intertwining vectors を用いた similarity 変換によって面型の解 [Fe2][FV] にうつり, トレースとして得られる作用素系はこの L 作用素の変換で変わらない. 先に述べた Hitchin 系の Lax 行列との対応も L 作用素をこのようにして面型のものに変換することで得られるので, 一般にも面型の Yang-Baxter 方程式の解に対する差分 L 作用素を考えると, それが定める系は共形場理論の差分的拡張における一例になると考えられる (cf. [E][JKOS]).

本稿では, 我々は C_2 型の face 模型から出発して, fusion procedure を利用して作った Yang-Baxter 方程式の解をもとに, 差分 L 作用素のトレースとしての可換な差分作用素系を構成する (定理 1). 具体的には次の作用素の組 $\{\widetilde{M_1}, \widetilde{M_2}\}$ である. $\hbar \in \mathbb{C}$ とし, 2 変数 λ_1, λ_2 の函数 f に対して shift operators を

$$T_{\pm 1} f(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1 \pm \hbar, \lambda_2), \quad T_{\pm 2} f(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1, \lambda_2 \pm \hbar)$$

で定義し, $I = \{\pm 1, \pm 2\}$ とおき, $\lambda_{-i} = -\lambda_i$ と解釈するとき

$$\widetilde{M_1} = \sum_{i \in I} \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq \pm i}} \frac{[\lambda_i + \lambda_j - \hbar]}{[\lambda_i + \lambda_j]} T_i,$$

$$\widetilde{M_2} = \sum_{\substack{i=\pm 1 \\ j=\pm 2}} \left(\frac{[\lambda_i + \lambda_j - \hbar]}{[\lambda_i + \lambda_j + \hbar]} T_i T_j + \frac{[2\hbar]}{[6\hbar]} \frac{[2\lambda_i + 2\hbar]}{[2\lambda_i]} \frac{[2\lambda_j + 2\hbar]}{[2\lambda_j]} \frac{[\lambda_i + \lambda_j - 5\hbar]}{[\lambda_i + \lambda_j + \hbar]} \frac{[\lambda_i + \lambda_j + 2\hbar]}{[\lambda_i + \lambda_j]} \right).$$

ここで係数として現われる函数 $[u]$ は, Jacobi のテータ函数

$$[u] := i\mathrm{p}^{1/8} \sin \pi u \prod_{m=1}^{\infty} (1 - 2\mathrm{p}^m \cos 2\pi u + \mathrm{p}^{2m})(1 - \mathrm{p}^m)$$

である. 我々は更にこの作用素たちが $\widehat{\mathfrak{sp}}(4, \mathbb{C})$ のレベル 1 の指標が張る空間を保つことを示した (定理 2). これは Sklyanin [S] による, いわゆる Sklyanin 代数の差分作用素を用

いた実現において知られていた有限次元表現空間の C 型類似と考えられ, その意味づけは今後の課題である.

Macdonald 多項式の理論は任意のルート系に付随して展開できるが, その楕円函数版があるかどうかという問いに対する答えとして van Diejen による結果 [vD] があった. 彼は可約なルート系 BC_2 に付随して, 楕円函数を係数に持つ可換な差分作用素の組を構成した. それは Koornwinder [K] により導入された多変数 Askey-Wilson 多項式の理論の, 2 変数の場合の楕円函数版と考えられる. その後, 樋上, 小森 [KH1][KH2] は Cherednik の方法の楕円函数的拡張といえる手法を用い, Ruijsenaars 系 (A 型のとき), および van Diejen の作用素を含む n 個の可換な差分系 (BC_n 型のとき) を構成した. これら van Diejen あるいは樋上-小森の作用素たちと我々の結果との関係についても, まだ明らかではない.

本稿の内容は, [HIK] に基づく. 最後に注意であるが, face 模型については, 神保-三輪-尾角 [JMO] らによって解が求められたが, これは A 型以外の場合はテータ函数の平方根を含むものであった. これは物理的にはボルツマン・ウエイトのユニタリティという条件から自然ではあるが, 数学的には平方根を除いた解があって後にユニタリティの条件が課されるべきだろう. これまで A 型の場合を除き, 平方根を除いた表示は知られていないようであり, それを見つけることはやってみると結構根気のいる作業である. そこでここでは $C_2^{(1)}$ 型の場合に, 平方根をもたない解についてやや詳しく述べた (次節. なお $C_n^{(1)}$ でも全く同じ式で解となる). B 型や D 型の場合についても平方根をもたない同様の表示が得られるが, それらについては別の機会に譲る.

2　$C_2^{(1)}$-face 模型

ここでは神保-三輪-尾角 [JMO] による face 型の Yang-Baxter 方程式の楕円函数解で, C_2 型の Lie 環に対するものについて, すでに述べたように平方根のない表示を与える.

2.1　ボルツマン・ウェイト

$\mathfrak{h}$ を単純 Lie 環 $\mathfrak{g} := \mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ の Cartan 部分環とし, $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}$ の双対空間とする. $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ のルート系 R を $R := \{\pm(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2), \pm 2\varepsilon_1, \pm 2\varepsilon_2\} \subset \mathfrak{h}^*$ で表わす. $\mathfrak{h}^*$ 上の双線形形式 $(,)$ を $(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = \frac{1}{2}\delta_{jk}$ で与える. 基本ウェイトを $\varpi_1 = \varepsilon_1, \varpi_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ とし, 基本表現 $V(\varpi_d)$ $(d = 1, 2)$ のウェイトがなす集合を $\mathcal{P}_d$ とおく. すると,

$$\mathcal{P}_1 = \{\pm\varepsilon_1, \pm\varepsilon_2\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{\pm(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2), 0\}$$

であり, このとき各ウェイトの重複度は 1 である.

複素数 $\hbar$ を任意に固定する. 神保-三輪-尾角による $C_2^{(1)}$ 型 face 模型のボルツマン・ウェイト [JMO] を $\mathfrak{h}^*$ の 4 つの元の組 $(\lambda, \mu, \nu, \kappa)$ に対して $W\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & \\ & & u \\ \kappa & \nu & \end{array}\right)$ で表わす. これはパラメータ $u \in \mathbb{C}$ の函数であり, $\mu - \lambda, \nu - \kappa, \kappa - \lambda, \nu - \mu \in 2\hbar\mathcal{P}_1$ でないときは 0 であ

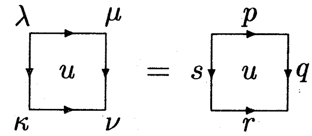
ると定める. このとき Yang-Baxter 方程式とは次の函数方程式系を意味する.

$$\sum_{\eta\in\mathfrak{h}^*} W\left(\begin{matrix}\rho & \eta\\ \sigma & \kappa\end{matrix}\middle| u-v\right) W\left(\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \rho & \eta\end{matrix}\middle| u\right) W\left(\begin{matrix}\mu & \nu\\ \eta & \kappa\end{matrix}\middle| v\right)$$
$$= \sum_{\eta\in\mathfrak{h}^*} W\left(\begin{matrix}\lambda & \eta\\ \rho & \sigma\end{matrix}\middle| v\right) W\left(\begin{matrix}\eta & \nu\\ \sigma & \kappa\end{matrix}\middle| u\right) W\left(\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \eta & \nu\end{matrix}\middle| u-v\right). \tag{1}$$

