数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 85-93

KRONECKER 極限公式の高次元化について I

吉川 謙一 (KEN-ICHI YOSHIKAWA)
名古屋大学・多元数理科学研究科

本稿は研究集会「解析数論と数論諸分野の交流」での筆者の講演に加筆したものである。97 年に開催された研究集会「多変数関数数論にあらわれる解析と幾何」と「特異点と複素解析幾何」でも類似の内容の講演をした。第一部ではテータ因子に対する Kronecker 極限公式を扱うが、当時と比べて本質的な進歩はない。従って、本稿の内容も上記研究集会の講究録と(幾つかの改善点を除けば)大きく違わないことを最初に断っておく。(第二部は全く新しい話題である。)

1. Kronecker 極限公式

Jacobi の Δ-関数とは次の無限積で定義される重さ 12 の尖点形式である:

$$\Delta(\tau) = q \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \quad q = \exp(2\pi i\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{1.1}$$

Kronecker 極限公式は $\Delta(\tau)$ の幾何学的解釈を与えるものと理解できるが ([R-S])、最初にそれを思い出しておこう。

$E_\tau := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$, $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ を周期 τ の楕円曲線、$g_\tau = (Im\tau)^{-1}|dz|^2$ を E_τの Ricci-平坦 Kähler 計量とする。$\square_\tau = (Im\,\tau)^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ を (E_τ, g_τ) のラプラシアン、$\sigma(\square_\tau) = \{0 < \lambda_1(\tau) \leq \lambda_2(\tau) \leq \cdots\}$ をその固有値とし、ラプラシアンのゼータ関数を $\zeta_\tau(s) := \sum \lambda_i(\tau)^{-s}$ で定義する。$\lambda_i(\tau)$ は簡単に計算でき、$\zeta_\tau(s)$ は次のように Eisenstein 級数で書ける:

$$\zeta_\tau(s) = (2\pi)^{-2s}(Im\,\tau)^s \sum_{(m,n)\neq(0,0)} |m\tau + n|^{-2s}. \tag{1.2}$$

定理 1.1. (E_τ, g_τ) の解析的トーション$\tau(E_\tau) = \exp(\zeta_\tau'(0))$ は $\Delta(\tau)$ と同一視できる:

$$\tau(E_\tau) = (2\pi)^2 \|\Delta(\tau)\|^{-\frac{1}{6}}.$$

ここで、$\|\Delta(\tau)\|^2 := (Im\,\tau)^{12}|\Delta(\tau)|^2$ は$\Delta(\tau)$ の Petersson ノルムである。 □

次の問題は第一部・第二部を通して本稿の主題である。

問題 1.1. Kronecker 極限公式の自然な高次元化を見つけよ。 □

候補となる幾何学的対象として $c_1(X)=0$ となる射影的代数多様体を考える：

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\underline{g=1} & \underline{g=2} & \underline{g\geq 3} \\
 & Abel\text{ 曲面} \arrow[r] & Abel\text{ 多様体} \\
\text{楕円曲線} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & K3\text{ 曲面} \arrow[r] & Calabi-Yau\text{ 多様体} \\
 & Enriques\text{ 曲面} & hyper-Kahler\text{ 多様体}
\end{tikzcd}$$

本稿では Abel 多様体の系列で Kronecker 極限公式を一般化する。K3 曲面や Enriques 曲面については本稿の第 2 部を参照して頂きたい。また、Abel 多様体の場合については Jorgenson-Kramer ([J-K]) が Green-カレントを用いて筆者と類似した内容を扱っている。

2. コホモロジーの行列式と Quillen 計量

2.1 解析的トーション. (M,g) をコンパクト Kähler 多様体、$\square_{0,q}$ を M 上の $(0,q)$-形式に作用するラプラシアン、$\sigma(\square_{0,q})=\{0\leq\cdots\leq 0\leq\lambda_{0,q}(1)\leq\lambda_{0,q}(2)\leq\cdots\}$ を $\square_{0,q}$ のスペクトル, $\zeta_{0,q}(s):=\sum_{k\geq 1}\lambda_{0,q}(k)^{-s}$ を (M,g) のスペクトル ζ-関数とする。この時、$\zeta_{0,q}(s)$ は全平面上有理型で、$s=0$ で正則である。

