数理解析研究所講究録
1082巻 1999年 62-73

実代数群の巾零軌道の誘導と旗多様体上の K 軌道の閉包

東京電機大学 工学部　　太田琢也

§0. 設定と問題

本稿を通して以下の記号を用いる。G を $\mathbb{R}$ 上定義された連結簡約複素代数群、$\tau : G \to G$ を複素共役、$G(\mathbb{R}) = \{g \in G; \tau(g) = g\}$ を τ が定める G の実型、$\theta : G \to G$ を τ と可換な（複素化された）Cartan 対合とし、$K := \{g \in G; \theta(g) = g\}$ とおく。G の閉部分群の Lie 環は対応する小文字のドイツ文字で表し、τ、θ が定める $Lie(G) = \mathfrak{g}$ の対合をも τ、θ で表す。$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ を θ に関する Cartan 分解とする。τ-stable な G または $\mathfrak{g}$ の部分集合 A に対して $A(\mathbb{R}) = \{x \in A; \tau(x) = x\}$ とおく。G の $\mathfrak{g}$ への作用は、いつも adjoint action を考える。$\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環たちの成す variety（旗多様体）とし $\pi : T^*\mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}^*$ を moment map とする。$<,>$ は $\mathfrak{g}$ 上の G-不変な双一次形式で $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{s}$ は $<,>$ に関して直交し、かつ $<,>|_{\mathfrak{k}(\mathbb{R})}$ は負定値、$<,>|_{\mathfrak{s}(\mathbb{R})}$ は正定値であるものとし、$<,>$ による同一視 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ により π を $\pi : T^*\mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ と見ておく。

H を θ-stable かつ τ-stable な G の極大トーラス、$Q = LU$ は G の θ-stable な放物型部分群であって、θ-stable かつ τ-stable な Levi factor L、及び unipotent radical U をもつもの、B_L を H を含む L の split Borel 部分群 (ie. $\theta(B_L) = B_L^-$: opposito Borel) とし、B を $B = B_L U$ により定まる G の Borel 部分群とする。このとき四つ組 (set of θ-stable data for $G(\mathbb{R})$) $(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu)$ 及び B_L に対して標準 ($\mathfrak{g}$,K) 加群

$$X = X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu) = \left(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})} \left(Ind_{B_L(\mathbb{R})}^{L(\mathbb{R})}(\delta \otimes \nu)\right) = \left(\mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})} ((\delta \otimes \nu) \otimes (\mathrm{twist}))$$

が定義される。ここに $Ind_{B_L(\mathbb{R})}^{L(\mathbb{R})}$ は実放物型部分群による parabolic induction 、$\left(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})}$ は θ-stable な放物型部分環による cohomological parabolic induction である。また、$\delta \otimes \nu$ は $H(\mathbb{R})$ のある条件を満たす指標、$\otimes$(twist) はある指標による twist である。詳細については Vogan[V] を参照されたい。本稿では、このようにして得られる B (resp. $\mathfrak{b}$) を標準 ($\mathfrak{g}$,K) 加群に対応する Borel 部分群 (resp. 部分環) と呼ぶことにする。

このとき、[O2] により $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ の（巾零）$H \cap K$ 軌道 $\{0\} \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ から $\mathfrak{b}_L$ 及び $\mathfrak{q}$ による巾零軌道の誘導を合成することにより、$\mathfrak{s}$ の巾零 K 軌道の集合

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{b}} := Ind^{\theta}((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}) \circ Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_L) \uparrow \mathfrak{l})(\{0\})$$

が定まる。本稿では標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群に対応する $\mathfrak{b}\in\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ の K 軌道の閉包 $\overline{K\cdot\mathfrak{b}}\subset\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ と $\mathcal{I}_{\mathfrak{b}}$ 及び X の associated variety の関係について考察する。

§1. 巾零軌道の誘導

$\mathfrak{s}$ の巾零元の集合を $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ で表し、$\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ の $\mathfrak{g}$-principal(i.e. $\mathfrak{g}$ で regular) な元の全体を $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}$ で表す。また、$\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ の K 軌道の全体を $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$ で表す。