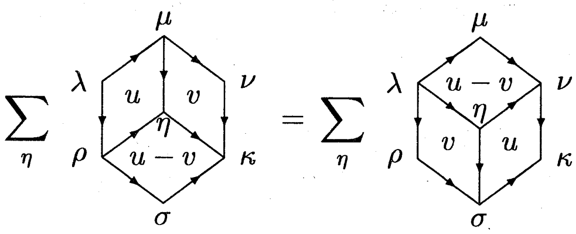
$(\forall\lambda,\mu,\nu,\kappa,\sigma,\rho\in\mathfrak{h}^*)$

今, $p,q,r,s\in\mathcal{P}_1$ が $p+q=r+s$ という関係を満たし, $\mu-\lambda=2\hbar p, \nu-\mu=2\hbar q, \kappa-\lambda=2\hbar s, \nu-\kappa=2\hbar r$ のとき, ボルツマン・ウェイトを

$$W\left(\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \kappa & \nu\end{matrix}\middle| u\right) =$$



のように略記すると, Yang-Baxter 方程式は次のように表わされる.



以上の設定に見合う, この方程式の解は次のように与えられる. 記号は, $\lambda\in\mathfrak{h}^*, p,q\in\mathcal{P}_1$ とし, $p\in\mathcal{P}_1$ に対して $\lambda_p:=(\lambda,p)$ と定める.

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ p & \boxed{u} & p \\ & p & \end{array} = \frac{[c-u]\,[u+\hbar]}{[c]\,[\hbar]}, \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ p & \boxed{u} & q \\ & q & \end{array} = \frac{[c-u]\,[\lambda_p-\lambda_q-u]}{[c]\,[\lambda_p-\lambda_q]} \quad (p\neq\pm q), \tag{3}$$

$$\begin{array}{ccc} & q & \\ p & \boxed{u} & p \\ & q & \end{array} = \frac{[c-u]\,[u]\,[\lambda_p-\lambda_q+\hbar]}{[c]\,[\hbar]\,[\lambda_p-\lambda_q]} \quad (p\neq\pm q), \tag{4}$$

$$\begin{array}{ccc} & q & \\ p & \boxed{u} & -q \\ & -p & \end{array} = -\frac{[u]\,[\lambda_p+\lambda_q+\hbar+c-u]}{[c]\,[\lambda_p+\lambda_q+\hbar]}\frac{[2\lambda_p+2\hbar]}{[2\lambda_q]}\frac{\prod_{r\neq\pm p}[\lambda_p+\lambda_r+\hbar]}{\prod_{r\neq\pm q}[\lambda_q+\lambda_r]} \quad (p\neq q), \tag{5}$$

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ p & \boxed{u} & -p \\ & -p & \end{array} = \frac{[c-u]\,[2\lambda_p+\hbar-u]}{[c]\,[2\lambda_p+\hbar]} - \frac{[u]\,[2\lambda_p+\hbar+c-u]}{[c]\,[2\lambda_p+\hbar]}\frac{[2\lambda_p+2\hbar]}{[2\lambda_p]}\prod_{q\neq\pm p}\frac{[\lambda_p+\lambda_q+\hbar]}{[\lambda_p+\lambda_q]}. \tag{6}$$

ここで c は交叉パラメータと呼ばれ, C_2 型のボルツマン・ウェイトの場合 $c=-3\hbar$ である. また, これらの解は次の性質をみたす.

Initial condition:

$$W\left(\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \kappa & \nu\end{matrix}\middle|\,0\right)=\delta_{\mu\kappa}.$$

Inversion relation:

$$\sum_{\eta}W\left(\begin{matrix}\lambda & \eta\\ \kappa & \nu\end{matrix}\middle|\,u\right)W\left(\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \eta & \nu\end{matrix}\middle|-u\right)=\delta_{\mu\kappa}\frac{[c+u]\,[c-u]\,[\hbar+u]\,[\hbar-u]}{[c]^2\,[\hbar]^2}. \tag{7}$$

Crossing symmetry:

$$W\left(\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \kappa & \nu\end{matrix}\middle|\,u\right)=\frac{g(\lambda,\kappa)}{g(\mu,\nu)}W\left(\begin{matrix}\kappa & \lambda\\ \nu & \mu\end{matrix}\middle|\,c-u\right),$$

ここで $g(\lambda,\mu):=[2\mu_p]\prod_{\substack{q\in\mathcal{P}_1\\ q\neq\pm p}}[\mu_p+\mu_q]$ $(\mu=\lambda+2\hbar p,\ p\in\mathcal{P}_1)$ とおいた.

Reflection symmetry:

$$W\left(\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \kappa & \nu\end{matrix}\middle|\,u\right)=\frac{g(\lambda,\kappa)g(\kappa,\nu)}{g(\lambda,\mu)g(\mu,\nu)}W\left(\begin{matrix}\lambda & \kappa\\ \mu & \nu\end{matrix}\middle|\,u\right).$$

ボルツマン・ウェイト (2)–(6) が Yang-Baxter 方程式をみたすことは, これらの性質を用いることにより証明できる. 詳しくは [HIK] にランク一般の場合での証明があるので, そちらを参照されたい.

2.2 神保-三輪-尾角による解との関係

ここに与えた Yang-Baxter 方程式の解のうち, (4), (5) の二つは神保-三輪-尾角による原論文 [JMO] の表示とは違うものになっている. 実際, 原論文ではこの二つは

$$\begin{matrix} & q & \\ p & \boxed{u} & p\\ & q & \end{matrix}=\frac{[c-u]\,[u]}{[c]\,[\hbar]}\left(\frac{[\lambda_p-\lambda_q+\hbar]\,[\lambda_p-\lambda_q-\hbar]}{[\lambda_p-\lambda_q]^2}\right)^{1/2}\qquad(p\neq\pm q),$$

$$\begin{matrix} & q & \\ p & \boxed{u} & -q\\ & -p & \end{matrix}=\frac{[u]\,[\lambda_p+\lambda_q+\hbar+c-u]}{[c]\,[\lambda_p+\lambda_q+\hbar]}\left(G_{\lambda p}G_{\lambda q}\right)^{1/2}\qquad(p\neq q).$$

となっている. ここで

$$G_{\lambda p}:=-\frac{[2\lambda_p+2\hbar]}{[2\lambda_p]}\prod_{\substack{r\in\mathcal{P}_1\\ r\neq\pm p}}\frac{[\lambda_p+\lambda_r+\hbar]}{[\lambda_p+\lambda_r]}\quad(p\in\mathcal{P}_1). \tag{8}$$

この表示のボルツマン・ウェイトを W_{JMO} とあらわすと, 我々のボルツマン・ウェイトをこの解から Yang-Baxter 方程式を保ちながら得るには次のようにすればよい. 今, 集合 $\mathcal{P}_1$ の線形順序 $\prec$ を

$$\varepsilon_1 \prec \varepsilon_2 \prec -\varepsilon_2 \prec -\varepsilon_1$$

で定めて, $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ が$\mu - \lambda = 2\hbar q$, $q \in \mathcal{P}_1$ を満たすとき, 函数 $s(\lambda,\mu)$ を

$$s(\lambda,\mu) := \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}_1 \\ p\prec q}} [\lambda_p - \lambda_q][\mu_p - \mu_q]$$

と定義する. このとき,

$$W\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & \\ \kappa & \nu & u \end{array}\right) = W_{JMO}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & \\ \kappa & \nu & u \end{array}\right) \left\{\frac{s(\lambda,\kappa)s(\kappa,\nu)}{s(\lambda,\mu)s(\mu,\nu)}\right\}^{1/2}$$

という関係になっている.