定義 2.1. 解析的トーションとは次式で定義される実数である：

$$\tau(M,g):=\prod_{q\geq 0}(\det\square_{0,q})^{(-1)^q q},\quad \det\square_{0,q}:=\exp\left(-\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\zeta_{0,q}(s)\right).\quad\square$$

2.2 コホモロジーの行列式. $\pi:X\to S$ を複素多様体間の固有平滑 Kähler 射とする。

定義 2.2. コホモロジーの行列式とは以下で定義される S 上の直線束である：

$$\lambda(X/S):=\bigotimes_{q\geq 0}(\det R^q\pi_*\mathcal{O}_X)^{(-1)^q}.\quad\square$$

$\lambda(X/S)$ には次の様にして Hermite 計量が入る。$g_{X/S}$ を相対接束 $TX/S:=\ker\pi_*$ 上の Kähler 計量、$\mathcal{H}^{0,q}(X_t)$ をファイバー X_t 上の調和 $(0,q)$-形式の空間とする。Hodge の定理より、$\lambda(X/S)$ のファイバーは調和形式の空間の行列式と見なせる：

$$\lambda_{X_t}=\bigotimes_{q\geq 0}(\det H^q(X_t,\mathcal{O}_{X_t}))^{(-1)^q}\cong\bigotimes_{q\geq 0}\left(\det\mathcal{H}^{0,q}(X_t)\right)^{(-1)^q}\tag{2.1}$$

調和形式の積分を通じて $\lambda(X/S)$ に Hermite 直線束の構造が入り（L^2-計量と呼ばれる)、それを $\|\cdot\|_{L^2}$ と書く。

定義 2.3. $\lambda(X/S)$ の $g_{X/S}$ に関する Quillen 計量とは以下で定義される Hermite 計量のことである： $\|\cdot\|_Q^2(t) := \tau(X_t)\cdot\|\cdot\|_{L^2}^2(t)$. □

次の 2 定理は Quillen 計量に関して最も基本的である。

定理 2.1 ([B-G-S]). $c_1(\lambda(X/S)_Q)$ を$\lambda(X/S)_Q := (\lambda(X/S), \|\cdot\|_Q)$ の Chern 形式とすれば、

$$c_1(\lambda(X/S)_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S}))^{(1,1)}. \quad \square$$

定理 2.2 ([B-G-S]). $g_{X/S}$, $g'_{X/S}$ を Kähler 計量の族、$\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|'_Q$ を $g_{X/S}$, $g'_{X/S}$ に関する$\lambda(X/S)$ の Quillen 計量とすれば、

$$\log\left(\frac{\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|_Q}\right)^2 = \pi_*(\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S}))^{(0,0)}.$$

但し、$\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S})$ は Bott-Chern 類である。 □

定理 2.1, 2.2 ともにスムース射にしか適用できない難点があり、次節以降でモジュライ空間上の普遍族に適用して大域的な結論を得ようとする場合この点が問題になる。テータ因子の普遍族に対しては、次の結果で十分である。

定義 2.4. $\pi: X \to S$ を複素多様体間の射影的固有正則射、S を単位円盤とする。(π, X, S) が孤立特異点の平滑化であるとは、(1) $\Sigma(\pi) := \{x \in X;\, d\pi(x) = 0\} \subset X_0$, (2) $\#\Sigma(\pi) < \infty$ が成立する場合を言う。この時、特異ファイバー X_0 は超曲面孤立特異点のみを特異点として許容する。 □

g_X を X の Kähler 計量、$g_{X/S}$ を g_X から入る TX/S の Kähler 計量、$\|\cdot\|_Q$ を $g_{X/S}$ に関する $\lambda(X/S)$ の Quillen 計量とする。

定理 2.3([Y1]). $\|\cdot\|_Q$ は $\lambda(X/S)$ の特異 Hermite 計量で、曲率カレントは次式で与えられる：

$$c_1(\lambda(X/S)_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S}))^{(1,1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}\mu(X_0)\delta_0.$$

ここで、$n = \dim X/S$, $\mu(X_0)$ は特異ファイバーの全 Milnor 数、δ_0 は原点に台をもつ Dirac のデルタ関数である。 □