Remark 1.1. [AV] により $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}\neq\emptyset$ であるための必要十分条件は $\mathfrak{g}$ が quasisplit (i.e. $\mathbb{R}$ 上定義された $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環が存在する) であることが知られている。

$\mathfrak{l}=Lie(L)$, $\mathfrak{s}_L:=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{s}$, $K_L=L\cap K$ とおく。

Definition 1.2 $\mathcal{O}\in\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ に対して $(\mathcal{O}+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s})\cap\tilde{\mathcal{O}}$ が $\mathcal{O}+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s}$ で open dense となる $\tilde{\mathcal{O}}\in\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$ が唯 1 つ存在する。これを $\tilde{\mathcal{O}}=Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{O})$ と表す。これにより写像

$$Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right):\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/K_L\to\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$$

が定まる。この写像による $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}$ の $\mathfrak{l}$-principal な K_L 軌道たちの像を $\mathcal{I}_{\mathfrak{b}}$ とかく：

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{b}}=Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)\left(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L\right)$$

Remark 1.3. ([O2]) $P=MN$ を θ-stable かつ τ-stable な Levi factor M、unipotent radical N をもつ τ-stable な G の放物型部分群とする。$\mathcal{O}_M\in\mathcal{N}_{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s}}/M\cap K$ に対しても巾零 K 軌道の集合

$$Ind^{\mathbb{R}}\left((\mathfrak{m},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{O}_M)\subset\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$$

が定まる。P が Borel 部分群のときは

$$Ind^{\mathbb{R}}\left((\mathfrak{m},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\{0\})=\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K$$

従って、この記号を用いると上の $\mathcal{I}_{\mathfrak{b}}$ は

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{b}} = Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)\left(Ind^{\mathbb{R}}\left((\mathfrak{h},\mathfrak{b}_L)\uparrow\mathfrak{l}\right)(\{0\})\right)$$

ともかける。

$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート系を $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ で表し、虚ルートたちの成す部分系を $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ で表す。また、$\mathfrak{u}$ に含まれる虚ルートたちの集合を $R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ で表す:

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}} = \{\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h});\theta(\alpha)=\alpha\},\ R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}} = \{\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}};\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{u}\}$$

ここに、$\mathfrak{g}_\alpha$ はルート $\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対するルート空間である。仮定 $\theta(B_L)=B_L^-$ より $R(\mathfrak{l},\mathfrak{h})$ は虚ルートをもたないから $R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ は $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系を成す。このとき、§0 の標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群 X の associated variety $Ass(X)\subset\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ (同一視 $\mathfrak{g}^*\simeq\mathfrak{g}$ による) に関して次が成り立つ。

Theorem 1.4. (i) ([AV]) 標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群 X において $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系 $R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ が large type、即ち任意の単純ルートが非コンパクト (i.e. $\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{s}$) ならば $Ass(X)$ に含まれる $\mathfrak{g}$-principal な K 軌道の集合 $Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K$ と $\mathcal{I}_{\mathfrak{b}^-}$ の $\mathfrak{g}$-principal な K 軌道の集合 $[\mathcal{I}_{\mathfrak{b}^-}]^{\mathfrak{g}-pr}$ は一致する：

$$Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K = [\mathcal{I}_{\mathfrak{b}^-}]^{\mathfrak{g}-pr}...(*)$$

ここに $\mathcal{I}_{\mathfrak{b}^-} = Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}^-)\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L)$ である。

(ii) ([Y]) $G(\mathbb{R})$ が連結かつ半単純、$H(\mathbb{R})$ がコンパクトのとき、$\mathfrak{b}=\mathfrak{q}$、$\mathfrak{h}=\mathfrak{l}$、かつ $X=\left(\mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})}(\delta)$ は discrete series となる。このとき $\mathcal{I}_{\mathfrak{b}^-}=\{Ind^{\theta}\left((\mathfrak{h},\mathfrak{b}^-)\uparrow\mathfrak{g}\right)(\{0\})\}$ (1つの K 軌道) であって次が成り立つ。

$$Ass(X)=\overline{Ind^{\theta}\left((\mathfrak{h},\mathfrak{b}^-)\uparrow\mathfrak{g}\right)(\{0\})}.$$