3 Fusion procedure

この section では, ベクトル表現に対するボルツマン・ウェイトからより高次の表現に対するボルツマン・ウェイトを構成する方法, fusion procedur を用いて, 可換な作用素系を構成するために必要な, 基本表現 $V(\varpi_2)$ に対する拡張されたボルツマン・ウェイトを与える.

3.1 道の空間と face 作用素

$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ と $u \in \mathbb{C}$ に対して, 記号 $e(u)^\mu_\lambda$ を用い, ベクトル空間

$$\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u)^\mu_\lambda := \begin{cases} \mathbb{C}e(u)^\mu_\lambda & : \mu - \lambda \in 2\hbar\mathcal{P}_1, \\ 0 & : \text{otherwise}. \end{cases}$$

を考える. $\mathfrak{h}^*$ の元の列 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ が長さ N の**道** (path) であるとは

$$\lambda_i - \lambda_{i-1} \in 2\hbar\mathcal{P}_1 \quad (1 \le i \le N)$$

なることをいい, λ_0 を始点, λ_N を終点とよぶ. 上に定義したベクトル空間 $\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u)^\mu_\lambda$ により, λ を始点, μ を終点とする道に対してベクトル空間

$$\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u_1} \otimes \cdots \otimes \varpi_1^{u_k})^\mu_\lambda := \bigoplus_{\substack{\lambda_i\in\mathfrak{h}^* \\ 1\le i\le k-1}} \widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u_1})^{\lambda_1}_\lambda \otimes \widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u_2})^{\lambda_2}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u_k})^\mu_{\lambda_{k-1}}$$

が 1 対 1 に対応する. この空間を用いて, λ を始点とする長さ k の道の終点となるような $\mathfrak{h}^*$ の元を動かして得られる空間を

$$\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u_1} \otimes \cdots \otimes \varpi_1^{u_k})_\lambda := \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} \widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u_1} \otimes \cdots \otimes \varpi_1^{u_k})^\mu_\lambda,$$

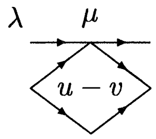
さらに, 始点も $\mathfrak{h}^*$ 内を動かした**道の空間** (path space) を

$$\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u_1}\otimes\cdots\otimes\varpi_1^{u_k}) := \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u_1}\otimes\cdots\otimes\varpi_1^{u_k})_\lambda$$

で定義する. ボルツマン・ウェイトを用いて, 長さ 2 の道の空間 $\widehat{\mathcal{P}}(\varpi^u\otimes\varpi^v)$ 上の線形作用素 $W(\varpi_1^u,\varpi_1^v):\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u\otimes\varpi_1^v)\to\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^v\otimes\varpi_1^u)$, を,

$$W(\varpi_1^u,\varpi_1^v)\,e(u)_\lambda^\mu\otimes e(v)_\mu^\nu := \sum_{\kappa\in\mathfrak{h}^*} e(v)_\lambda^\kappa\otimes e(u)_\kappa^\nu W\left(\begin{array}{cc|c}\lambda & \mu & \\ & & u-v\\ \kappa & \nu & \end{array}\right).$$

によって定義する. この線型作用素を **face 作用素**と呼ぶ. この様子を



により表わす. ここでは上の矢印を道の空間 $\widehat{\mathcal{P}}(\varpi^u)_\lambda^\mu\otimes\widehat{\mathcal{P}}(\varpi^v)_\mu^\nu$ と見て, $W(u-v)$ が下から作用していると思う. すると, Yang-Baxter 方程式は次のように書き直される.

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\otimes W(\varpi_1^u,\varpi_1^v))\,(W(\varpi_1^u,\varpi_1^w)\otimes\mathrm{id})\,(\mathrm{id}\otimes W(\varpi_1^v,\varpi_1^w))\\ &= (W(\varpi_1^v,\varpi_1^w)\otimes\mathrm{id})\,(\mathrm{id}\otimes W(\varpi_1^u,\varpi_1^w))\,(W(\varpi_1^u,\varpi_1^v)\otimes\mathrm{id})\\ &:\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u\otimes\varpi_1^v\otimes\varpi_1^w)\to\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^w\otimes\varpi_1^v\otimes\varpi_1^u).\end{aligned} \tag{9}$$

3.2 Fusion procedure (基本表現 $V(\varpi_2)$ の場合)

作用素 $W(\varpi_1^u,\varpi_1^v)$ において, パラメータ $u-v=-\hbar$ としたもの

$$\pi_{\varpi_2^u} := W\left(\varpi_1^{u-\hbar},\varpi_1^u\right):\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u-\hbar}\otimes\varpi_1^u)\to\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u\otimes\varpi_1^{u-\hbar})$$

を fusion projector と呼ぶ. A 型の場合には, これは縦 2 個の Young 図形に対する Young 対称子の p 変形にあたるものであり, 一般の Young 対称子にあたるものも同様に構成できることが知られている (たとえば [JKMO]). ここでは C 型の場合に, スペクトルパラメータの特殊値 $u-v=-\hbar$ における face 作用素の像として, 基本表現 $V(\varpi_2)$ に対応する道の空間を定める.

道の空間の始点 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ を任意に固定したとき, この作用素による像

$$\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_2^u)_\lambda := \pi_{\varpi_2^u}\,(\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^{u-\hbar}\otimes\varpi_1^u)_\lambda)\subset\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u\otimes\varpi_1^{u-\hbar})_\lambda$$

について次の命題が成り立つ. 記号は, $p\in\mathcal{P}_d$ $(d=1,2)$ に対し

$$\hat{p} := 2\hbar p$$

なる略記を用いる.

命題 1 空間 $\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_2^u)_\lambda$ は 5 次元で, 基底 $\{f(u)_\lambda^{\lambda+\hat{r}}\}_{r\in\mathcal{P}_2}$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} f(u)_\lambda^{\lambda+\hat{p}+\hat{q}} =& [\lambda_p-\lambda_q+\hbar]e(u)_\lambda^{\lambda+\hat{p}}\otimes e(u-\hbar)_{\lambda+\hat{p}}^{\lambda+\hat{p}+\hat{q}} \\ &+[\lambda_q-\lambda_p+\hbar]e(u)_\lambda^{\lambda+\hat{q}}\otimes e(u-\hbar)_{\lambda+\hat{q}}^{\lambda+\hat{p}+\hat{q}}, \end{aligned}$$

ここで $p=\pm\varepsilon_1, q=\pm\varepsilon_2$,

$$f(u)_\lambda^\lambda := \sum_{p\in\mathcal{P}_1}[2\lambda_p+2\hbar]e(u)_\lambda^{\lambda+\hat{p}}\otimes e(u-\hbar)_{\lambda+\hat{p}}^\lambda.$$

証明は, face 作用素の定義に従って, ボルツマン・ウェイト (2)–(6) により作用を書き下し, パラメータに $-\hbar$ を代入した値を調べることによりなされる. (6) の $u=-\hbar$ での値を計算するときテータ函数の加法定理

$$\begin{aligned} &[u+x][u-x][v+y][v-y]-[u+y][u-y][v+x][v-x] \\ &\qquad =[x+y][x-y][u+v][u-v] \end{aligned} \tag{10}$$

$(u,v,x,y\in\mathbb{C})$ を用いる.