このような定式化の元で、定理 1.1 がどのように記述できるかを示して本節を終える。$p: \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ を $\mathbb{H}$ 上の楕円曲線の普遍族とする ($p^{-1}(\tau) = E_\tau$)。相対接束 $T\mathbb{E}/\mathbb{H}$ には Kähler 計量 $g_{\mathbb{E}/\mathbb{H}} := \{g_\tau\}_{\tau\in\mathbb{H}}$ を入れる。コホモロジーの行列式 $\lambda(\mathbb{E}/\mathbb{H})$ は断面 $\sigma_{\mathbb{E}} := 1 \otimes dz$ で生成される：$\lambda(\mathbb{E}/\mathbb{H}) = \mathcal{O}_{\mathbb{H}}\cdot\sigma_{\mathbb{E}}$. （ここでは Serre の双対律 $H^1(E_\tau, \mathcal{O}_{E_\tau}) = H^0(E_\tau, \Omega^1_{E_\tau})^\vee$ を用いている。）$g_{\mathbb{E}/\mathbb{H}}$ に関する $\lambda(\mathbb{E}/\mathbb{H})$ の Quillen 計量を $\|\cdot\|_Q$ とすれば、定理 1.1 は次のように言い替えられる。

定理 2.4.

$$\|\sigma_{\mathbb{E}}\|_Q^2(\tau) = (2\pi)^2|\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}}. \quad \square$$

3. Abel 多様体とテータ因子の判別式

3.1 Abel 多様体の判別式. 第一節で楕円曲線について考えたことを Abel 多様体に対して考える。
$\mathfrak{S}_g$ を g 次 Siegel 上半空間、$\Lambda_\tau := \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_g \oplus \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\tau_g$ $(\tau \in \mathfrak{S}_g)$ を $\mathbb{C}^g$ の格子、$A_\tau := \mathbb{C}^g/\Lambda_\tau$ （$1_g = (e_1, \cdots, e_g)$, $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_g) \in \mathfrak{S}_g$）を周期 $(1_g, \tau)$ の Abel 多様体とする。$p : \mathbb{A} \to \mathfrak{S}_g$ を $\mathfrak{S}_g$ 上の主偏極 Abel 多様体の普遍族 $(p^{-1}(\tau) = A_\tau)$ とする。$(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ の相対接束には Kähler 計量 $g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} = \{g_\tau\}_{\tau \in \mathfrak{S}_g}$ $(g_\tau := {}^t dz (Im\,\tau)^{-1} d\bar{z})$ を入れる。$\Gamma_g := Sp(2g, \mathbb{Z})$ を Siegel モジュラー群とする。Γ_g は次のように $\mathbb{A}$ に作用し、計量 $g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}$ を保つ：$\forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$, $\forall (z, \tau) \in \mathbb{A}$,

$$\gamma \cdot (z, \tau) = ({}^t(C\tau + D)^{-1} z, (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}), \quad \gamma^* g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} = g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}. \tag{3.1}$$

定理 1.1 の素朴な類似として Abel 多様体の解析的トーションが $\mathfrak{S}_g$ 上のどのような関数で書けるのか問題であるが、それは Ray-Singer により既に知られていた。

定理 3.1 ([R-S]). $\tau(A_\tau, g_\tau) \equiv 1 \quad (g > 1)$. □

即ち、Abel 多様体の普遍族に対して解析的トーションは何ら非自明な保型形式を生み出さない。この理由を考えるために $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ のコホモロジーの行列式を見てみる。定義より、$\lambda(\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g) = \bigotimes_{q \geq 0} (\det R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}})^{(-1)^q}$ が $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ のコホモロジーの行列式である。Γ_g の $\mathbb{A}$ への作用はファイバーをファイバーに移すので、Γ_g は q 次順像 $R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ に作用する。従って $\lambda(\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g)$ にも作用する。又、ファイバーが Abel 多様体なので $\bigwedge^q R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \cong_{\Gamma_g} R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ が言える。($\cong_{\Gamma_g}$ はΓ_g-層の同型を意味する。)
一方、勝手なベクトル束 F に対して、$\bigotimes_{q \geq 0} (\wedge^q F)^{(-1)^q}$ は F の階数が 1 の場合 $F^\vee$ に、それ以外の場合は自然に自明束になる。これらのことから

$$\lambda(\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g) \cong_{\Gamma_g} \begin{cases} p_* \omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} & (g = 1) \\ \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_g} \cdot 1_{\mathbb{A}} & (g > 1) \end{cases} \tag{3.2}$$

が従う。ここで $\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}$ は $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ の相対標準束である。