Remark 1.5. (i) で $\mathfrak{g}$ が quasisplit でなければ $(*)$ の両辺は空集合となる。

Theorem 1.4 により次のことが成り立つのではないかと予想される。

Conjecture 1.6. $Ass(X) = \cup_{\mathcal{O}\in\mathcal{I}_{\mathfrak{b}}}\overline{\mathcal{O}}$

§2. 巾零軌道の誘導と旗多様体の K 軌道の閉包

$\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環たちの成す variety （旗多様体）とする。

Definition 2.1. ([AV]) $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ を θ-stable な Borel 部分環、$\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{b}_1$ を θ-stable な Cartan 部分環 とする。$\mathfrak{b}_1$ に含まれるルートの成す $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$ の正系 $R(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{h}_1)$ の単純ルートが complex なルート (i.e. $\theta(\alpha) \neq \pm\alpha$)、または非コンパクトな虚ルート (i.e. $\theta(\alpha) = \alpha$ かつ $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{s}$) であるとき、large type であるという。$\mathfrak{g}$ の large type の θ-stable な Borel 部分環の集合を $\mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}$ で表す。

Remark 2.2. (i) ([AV]) 次の (a)-(c) は同値である。

(a) $\mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}} \neq \emptyset$

(b) $\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}} \neq \emptyset$

(c) $\mathfrak{g}$ が quasisplit.

特に §0 の Levi 部分群 L は条件 $\theta(B_L) = B_L^-$ より quasisplit、従って $\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L} \neq \emptyset$ である。

(ii) $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}$ に対して $\mathfrak{b}_1 \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ となる $\mathcal{O} \in \mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K$ が唯 1 つ存在する。これが全単射

$$\mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}/K \simeq \mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K,\ (K\cdot\mathfrak{b}_1 \leftrightarrow \mathcal{O}_1)$$

を定める (cf. [O2])。

$\pi : T^*\mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ を moment map とする。

Remark 2.3.([BB]) $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ の K 軌道 $K\cdot\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}/K$ に対して余法束 $T^*_{K\cdot\mathfrak{b}_1}\mathcal{B}$ の π による像は次のようにかける。

$$\pi(T^*_{K\cdot\mathfrak{b}_1}\mathcal{B}) = K(\mathfrak{b}_1^{\perp} \cap \mathfrak{s})$$

ここに

$$\mathfrak{b}_1^{\perp} := \{\lambda \in \mathfrak{g}^*; \lambda(\mathfrak{b}_1) = \{0\}\} = \{x \in \mathfrak{g}; < x, \mathfrak{b}_1 >= \{0\}\} = (\text{nilpotent radical of } \mathfrak{b}_1)$$

である。

本稿の主定理は次のもである。

Theorem 2.4. §0 の $H, Q = LU, B = B_L U$ に対して

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{b}} = Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l}, \mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L)$$

とおく。$\mathfrak{b}$ の $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ における K 軌道の閉包に含まれる K 軌道の集合を $\overline{K \cdot \mathfrak{b}}/K \subset \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}/K$ とかくとき、次が成り立つ。

$$\pi(\cup_{Y \in \overline{K \cdot \mathfrak{b}}/K} T_Y^* \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}) = \cup_{\mathcal{O} \in \mathcal{I}_{\mathfrak{b}}} \overline{\mathcal{O}}.$$

この定理は松木氏の次の結果と、それに続く 2 つの補題を用いて証明される。

Proposition 2.5. (松木) Theorem 2.4 の $\mathfrak{b}$ に対して次が成り立つ。

$$\overline{K \cdot \mathfrak{b}} = K \cdot \{g \cdot \mathfrak{b}; g \in L\} = K \cdot \{\mathfrak{b}_L^1 + \mathfrak{u}; \mathfrak{b}_L^1 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{l}}\} \supset K \cdot \{\mathfrak{b}_L^0 + \mathfrak{u}; \mathfrak{b}_L^0 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{l}}^L\}$$

Proof. [M] により $(L \cap K)B_L \subset L$ は L で open dense:

$$\overline{(L \cap K)B_L} = L.$$

G の中で

$$\overline{KB} \supset K\overline{(L \cap K)B_L}U = KLU = KQ \supset KB$$

KQ は closed より $\overline{KB} = KQ$. $p : G \to \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ を $p(g) = g \cdot \mathfrak{b}$ により定めると、p が閉写像であることを用いて

$$\overline{K \cdot \mathfrak{b}} = \overline{K \cdot p(B)} = p(\overline{KB}) = p(KQ) = KQ \cdot \mathfrak{b} = KL \cdot \mathfrak{b} = K \cdot \{g \cdot \mathfrak{b}; g \in L\}$$

q.e.d.