この命題より $\pi_{\varpi_2^u}$ の像 $\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_2^u)_\lambda$ は基本ウェイトの集合 $\mathcal{P}_2$ で自然にパラメトライズされることがわかった. そこで, この基底を用いて, ベクトル空間 $\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_2)_\lambda^\mu$ を$\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u\otimes\varpi_1^{u-\hbar})_\lambda^\mu$ の部分空間として実現する.

$$\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_2^u)_\lambda^\mu := \begin{cases} \mathbb{C}f(u)_\lambda^\mu & :\mu-\lambda\in 2\hbar\mathcal{P}_2, \\ 0 & : \text{otherwise}. \end{cases}$$

この空間と先の空間 $\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u)_\lambda^\mu$ をあわせて, 道の空間も ϖ_2 に対してまで拡張して, $d_1,\cdots d_k=1,2$ に対して$\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_{d_1}^{u_1}\otimes\cdots\otimes\varpi_{d_k}^{u_k})$ のような空間も考える. face 作用素をこれらの空間に自然に働くように拡張する.

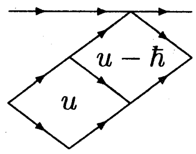
$$\begin{aligned} W_{21}(u-v) :=& \left(W(\varpi_1^u,\varpi_1^v)\otimes\mathrm{id}\right)\left(\mathrm{id}\otimes W(\varpi_1^{u-\hbar},\varpi_1^v)\right) \\ &:\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u\otimes\varpi_1^{u-\hbar}\otimes\varpi_1^v)\to\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^v\otimes\varpi_1^u\otimes\varpi_1^{u-\hbar}), \end{aligned}$$

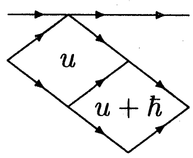
$$\begin{aligned} W_{12}(u-v) :=& \left(\mathrm{id}\otimes W(\varpi_1^u,\varpi_1^{v-\hbar})\right)\left(W(\varpi_1^u,\varpi_1^v)\otimes\mathrm{id}\right) \\ &:\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u\otimes\varpi_1^v\otimes\varpi_1^{v-\hbar})\to\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^v\otimes\varpi_1^{v-\hbar}\otimes\varpi_1^u), \end{aligned}$$

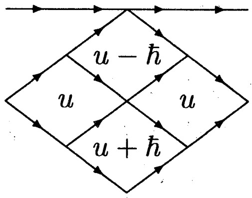
さらに

$$\begin{aligned} W_{22}(u-v) :=& (\mathrm{id}\otimes W_{21}(u-v+\hbar))\,(W_{21}(u-v)\otimes\mathrm{id}) \\ =& (W_{12}(u-v)\otimes\mathrm{id})\,(\mathrm{id}\otimes W_{12}(u-v-\hbar)) \\ &:\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^u\otimes\varpi_1^{u-\hbar}\otimes\varpi_1^v\otimes\varpi_1^{v-\hbar})\to\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_1^v\otimes\varpi_1^{v-\hbar}\otimes\varpi_1^u\otimes\varpi_1^{u-\hbar}) \end{aligned}$$

と定義する．合成の様子を図であらわすと次のようになる．

$W_{21}(u) =$ 

$W_{12}(u) =$ 

$W_{22}(u) =$ 

さらに $W_{11}(u-v) := W(u-v)$ と定義すると，これらの作用素は拡張された道の空間を保つ

命題 2

$$W_{dd'}(u-v)(\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_d^u \otimes \varpi_{d'}^v)_\lambda^\mu) \subset \widehat{\mathcal{P}}(\varpi_{d'}^v \otimes \varpi_d^u)_\lambda^\mu.$$

証明は，fusion projector の定義と，Yang-Baxter 方程式 (9) を繰り返し用いることによりなされる．

この命題により，拡張された face 作用素に対しても Yang-Baxter 方程式は次の形で成り立つ

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id} \otimes W_{dd'}(u-v))\,(W_{dd''}(u-w) \otimes \mathrm{id})\,(\mathrm{id} \otimes W_{d'd''}(v-w))\\ &= (W_{d'd''}(v-w) \otimes \mathrm{id})\,(\mathrm{id} \otimes W_{dd''}(u-w))\,(W_{dd'}(u-v) \otimes \mathrm{id})\\ &\quad : \widehat{\mathcal{P}}(\varpi_d^u \otimes \varpi_{d'}^v \otimes \varpi_{d''}^w) \to \widehat{\mathcal{P}}(\varpi_{d''}^w \otimes \varpi_{d'}^v \otimes \varpi_d^u).\end{aligned} \tag{11}$$

これも，ベクトル表現に対するボルツマン・ウェイトが満たす Yang-Baxter 方程式を繰り返し用いて示せる．作用素 $W_{dd'}(u-v)$ を $\widehat{\mathcal{P}}(\varpi_d^u \otimes \varpi_{d'}^v)$ に制限したとき，基底 $\{e(u)_\lambda^\mu\}, \{f(u)_\lambda^\mu\}$ を用いてこの作用素を行列表示し，その係数を fused Boltzmann weight と呼ぶ．

$$W_{dd'}(u-v) g(u)_\lambda^\mu \otimes g'(v)_\mu^\nu = \sum_{\kappa \in \mathfrak{h}^*} g'(v)_\lambda^\kappa \otimes g(u)_\kappa^\nu \, W_{dd'}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & \\ & & u-v \\ \kappa & \nu & \end{array}\right)$$

ここで $g(u)_\lambda^\mu$(resp. $g(u)'^\mu_\lambda$) は，$d=1$ (resp. $d'=1$) のとき $e(u)_\lambda^\mu$ で，$d=2$ (resp. $d'=2$) のとき $f(u)_\lambda^\mu$ である．この係数について拡張された Yang-Baxter 方程式 (11) を書き直すと，

$$\begin{aligned}&\sum_\eta W_{dd'}\left(\begin{array}{cc|c} \rho & \eta & \\ & & u-v \\ \sigma & \kappa & \end{array}\right) W_{dd''}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & \\ & & u-w \\ \rho & \eta & \end{array}\right) W_{d'd''}\left(\begin{array}{cc|c} \mu & \nu & \\ & & v-w \\ \eta & \kappa & \end{array}\right)\\ &= \sum_\eta W_{d'd''}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \eta & \\ & & v-w \\ \rho & \sigma & \end{array}\right) W_{dd''}\left(\begin{array}{cc|c} \eta & \nu & \\ & & u-w \\ \sigma & \kappa & \end{array}\right) W_{dd'}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & \\ & & u-v \\ \eta & \nu & \end{array}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

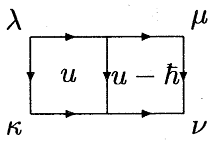
となる．

3.3 Fused Boltzmann weight の例

Fused Boltzmann weight の値は定義より基底 $f(u)^{\mu}_{\lambda}$ の選び方に依存するわけだが, 命題 1 の基底を使用したときのものを例として与える.

まず, ボルツマン・ウェイト

$$W_{21}\left(\begin{array}{cc} \lambda & \mu \\ \kappa & \nu \end{array}\middle|\, u\right) =$$



の例を与える. この場合, 可能な道は全部で以下の 6 つのパターンがある. これらの解はすべて u のみに依存する函数

$$\frac{[u-\hbar]\,[u+\hbar]\,[u+3\hbar]}{[-3\hbar]^2\,[\hbar]}$$

でくくれるので省略する. テータ関数の加法定理 (10) を利用すればこれらの表示が得られる. ここで, $p,q \in \mathcal{P}_1$, $p \neq \pm q$ である.

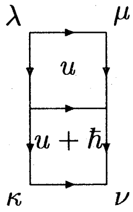
$$\begin{array}{ccc} & p+q & \\ q & \boxed{u} & q \\ & p+q & \end{array} = \frac{[u+2\hbar]}{[\hbar]}, \quad \begin{array}{ccc} & p-q & \\ q & \boxed{u} & q \\ & p-q & \end{array} = \frac{[u]}{[\hbar]}\frac{[2\lambda_q+2\hbar]\,[\lambda_p-\lambda_q-\hbar]}{[2\lambda_q]\,[\lambda_p-\lambda_q+\hbar]},$$

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ q & \boxed{u} & q \\ & 0 & \end{array} = \frac{[u+\hbar]}{[\hbar]}\prod_{\substack{r\in\mathcal{P}_1\\ r\neq\pm q}}\frac{[\lambda_q+\lambda_r+2\hbar]}{[\lambda_q+\lambda_r+\hbar]}, \quad \begin{array}{ccc} & p+q & \\ q & \boxed{u} & -q \\ & p-q & \end{array} = \frac{[2\hbar]}{[\hbar]}\frac{[2\lambda_q-u]\,[\lambda_p-\lambda_q-\hbar]}{[2\lambda_q]\,[\lambda_p+\lambda_q+\hbar]},$$

$$\begin{array}{ccc} & q-p & \\ q & \boxed{u} & p \\ & 0 & \end{array} = \frac{[\lambda_q-\lambda_p-u]\,[\lambda_q+\lambda_p+2\hbar]}{[2\lambda_p]\,[\lambda_q-\lambda_p+\hbar]}, \quad \begin{array}{ccc} & 0 & \\ q & \boxed{u} & p \\ & p-q & \end{array} = \frac{[2\hbar]}{[\hbar]}\frac{[\lambda_q-\lambda_p-\hbar-u]\,[2\lambda_q+2\hbar]}{[\lambda_q-\lambda_p-\hbar]\,[\lambda_q+\lambda_p+\hbar]}.$$

次に,

$$W_{12}\left(\begin{array}{cc} \lambda & \mu \\ \kappa & \nu \end{array}\middle|\, u\right) =$$



の例を与える. 今度は函数

$$\frac{[u]\,[u+2\hbar]\,[u+4\hbar]}{[-3\hbar]^2[\hbar]}$$

がくくり出せる. ここでも計算は関数等式 (10) のみを用いてなされる. これらの fused Boltzmann weight のうち縦方向の道が両方とも $0 \in \mathcal{P}_2$ で結ばれているものを, 差分作用素を構成するのに使用する. $p,q \in \mathcal{P}_1$, $p \neq \pm q$ とする.

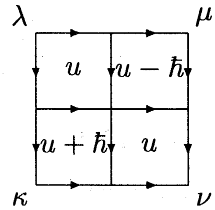
$$\begin{array}{ccc} & p & \\ p+q & \boxed{u} & p+q \\ & p & \end{array} = \frac{[u+3\hbar]}{[\hbar]}, \quad \begin{array}{ccc} & p & \\ q-p & \boxed{u} & q-p \\ & p & \end{array} = \frac{[u+\hbar]}{[\hbar]}\frac{[2\lambda_p-2\hbar]}{[2\lambda_p]}\frac{[\lambda_q-\lambda_p+2\hbar]}{[\lambda_q-\lambda_p]},$$

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ 0 & \boxed{u} & 0 \\ & p & \end{array} = \frac{[u+2\hbar]}{[\hbar]}\prod_{\substack{r\in\mathcal{P}_1 \\ r\neq\pm p}}\frac{[\lambda_p+\lambda_r-\hbar]}{[\lambda_p+\lambda_r]}, \quad \begin{array}{ccc} & p & \\ p+q & \boxed{u} & q-p \\ & -p & \end{array} = \frac{[2\hbar]}{[\hbar]}\frac{[2\lambda_p-\hbar-u]\,[\lambda_p+\lambda_q+2\hbar]}{[2\lambda_p]\,[\lambda_q-\lambda_p]},$$

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ 0 & \boxed{u} & q-p \\ & q & \end{array} = \frac{[\lambda_p-\lambda_q-2\hbar-u]\,[\lambda_p+\lambda_q-\hbar]}{[2\lambda_p]\,[\lambda_q-\lambda_p]}, \quad \begin{array}{ccc} & p & \\ p-q & \boxed{u} & 0 \\ & q & \end{array} = \frac{[2\hbar]}{[\hbar]}\frac{[\lambda_p-\lambda_q-\hbar-u]\,[2\lambda_q-2\hbar]}{[\lambda_q-\lambda_p]\,[\lambda_p+\lambda_q]}.$$

最後に

$$W_{22}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \mu & \\ \kappa & \nu & u \end{array}\right) =$$



の例を与える. C_2 型 Lie 環の基本表現 $V(\varpi_2)$ は, B_2 型 Lie 環のベクトル表現と同型なので, ボルツマン・ウェイトも B 型のもの [JMO] を適当に読みかえることにより対応がつく. ここでは差分作用素を構成するのに必要な例のみ与える. この場合は函数

$$G(u) := \frac{[u-\hbar]\,[u]^2\,[u+\hbar]\,[u+2\hbar]\,[u+3\hbar]^2\,[u+4\hbar]}{[-3\hbar]^4\,[\hbar]^4}, \tag{13}$$

でくくれる. $p, q \in \mathcal{P}_1$ である.

$$\begin{array}{ccc} & p+q & \\ 0 & \boxed{u} & 0 \\ & p+q & \end{array} = \frac{[\lambda_p+\lambda_q-\hbar]}{[\lambda_p+\lambda_q+\hbar]},$$

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & \boxed{u} & 0 \\ & 0 & \end{array} = \frac{[2\hbar]}{[6\hbar]}\left(\sum_{\substack{r=\pm\varepsilon_1 \\ s=\pm\varepsilon_2}}\frac{[2\lambda_r+2\hbar][2\lambda_s+2\hbar]}{[2\lambda_r][2\lambda_s]}\frac{[\lambda_r+\lambda_s-5\hbar][\lambda_r+\lambda_s+2\hbar]}{[\lambda_r+\lambda_s][\lambda_r+\lambda_s+\hbar]} - \frac{[u+6\hbar]\,[u-3\hbar]}{[u]\,[u+3\hbar]}\right).$$

4 可換差分作用素系の構成

ここまでに論じてきた, C_2 型の face 模型から fusion procedure を利用してつくった Yang-Baxter 方程式の解をもとに, 可換な差分作用素の組を構成する. また $\hbar\to 0$ の極限で現われる微分作用素も計算する.