この証明は松木敏彦氏に教えて頂きました。松木氏に感謝します。

Lemma 2.6. $\mathfrak{b}_L^1 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{l}}^L$ を $\mathfrak{l}$ の large type の θ-stable な Borel 部分環とし、全単射

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{l}}^L/K_L \simeq \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L$$

により $K_L\cdot\mathfrak{b}_L^1 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{l}}^L/K_L$ に対応する巾零 K_L 軌道を $\mathcal{O}_L^1 \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L$ とする (i.e. $\mathfrak{b}_L^1 \cap \mathcal{O}_L^1 \neq \emptyset$)。$\mathfrak{b}^1 := \mathfrak{b}_L^1 + \mathfrak{u} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ とおけば、次が成り立つ。

$$\overline{\pi(T^*_{K\cdot\mathfrak{b}^1}\mathcal{B}_{\mathfrak{g}})} = \overline{Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{O}_L^1)}$$

Proof. $\mathfrak{b}^1$, $\mathfrak{b}_L^1$ の nilpotent radical をそれぞれ $(\mathfrak{b}^1)^\perp$, $(\mathfrak{b}_L^1)^\perp$ とかく。Remark 2.3 より

$$\pi(T^*_{K\cdot\mathfrak{b}^1}\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}) = K\cdot\{(\mathfrak{b}^1)^\perp\cap\mathfrak{s}\} = K\cdot\{(\mathfrak{b}_L^1)^\perp\cap\mathfrak{s}+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s}\}$$

$$\supset K_L\cdot\{(\mathfrak{b}_L^1)^\perp\cap\mathfrak{s}+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s}\} = K_L\cdot\{(\mathfrak{b}_L^1)^\perp\cap\mathfrak{s}\}+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s}\supset\mathcal{O}_L^1+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s}.$$

$\mathcal{O}^1 = Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{O}_L^1)$ とかくとき、$\mathcal{O}^1\cap(\mathcal{O}_L^1+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s})\neq\emptyset$ より $\pi(T^*_{K\cdot\mathfrak{b}^1}\mathcal{B}_{\mathfrak{g}})\supset\mathcal{O}^1$. よって

$$\overline{\pi(T^*_{K\cdot\mathfrak{b}^1}\mathcal{B}_{\mathfrak{g}})}\supset\overline{\mathcal{O}^1}.$$

次に $\mathcal{O}_L^1$ は $\mathfrak{l}$-principal より $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}$ の開 K_L 軌道である。よって $\mathcal{O}_L^1\cap\{(\mathfrak{b}_L^1)^\perp\cap\mathfrak{s}\}\neq\emptyset$ は $(\mathfrak{b}_L^1)^\perp\cap\mathfrak{s}$ の開集合である。従って $(\mathfrak{b}_L^1)^\perp\cap\mathfrak{s}\subset\overline{\mathcal{O}_L^1}$ かつ

$$(\mathfrak{b}^1)^\perp\cap\mathfrak{s} = (\mathfrak{b}_L^1)^\perp\cap\mathfrak{s}+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s}\subset\overline{\mathcal{O}_L^1}+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s} = \overline{(\mathcal{O}_L^1+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s})}$$

である。$\mathcal{O}^1\cap(\mathcal{O}_L^1+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s})\neq\emptyset$ が $\mathcal{O}_L^1+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s}$ で open dense であることから $\overline{(\mathcal{O}_L^1+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s})}\subset\overline{\mathcal{O}^1}$.
従って

$$\pi(T^*_{K\cdot\mathfrak{b}^1}\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}) = K\cdot\{(\mathfrak{b}^1)^\perp\cap\mathfrak{s}\}\subset K\cdot\overline{(\mathcal{O}_L^1+\mathfrak{u}\cap\mathfrak{s})}\subset\overline{\mathcal{O}^1}.$$

q.e.d.