4.1 定理 1: 差分作用素の構成

定理 1 $\mathfrak{h}^*$ 上の関数 f に働く作用素 $M_d(u)$ $(u \in \mathbb{C}, d = 1, 2)$ を

$$(M_d(u))f(\lambda) := \sum_{p \in \mathcal{P}_d} W_{d2}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda + \widehat{p} & \multirow{2}{*}{u} \\ \lambda & \lambda + \widehat{p} & \end{array}\right) T_{\widehat{p}} f(\lambda),$$

$$T_{\widehat{p}} f(\lambda) := f(\lambda + 2\hbar p)$$

と定めると

$$[M_d(u), M_{d'}(v)] = 0$$

が成り立つ. 作用素の具体的な形は, Introduction の作用素 $\widetilde{M_1}, \widetilde{M_2}$ で変数 λ_i を $\lambda_i = (\lambda, \varepsilon_i)$ と読めば, $M_1(u) = F(u)\widetilde{M_1}, M_2(u) = G(u)(\widetilde{M_2} - H(u))$ である. ここで u のみに依存する関数 $G(u)$ は *(13)* で, $F(u), H(u)$ は

$$F(u) := \frac{[u]\,[u + 2\hbar]^2\,[u + 4\hbar]}{[-3\hbar]^2\,[\hbar]^2}, \quad H(u) := \frac{[u + 6\hbar]\,[u - 3\hbar]\,[2\hbar]}{[u]\,[u + 3\hbar]\,[6\hbar]}$$

により与えられる.

注意 以下の可換性の証明をみると, 差分作用素の係数としてのボルツマン・ウェイトは, $V(\varpi_2^u)$ の代わりに, ウェイト 0 の空間を持つ任意の有限次元表現に対する fusion による拡張を用いても可換な差分作用素系が構成できることがわかる. ただし, その場合差分作用素が働く函数空間としては, 一般にはウェイト 0 の空間に値をとるようなベクトル値の函数の空間を考えることになる (これは Etingof らの場合と同じである). 本稿ではウェイト 0 の空間がちょうど 1 次元になる表現として $V(\varpi_2^u)$ に着目した.

4.2 可換性の証明

作用素の合成, $M_d(u)M_{d'}(v), M_{d'}(v)M_d(u)$ は $\mathfrak{h}^*$ の元 t で, $t = r + s, r \in \mathcal{P}_d, s \in \mathcal{P}_{d'}$ をみたすものを用いて次のように表せる.

$$M_d(u)M_{d'}(v) = \sum_{t \in \mathcal{P}_d + \mathcal{P}_{d'}} \operatorname{trace} A_t(\lambda|u, v)\, T_{\widehat{t}},$$

$$M_{d'}(v)M_d(u) = \sum_{t \in \mathcal{P}_d + \mathcal{P}_{d'}} \operatorname{trace} B_t(\lambda|v, u)\, T_{\widehat{t}}.$$

ここで, 行列 $A_t(\lambda|u, v), B_t(\lambda|v, u)$ は $\{(p, q) \in \mathcal{P}_d \times \mathcal{P}_{d'} \mid p + q = t\}$ をインデックスとして, 次のように定義される.

$$A_t(\lambda|u, v)^{(p,q)}_{(r,s)} := W_{d2}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda + \widehat{p} & \multirow{2}{*}{u} \\ \lambda & \lambda + \widehat{r} & \end{array}\right) W_{d'2}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda + \widehat{p} & \lambda + \widehat{t} & \multirow{2}{*}{v} \\ \lambda + \widehat{r} & \lambda + \widehat{t} & \end{array}\right),$$

$$B_t(\lambda|v,u)^{(p,q)}_{(r,s)} := W_{d'2}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda+\widehat{q} & \\ \lambda & \lambda+\widehat{s} & v \end{array}\right) W_{d2}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda+\widehat{q} & \lambda+\widehat{t} & \\ \lambda+\widehat{s} & \lambda+\widehat{t} & u \end{array}\right).$$

また, 行列 $W_t(\lambda|u-v)$ も同じインデックスで

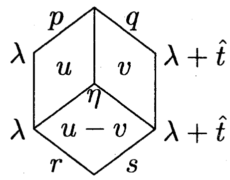
$$W_t(\lambda|u-v)^{(p,q)}_{(r,s)} := W_{dd'}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda+\widehat{p} & \\ \lambda+\widehat{s} & \lambda+\widehat{t} & u-v \end{array}\right).$$

により定義する. すると Yang-Baxter 方程式よりこれらの行列のあいだに次の関係式

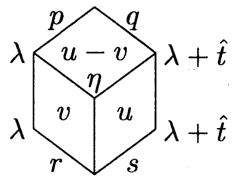
$$W_t(\lambda|u-v)A_t(\lambda|u,v) = B_t(\lambda|v,u)W_t(\lambda|u-v). \tag{14}$$

が成り立つ. 両辺の $(p,q),(r,s)$ 成分を図で表わすと次のようになる.

$$W_t(\lambda|u-v)A_t(\lambda|u,v)^{(p,q)}_{(r,s)} = \sum_{\eta}$$



$$B_t(\lambda|v,u)W_t(\lambda|u-v)^{(p,q)}_{(r,s)} = \sum_{\eta}$$



Inversion relation (7) により, 行列 $W_t(\lambda|u-v)$ は一般の $u,v\in\mathbb{C}$ に対して可逆であることがわかる. よって, 関係 (14) によりすべての $u,v\in\mathbb{C}$ に対して $\operatorname{trace} A_t(\lambda|u,v) = \operatorname{trace} B_t(\lambda|v,u)$ となることがわかり, $M_d(u)M_{d'}(v) = M_{d'}(v)M_d(u)$ が従う.

4.3 $\hbar\to 0$ により得られる微分作用素

定理 1 で得られた差分作用素 $\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}$ の $\hbar$ による展開を計算して, Olshanetsky-Perelomov 系 (楕円函数的 Calogero-Moser 系) との関係について考察する. なお, この subsection ではテータ函数を $[u]$ でなく $\theta(u)$ で表わす.