Lemma 2.7. $\mathfrak{b}$ の K 軌道の閉包に含まれる任意の K 軌道 $Y\subset\overline{K\cdot\mathfrak{b}}$ に対して代表 $\mathfrak{b}^1 = \mathfrak{b}_L^1+\mathfrak{u}\in Y$ ($\mathfrak{b}_L^1\in\mathcal{B}_{\mathfrak{l}}$) をとる (cf. Proposition 2.5)。$(\mathfrak{b}_L^1)^\perp\cap\mathfrak{s}$ ($\subset\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}$) が既約であることと

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L} = \cup_{\mathcal{O}_L\in\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L}\overline{\mathcal{O}_L}$$

([KR]) により $\mathcal{O}_L \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L$ で $(\mathfrak{b}_L^1)^\perp \cap \mathfrak{s} \subset \overline{\mathcal{O}_L}$ となるものが存在する。このとき次が成り立つ。

$$\pi(T_Y^*\mathcal{B}_\mathfrak{g}) = \pi(T_{K\cdot\mathfrak{b}^1}^*\mathcal{B}_\mathfrak{g}) \subset \overline{Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{O}_L)}$$

Proof. $\pi(T_{K\cdot\mathfrak{b}^1}^*\mathcal{B}_\mathfrak{g}) = K\cdot\{(\mathfrak{b}_L^1)^\perp \cap \mathfrak{s} + \mathfrak{u}\cap\mathfrak{s}\} \subset K\cdot(\overline{\mathcal{O}_L} + \mathfrak{u}\cap\mathfrak{s})$
であるが $\mathcal{O} := Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{O}_L)$ とかけば $\mathcal{O}\cap(\mathcal{O}_L + \mathfrak{u}\cap\mathfrak{s})$ は $\mathcal{O}_L + \mathfrak{u}\cap\mathfrak{s}$ で open dense だから

$$\overline{\mathcal{O}_L} + \mathfrak{u}\cap\mathfrak{s} = \overline{(\mathcal{O}_L + \mathfrak{u}\cap\mathfrak{s})} \subset \overline{\mathcal{O}}$$

よって

$$\pi(T_{K\cdot\mathfrak{b}^1}^*\mathcal{B}_\mathfrak{g}) \subset \overline{\mathcal{O}} = \overline{Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{O}_L)}.$$

q.e.d.

Theorem 2.4 の証明. 任意の K 軌道 $Y = K\cdot\mathfrak{b}^1 \in \overline{K\cdot\mathfrak{b}}/K$ $(\mathfrak{b}^1 \in \mathcal{B}_\mathfrak{g})$ に対して Lemma 2.7 より $\pi(T_Y^*\mathcal{B}_\mathfrak{g}) \subset \overline{Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{O}_L)}$ となる $\mathcal{O}_L \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L$ が存在する。これより

$$\pi(\cup_{Y\in\overline{K\cdot\mathfrak{b}}/K} T_Y^*\mathcal{B}_\mathfrak{g}) \subset \cup_{\mathcal{O}\in\mathcal{I}_\mathfrak{b}}\overline{\mathcal{O}}.$$

次に $p: T^*\mathcal{B}_\mathfrak{g} \to \mathcal{B}_\mathfrak{g}$ を 射影とすると

$$\cup_{Y\in\overline{K\cdot\mathfrak{b}}/K} T_Y^*\mathcal{B}_\mathfrak{g} = \pi^{-1}(\mathfrak{s}) \cap p^{-1}(\overline{K\cdot\mathfrak{b}})$$

は閉集合、π は proper より $\pi(\cup_{Y\in\overline{K\cdot\mathfrak{b}}/K} T_Y^*\mathcal{B}_\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{s}$ の閉集合である。

$$\mathcal{Z} := K\cdot\{\mathfrak{b}_L^0 + \mathfrak{u}; \mathfrak{b}_L^0 \in \mathcal{B}_\mathfrak{l}^L\} \subset \mathcal{B}_\mathfrak{g}/K$$