まず, $\widetilde{M_1}$ を $\hbar$ で展開すると,

$$\widetilde{M_1} = 1 + \hat{M}_1\hbar^2 + O(\hbar^3)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\hat{M}_1 =& \partial_1^2+\partial_2^2 - 2\left(\frac{\theta'(\lambda_1+\lambda_2)}{\theta(\lambda_1+\lambda_2)}+\frac{\theta'(\lambda_1-\lambda_2)}{\theta(\lambda_1-\lambda_2)}\right)\partial_1 - 2\left(\frac{\theta'(\lambda_1+\lambda_2)}{\theta(\lambda_1+\lambda_2)}-\frac{\theta'(\lambda_1-\lambda_2)}{\theta(\lambda_1-\lambda_2)}\right)\partial_2\\ &+2\left(\frac{\theta''(\lambda_1+\lambda_2)}{\theta(\lambda_1+\lambda_2)}+\frac{\theta''(\lambda_1-\lambda_2)}{\theta(\lambda_1-\lambda_2)}\right)\end{aligned}$$

である. いま, $\Delta=\theta(\lambda_1+\lambda_2)\theta(\lambda_1-\lambda_2)$ とおくと,

$$\Delta^{-1}\cdot\hat{M}_1\cdot\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+4(\log\theta)''(\lambda_1-\lambda_2)+4(\log\theta)''(\lambda_1-\lambda_2)$$

となる. $(\log\theta)''$ は, Weierstrass の $\wp$ 函数を用いて $(\log\theta)''(u)=\wp(u)+\mathrm{const.}$ と書けるので, この作用素は Olshanetski-Perelomov, Inozemtsev-Meshcheryakov [IM] [I] によるハミルトニアン

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}(\partial_1^2+\partial_2^2)+g^2\left(\wp(\lambda_1+\lambda_2)+\wp(\lambda_1-\lambda_2)\right)\\&+\sum_{j=1,2}\left(g_0^2\wp(\lambda_j)+g_1^2\wp(\omega_1+\lambda_j)+g_2^2\wp(\omega_2+\lambda_j)+g_3^2\wp(\omega_1+\omega_2+\lambda_j)\right)\end{aligned}$$

で, パラメータを $g=\sqrt{2},\ g_i=0\,(i=0,1,2,3)$ としたものと定数を除いて等しい. ただし, ω_1,ω_2 は $\wp$ 函数の半周期 $\omega_1=1/2,\omega_2=\tau/2$ とした. パラメータ g_i が全て 0 という点では BC 型の作用素というよりはむしろ D 型の作用素といえる.

さらに $\widetilde{M}_2$ を $\hbar$ で展開すると,

$$\widetilde{M}_2=\frac{16}{3}+\left(2\hat{M}_1-\frac{16}{9}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)}\right)\hbar^2+\hat{M}_4\hbar^4+O(\hbar^5)$$

となり, 先程の函数 Δ を用い,

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}\cdot\hat{M}_2\cdot\Delta=&\frac{1}{6}(\partial_1^4+\partial_2^4)+\partial_1^2\partial_2^2\\&+2\{(\log\theta)''(\lambda_1+\lambda_2)+(\log\theta)''(\lambda_1-\lambda_2)\}(\partial_1^2+\partial_2^2)\\&+4\{(\log\theta)''(\lambda_1+\lambda_2)-(\log\theta)''(\lambda_1-\lambda_2)\}\partial_1\partial_2\\&+2\{(\log\theta)'''(\lambda_1+\lambda_2)+(\log\theta)'''(\lambda_1-\lambda_2)\}\partial_1\\&+2\{(\log\theta)'''(\lambda_1+\lambda_2)-(\log\theta)'''(\lambda_1-\lambda_2)\}\partial_2\\&+(0\ \text{階の項})\end{aligned}$$

と表わせる. このようにして可換な微分作用素系 $\{\hat{M}_2,\hat{M}_4\}$ が得られる.

5 Weyl群不変な函数空間

最後に, 定理 1 で得られた作用素がレベル 1 の指標の空間を保つことを示す.

5.1 定理2

双線型形式 $(,)$ により $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ を適宜同一視する. このとき双対ルート格子および双対ウェイト格子は

$$Q^\vee=\bigoplus_{j=1,2}\mathbb{Z}2\varepsilon_j,\quad P^\vee=Q^\vee\oplus\mathbb{Z}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

で与えられる．全ての $\beta \in \mathfrak{h}^*$ と全ての $\mathfrak{h}^*$ 上の函数 f に対して

$$(S_\beta f)(\lambda) := f(\lambda+\beta),$$
$$(S_{\tau\beta} f)(\lambda) := \exp\left[2\pi i\left((\lambda,\beta)+\tau(\beta,\beta)/2\right)\right] f(\lambda+\tau\beta)$$

とおき，Weyl 群不変な (レベル 1 の) テータ函数の空間を次で定める．

$$Th^W := \left\{ f \text{ は } \mathfrak{h}^* \text{上正則な函数} \,\middle|\, \begin{array}{ll} S_{\tau\alpha} f = S_\alpha f = f & (\forall \alpha \in Q^\vee) \\ f(w\lambda) = f(\lambda) & (\forall w \in W) \end{array} \right\}.$$

この空間は 3 次元である [KP].

命題 3 次が成り立つ

1. S_β, $S_{\tau\beta}$ $(\beta \in P^\vee)$ は $\widetilde{M}_d(d=1,2)$ と可換である．
2. Th^W は S_β, $S_{\tau\beta}$ $(\beta \in P^\vee)$ で不変である．

1. の証明は，作用素 M_d の係数の $\lambda \to \lambda+\beta$, $\lambda \to \lambda + \tau\beta$ による変換性を調べればわかる．その際，テータ函数の変換性

$$[u+m] = (-1)^m[u], \quad [u+m\tau] = (-1)^m e^{-\pi i m^2\tau - 2\pi i m u}[u] \quad (m \in \mathbb{Z})$$

を用いる．また，2. については $\mathfrak{h}^*$ の双線形形式 (,) の Weyl 群不変性と，$S_\beta, S_{\tau\beta}$ の関係式

$$S_\beta S_\gamma = S_\gamma S_\beta, \quad S_{\tau\beta} S_{\tau\gamma} = S_{\tau\gamma} S_{\tau\beta}, \quad S_\gamma S_{\tau\beta} = e^{2\pi i(\gamma,\beta)} S_{\tau\beta} S_\gamma$$

$(\gamma, \beta, \in \mathfrak{h}^*)$ を利用する．詳しくは [HIK] を参照されたい．

定理 2 差分作用素 $\widetilde{M}_d(d=1,2)$ は Th^W を保つ．

A 型 Lie 環の場合，これに対応する結果は [H2], [H3] にある．

5.2 定理 2 の証明

$\mathfrak{h}^*$ 上の有理型関数 f が $S_{\tau\alpha} f = S_\alpha f = f$ $(\forall \alpha \in Q^\vee)$ を満たすならば，命題 (1) より $\widetilde{M}_d f$ も同じ性質を満たす．また，f が Weyl 群不変ならば $\widetilde{M}_d f$ が W 不変であることは $\widetilde{M}_d$ の形より明白である．従って $f \in Th^W$ と仮定して $\widetilde{M}_d f$ が正則であることを示せばよい．

一般に $\mu \in \mathfrak{h}^*, c \in \mathbb{C}$ に対し $D_\mu^c := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda,\mu) + c = 0\}$ とおき，

$$D := \bigcup_{p \in R_+} D_p^0 \cup \bigcup_{q \in \mathcal{P}_2 - \{0\}} D_q^\hbar$$

と定める．ただし，ここに R_+ は任意に選んだ正のルートの集合である．差分作用素の係数は $D + P^\vee + \tau P^\vee$ の各既約成分に沿って高々一位の極を持ち，それ以外では正則であることがわかる．

f の正則性と W 不変性から $D_p^0(p \in R_+)$ において $\widetilde{M}_d f$ が正則であることが次のようにして従う. $\mathcal{D} := [\lambda_1 - \lambda_2][\lambda_1 + \lambda_2][2\lambda_1][2\lambda_2]$ とおくと, $\mathcal{D}\widetilde{M}_d f$ は W 反不変な正則函数であるので D_p^0 において零点を持つ.