とおけば Proposition 2.5 より $\mathcal{Z} \subset \overline{K\cdot\mathfrak{b}}/K$ であるから

$$\pi(\cup_{Y\in\overline{K\cdot\mathfrak{b}}/K} T_Y^*\mathcal{B}_\mathfrak{g}) \supset \cup_{Z\in\mathcal{Z}}\pi(T_Z^*\mathcal{B}_\mathfrak{g})$$

. Lemma 2.6 により

$$\cup_{Z\in\mathcal{Z}}\overline{\pi(T_Z^*\mathcal{B}_\mathfrak{g})} = \cup_{\mathcal{O}_L\in\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L}\overline{Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{O}_L)} = \cup_{\mathcal{O}\in\mathcal{I}_\mathfrak{b}}\overline{\mathcal{O}}.$$

従って

$$\pi(\cup_{Y\in\overline{K\cdot\mathfrak{b}/K}}T^*_Y\mathcal{B}_\mathfrak{g})=\cup_{\mathcal{O}\in\mathcal{I}_\mathfrak{b}}\overline{\mathcal{O}}$$

q.e.d.

§3. (AIII) 型の場合における $\mathcal{I}_\mathfrak{b}$ の記述

ここでは (AIII) 型の場合に、標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群に対応する任意の Borel 部分環 $\mathfrak{b}\in\mathcal{B}_\mathfrak{g}$ について、$\mathcal{I}_\mathfrak{b}$ の記述を証明抜きで与える。

◇ ab 図形

有限次元複素ベクトル空間 V と、その対合 s_V の対 (V,s_V) を対合付きベクトル空間と呼ぶことにする。(V,s_V) に対して次のようにおく。

$$V^a:=\{v\in V;s_Vv=v\}\ ,V^b:=\{v\in V;s_Vv=-v\}$$

$$K(V):=\{g\in GL(V);s_Vgs_V^{-1}=g\}\simeq GL(V^a)\times GL(V^b)$$

$$\mathfrak{s}(V):=\{X\in\mathfrak{gl}(V);s_VXs_V^{-1}=-X\}\simeq Hom(V^a,V^b)\times Hom(V^b,V^a)$$

とおく。

$m=\dim V^a$, $n=\dim V^b$ のとき $(GL(V),K(V))$ は $(GL(m+n,\mathbb{C}),GL(m,\mathbb{C})\times GL(n,\mathbb{C}))$ $(\leftrightarrow U(m,n))$ と同型な対称対となる。

ヤング図形の 箱 □ の代りに a または b を置き、横には a と b が交互に並ぶようにした図形を ab 図形という。a の個数が p 個、b の個数が q 個の ab 図形の集合を $D(p,q)$ で表す。ab 図形 η の a (resp. b) の個数を $n_a(\eta)$ (resp. $n_b(\eta)$) で表す。また、η の第 1 列を除いて得られる ab 図形を η' とし $\eta^{(j)}$ を $\eta^{(j)}:=\{\eta^{(j-1)}\}'$ により定める。

Definition 3.1. $\eta,\mu\in D(p,q)$ に対して

$$\eta\geq\mu\ \Leftrightarrow_{\rm def}\ n_a(\eta^{(j)})\geq n_a(\mu^{(j)}),\ n_b(\eta^{(j)})\geq n_b(\mu^{(j)})\ (j=0,1,2,....)$$

と置くことにより、$\geq$ は $D(p,q)$ の順序を定める。

Proposition 3.2. (i) $\mathfrak{s}(V)$ の巾零 $K(V)$ 軌道の集合は $D(\dim V^a, \dim V^b)$ により分類される：

$$D(\dim V^a, \dim V^b) \simeq \mathcal{N}_{\mathfrak{s}(V)}/K(V) \ (\eta \leftrightarrow \mathcal{O}_\eta)$$

(ii) ([O1]) $\eta, \mu \in D(\dim V^a, \dim V^b)$ に対して

$$\eta \geq \mu \ \Leftrightarrow \ \overline{\mathcal{O}_\eta} \supset \mathcal{O}_\mu$$

が成り立つ。

◇ ab **図形の積** $*$

(U, s_U), (V, s_V) を対合付きベクトル空間とする。

$$s_{U\oplus V} := \begin{pmatrix} s_U & 0 \\ 0 & s_V \end{pmatrix}$$

と置くことにより $(U \oplus V, s_{U\oplus V})$ も対合付きベクトル空間となる。

$$\theta(g) = s_{U\oplus V} g s_{U\oplus V}^{-1} \ (g \in GL(U \oplus V))$$

は対称対 $(GL(U \oplus V), \theta)$ を定める。

$$\mathfrak{q} := \mathfrak{gl}(U) \oplus \mathfrak{gl}(V) \oplus Hom(U, V)$$

は $\mathfrak{gl}(U \oplus V)$ の θ-stable な放物型部分環であり、

$$\mathfrak{l} := \mathfrak{gl}(U) \oplus \mathfrak{gl}(V)$$

は、その θ-stable な Levi factor である。

Definition 3.3. ab 図形 $\eta \in D(\dim U^a, \dim U^b)$, $\mu \in D(\dim V^a, \dim V^b)$ は $\mathfrak{s}_L := \mathfrak{s}(U) \oplus \mathfrak{s}(V)$ の巾零 $K(U) \times K(V)$ 軌道

$$\mathcal{O}_\eta \times \mathcal{O}_\mu \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/(K(U) \times K(V)) = \mathcal{N}_{\mathfrak{s}(U)}/K(U) \times \mathcal{N}_{\mathfrak{s}(V)}/K(V)$$

を定める。このとき ab 図形 $\eta * \mu \in D(\dim(U \oplus V)^a, \dim(U \oplus V)^b)$ を

$$\mathcal{O}_{\eta*\mu} = Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{gl}(U \oplus V)\right)(\mathcal{O}_\eta \times \mathcal{O}_\mu)$$

により定める。

Proposition 3.4. 上の積 $*$ に関して結合律

$$(\eta * \mu) * \nu = \eta * (\mu * \nu)$$

が成り立つ。

Remark 3.5. ab 図形 η に対して $a * \eta$ (resp. $b * \eta$) は η の b で (resp. a で) 始まる最長の行の初めに a (resp. b) を加えて得られる ab 図形に一致する。また、$\eta * a$ (resp. $\eta * b$) は η の b で (resp. a で) 終わる最長の行の終わりに a (resp. b) を加えて得られる ab 図形に一致する。これにより ν が 1 つの行から成る ab 図形のときは、Proposition 3.4 を用いて $\nu * \eta, \eta * \nu$ が計算できる。

Example. $a * \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & \end{pmatrix} = \begin{matrix} a & b & a & b \\ a & b & & \end{matrix}$, $b * \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & \end{pmatrix} = \begin{matrix} b & a & b \\ b & a & b \end{matrix}$,
$\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & \end{pmatrix} * b = \begin{matrix} b & a & b \\ a & b & \\ b & & \end{matrix}$.

◇ $\mathcal{I}_{\mathfrak{b}} = Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L)$ の記述

$m \geq n \geq \ell \geq 0$ として、$m' = m - \ell, n' = n - \ell$, $G = GL(m+n, \mathbb{C})$ とおく。

$$S = \begin{pmatrix} 1_{m'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_{n'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_\ell \\ 0 & 0 & 1_\ell & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta(g) = SgS^{-1}\ (g \in G)$$

とおくと、対称対 (G, θ) に対応する実型 $G(\mathbb{R})$ は $U(m,n)$ に同型となる。$\mathfrak{gl}(m+n, \mathbb{C})$ の対角行列

$$t = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_{m'}, b_1, ..., b_{n'}, c_1^+, ..., c_\ell^+, c_1^-, ..., c_\ell^-)$$