$D_q^\hbar(q \in \mathcal{P}_2 - \{0\})$ における正則性を示すには W 対称性より $D' := D_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}^\hbar = \{\lambda_1+\lambda_2+\hbar = 0\}$ での正則性をみれば十分である. 係数が D' に極を持つのは $\widetilde{M}_2$ の $T_{\widehat{\varepsilon}_1+\widehat{\varepsilon}_2}$ と 0 階の項である. ここで一般に f を W 不変な函数とするとき, $(T_{\widehat{\varepsilon}_1+\widehat{\varepsilon}_2} f - f)|_{D'} = 0$ であることに注意する. したがってあとは, T_1T_2 の係数と 0 階の項の D' におけるそれぞれの留数の和が消えることを示せばよい. この留数は簡単な計算で消えていることがわかる.

次に $\beta, \gamma \in P^\vee$ とする. $S_{\tau\beta}, S_\gamma$ の定義と命題 (1) より,

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_d f(\lambda + \beta\tau + \gamma) &= e^{-2\pi i((\lambda,\beta)+(\beta,\beta)\tau/2)} S_{\tau\beta} S_\gamma \widetilde{M}_d f(\lambda) \\ &= e^{-2\pi i((\lambda,\beta)+(\beta,\beta)\tau/2)} \widetilde{M}_d S_{\tau\beta} S_\gamma f(\lambda)\end{aligned}$$

が成り立つ. 命題 (2) により $S_{\tau\beta} S_\gamma f \in Th^W$ であるから, 上に示したことから $\widetilde{M}_d S_{\tau\beta} S_\gamma f$ は D において正則. 従って $\widetilde{M}_d f$ は $D + \beta\tau + \gamma$ において正則であることがわかる.

参考文献

[重点] 重点領域研究 231「無限可積分系」レクチャーノート No.13「幾何学的ラングランズ予想とその周辺」(1997)

[Be] A.A.Belavin, “Dynamical symmetry of integrable quantum systems”, Nucl. Phys. B180 [FS2] 189-200 (1981).

[BeDr] Belavin, A. A.; Drinfeld, V. G. “The classical Yang- Baxter equation for simple Lie algebras. ” Funktsional. Anal. i Prilozhen. **17** no. 3, (1983) 69–70.

[Ch] Cherednik, Ivan “Double affine Hecke algebras and Macdonald’s conjectures”, Ann. of Math. (2) **141**, no. 1, 191–216 (1995).

[vD] J.F.van Diejen, “Integrability of difference Calogero-Moser systems”, J. Math. Phys. **35** (1994), 2983-3004.

[E] B.Enriquez, “Quantum currents realization of the elliptic quantum group $E_{\tau,\eta}(sl_2)$”, q-alg/9709014.

[EK] P.I.Etingof and A.A.Kirillov Jr., “Macdonald’s polynomials and representations of quantum groups”, Math. Res. Lett. **1** (1994), 279-296.

[EFK] P.I.Etingof, I.B.Frenkel and A.A.Kirillov Jr., “Lectures on representation theory and Kniznik-Zamolodchikov equations”, AMS Mathematical Surveys and Monographs 58, 1998.

[ER] Enriquez, B.; Rubtsov, V. Hitchin systems, higher Gaudin operators and R-matrices. Math. Res. Lett. 3 (1996), no. 3, 343–357.

[Fe1] Felder, Giovanni "The KZB equations on Riemann surfaces." Symitries quantiques (Les Houches, 1995), 687–725, North-Holland, Amsterdam, 1998.

[Fe2] G.Felder, "Elliptic quantum groups", Proceedings of the International Congress of Mathematical Physics, Paris 1994, 211-218, International Press 1995.

[FV] Felder, Giovanni; Varchenko, Alexander "Elliptic quantum groups and Ruijsenaars models." J. Statist. Phys. 89 (1997), no. 5-6, 963–980. 82Bxx (17Bxx 81Rxx)

[GN] A.Gorsky and N.Nekrasov, "Relativistic Calogero-Moser model as gauged WZW theory." Nuclear Phys. B 436 (1995), no. 3, 582–608.

[H1] K.Hasegawa, "On the crossing symmetry of the elliptic solution of the Yang-Baxter equation and a new L operator for Belavin's solution", J.Phys. A: Math. Gen. **26** (1993), 3211-3228.

[H2] K. Hasegawa, " L-operator for Belavin's R-matrix acting on the space of theta functions", J.Math.Phys. **35**(11), (1994), 6158-6171.

[H3] K.Hasegawa "Ruijsenaars' Commuting difference operators as commuting transfer matrices", Commun. Math. Phys. **187** (1997), 289-325.

[HIK] K.Hasegawa, T.Ikeda, T.Kikuchi, "Commuting difference operators arising from the elliptic $C_2^{(1)}$-face model", preprint mathQA/9810062.

[IM] V.I.Inozemtsev, D.V.Meshcheryakov, "Extension of the class of integrable dynamical systems connected with semisimple Lie algebras" Lett. Math. Phys. **9** (1985), 13-18.

[I] V.I.Inozemtsev, "Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems", Lett. Math. Phys. **17** (1989), 11-17.

[JKMO] M.Jimbo, A.Kuniba, T.Miwa and M.Okado, "The $A_n^{(1)}$ Face Models", Comm. Math. Phys. **119** (1988), 543-565.

[JKOS] M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, J. Shiraishi, "Quasi-Hopf twistors for elliptic quantum groups", q-alg/9712029

[JMO] M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, "Solvable lattice models related to the vector representation of classical simple Lie algebras", Commun. Math. Phys. **116** (1988), 507-525.

[KP] V.G.Kac and D.H.Peterson "Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions nad modular forms", Adv. in Math. **53** (1984), 125-264

[KH1] Y. Komori, K. Hikami, "Quantum integrability of the generalized elliptic Ruijsenaars models", J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 4341-4364 (1997).

[KH2] Y. Komori, K. Hikami, "Conserved operators of the generalized elliptic Ruijsenaars models", J. Math. Phys. **39** (11) (1998) 6175-6190 .

[K] T.H.Koornwinder, "Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC", Contemp.Math. **138** (1992), pp189-204.

[M] I.G.Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*(2nd ed.), Oxford Univ. Press (1995).

[Ne] N.Nekrasov, "Holomorphic bundles and many-body systems", Comm. Math. Phys. 180 (1996), no. 3, 587–603.

[OP] M.A.Olshanetsky and A.M.Perelomov, "Completely integrable Hamiltonian systems connected with semi-simple Lie algebras", Inv. Math. (1976) 93-108.

[R] S.N.M.Ruijsenaars, "Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities", Comm.Math.Phys. **110** (1987), pp191-213.

[S] E.K.Sklyanin, "Some algebraic structure connected with the Yang-Baxter equation (II)", Funct. Anal. and Appl. (Engl. transl.) **17**, 273-284 (1983).