の全体 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(m+n,\mathbb{C})$ の Cartan 部分環となる。$\mathfrak{h}$ のウエイト $\lambda_i,\mu_i,\epsilon_i^+,\epsilon_i^-\in\mathfrak{h}^*$ を

$$\lambda_i(t)=a_i,\mu_i(t)=b_i,\epsilon_i^+(t)=c_i^+,\epsilon_i^-(t)=c_i^-$$

により定めると

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}^c=\{\lambda_i-\lambda_j,\ \mu_i-\mu_j\}\ \ \text{: compact imaginary roots}$$

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}^n=\{\pm(\lambda_i-\mu_j)\}\ \ \text{: non}-\text{compact imaginary roots}$$

となる。

$\{\lambda_1,...,\lambda_{m'},\mu_1,...,\mu_{n'}\}$ の順列全体の集合を $\mathcal{P}(\{\lambda_i,\mu_j\})$ とかく。$\nu=(\nu_1,\nu_2,....,\nu_{m'+n'})\in\mathcal{P}(\{\lambda_i,\mu_j\})$ に対して

$$\Sigma_\nu:=\{\nu_i-\nu_{i+1};1\le i\le m'+n'-1\}$$

とおくと

$$\mathcal{P}(\{\lambda_i,\mu_j\})\simeq\{R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}\text{の正系}\}\ (\nu\leftrightarrow\Sigma_\nu)$$

となる。

ν に対して ab 図形 $\eta_\nu\in D(m',n')$ を

$$\eta_\nu:=c_1*c_2*....*c_{m'+n'}$$

により定める。ここに

$$c_p:=\begin{cases}a & (\nu_p\in\{\lambda_i\})\\ b & (\nu_p\in\{\mu_j\})\end{cases}$$

である。このとき次が成り立つ。

Theorem 3.6. $Q=LU$ は $Lie(L)=\mathfrak{l}\supset\mathfrak{h}$ を満たす $\mathfrak{g}$ の θ-stable な放物型部分群とし、L は quasisplit であるとする。$R(\mathfrak{u}^-,\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}=\Sigma_\nu\ (\nu\in\mathcal{P}(\{\lambda_i,\mu_j\}))$ とするとき

$$\max[Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L)]=\max\{\mathcal{O}_\eta;\eta\in\{\eta_\nu*\overbrace{ab...ab}^{2\ell},\ \eta_\nu*\overbrace{ba...ba}^{2\ell}\}\}$$

が成り立つ。ここに max{ } は { } の closure relation に関して極大であるものの全体を表す。特に、この軌道の集合は $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系 Σ_ν のみに依存する。

Corollary 3.7. Theorem 3.6 の仮定のもとに $\mathfrak{b}_L \supset \mathfrak{h}$ を $\mathfrak{l}$ の任意の split (i.e. $\theta(\mathfrak{b}_L) = \mathfrak{b}_L^-$) な Borel 部分環とし、$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_L + \mathfrak{u} \in \mathcal{B}_\mathfrak{g}$ と置く。このとき

$$\pi(\cup_{Y \in \overline{K \cdot \mathfrak{b}}/K} T_Y^* \mathcal{B}) = \overline{\mathcal{O}_{\eta_1}} \cup \overline{\mathcal{O}_{\eta_2}}$$

が成り立つ。ここに $\eta_1 := \eta_\nu * \overbrace{ab...ab}^{2\ell}$, $\eta_2 := \eta_\nu * \overbrace{ba...ba}^{2\ell}$ である。

References

[AV] J. Adams and D. Vogan, L-groups, projective representations, and the Langlands classification, Amer. J. Math. 113(1991), 45-138.

[BB] W. Borho and J.-L. Brylinski, Differential operators on homogeneous spaces III, Inventiones math. 80(1985), 1-68.

[KR] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, Amer. J. Math. 93(1971),753-809.

[M] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan 31, No. 2 (1979), 331-357

[O1] T. Ohta, The closure of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities, Tohoku Math. J. 43(1991),161-211.

[O2] 太田琢也、実代数群の標準表現の associated variety と巾零軌道の誘導、数理解析研究所講究録 929(1995),1-18.

[V] D. Vogan, Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1981.

[Y] H. Yamashita, Associated variety and Gelfand-Kirillov dimensions for the discrete series of a semisimple Lie group, Proc. Japan Acad.,70, Ser. A, No. 2, 1994, 50-55.