命題 3.1. $g > 1$ ならば $\lambda(\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g)$ の Γ_g-不変な断面 $1_{\mathbb{A}} \in H^0(\mathfrak{S}_g, \lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{A}}))^{\Gamma_g}$ が存在して、$\|1_{\mathbb{A}}\|_Q(\tau) \equiv 1$ が成立する。 □

この様に、$g = 1$ と $g > 1$ ではコホモロジーの行列式の構造が全く異なり、これが定理 1.1 と 3.1 を分けている本質的な違いであると推測される。ではこの観点から楕円曲線の普遍族を一般化する族は何かということが自然と問題になる。そこで登場するのがテータ因子の普遍族である。

3.2 テータ因子の判別式. テータ関数を次式で定義する：

$$\theta(z, \tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \left({}^t m \, \tau \, m + 2 {}^t m \, z \right). \tag{3.3}$$

$\Theta_\tau := \{z \in A_\tau; \theta(z, \tau) = 0\}$ を A_τ のテータ因子、$p : \Theta \to \mathfrak{S}_g$ をテータ因子の普遍族 $(p^{-1}(\tau) = \Theta_\tau)$、$\Gamma_g(1,2) := \{\gamma \in \Gamma_g; \gamma \cdot \Theta = \Theta\} \subset \Gamma_g$ を Γ_g の指数有限な部分群、$N_g := \{\tau \in \mathfrak{S}_g; Sing\,\Theta_\tau \neq \emptyset\}$ を Andreotti-Mayer 軌跡とする。(この軌跡は Torelli 問題や Schottky 問題に関連して Andreotti-Mayer により導入された。)

命題 3.2. N_g は Γ_g-不変な $\mathfrak{S}_g$ 上の因子である。 □

$\mathbb{A}$ 上の $\Gamma_g(1,2)$-層の完全列：

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}}(-\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Theta} \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

に小平消滅定理（の相対化）を組み合わせることにより、次の同型が得られる：

$$\lambda(\Theta/\mathfrak{S}_g) \cong_{\Gamma_g(1,2)} \lambda(\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g) \otimes (p_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g})^{(-1)^g}. \tag{3.5}$$

従って、$g>1$ で $\lambda(\Theta/\mathfrak{S}_g)$ は次の楕円曲線の場合に類似した標準的断面を持つ：

$$\sigma_{\Theta}(\tau) := 1_{\mathbb{A}}(\tau) \otimes (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g)_{\tau}^{(-1)^g}. \tag{3.6}$$

3.3 一般の豊富因子の判別式. Abel 多様体の因子はテータ因子以外にも豊富に存在する。それらについてコホモロジーの行列式がどうなっているかここで見ておく。以下簡単のため主偏極因子の整数倍に限って説明する。(一般の場合でも同様である。)

$L := \mathcal{O}_{\mathbb{A}}([\Theta])$ を豊富因子 Θ の定める直線束、$V_m := \mathbb{C}^{m^g}$、V_m の基底を $\{\delta_a\}_{a\in B_m}$、その座標を $(u_a)_{a\in B_m}$ ($B_m = (m^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^g$) とする。テータ関数の基本定理より、次の同型が存在する：

$$\psi : \mathcal{O}_{\mathfrak{S}_g} \otimes V_m \cong p_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}}(m[\Theta]) = p_*L^m, \quad \psi(\delta_a) = \theta_{a,0}(m\,z, m\,\tau). \tag{3.7}$$

$\pi : \Theta_m \to \mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g$ を完備線形系 $|L^m|$ に属する因子族とする：

$$\Theta_m := \{(u,z,\tau) \in \mathbb{P}(V_m) \times \mathbb{A};\ \sum_{a\in B_m} u_a\,\theta_{a,0}(m\,z, m\,\tau) = 0\}. \tag{3.8}$$

$\mathcal{D}_{g,m} := \{(u,\tau) \in \mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g;\ Sing\,\Theta_{m,(u,\tau)} \neq \emptyset\}$ を判別式軌跡とする。
$p_2 : \mathcal{D}_{g,m} \to \mathfrak{S}_g$ を射影とすれば、そのファイバー $\mathcal{D}_{g,m,\tau}$ は (A_τ, L_τ^m) の射影双対に他ならない。テータ関数の変換公式より、準同型 $\rho_m : \Gamma_g(1,2) \to U(V_m)$ が存在して、$\Gamma_g(1,2)$ は $\mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g$ に作用する。この作用は Θ_m を保ち、ファイバーをファイバーに移すので $\mathcal{D}_{g,m}$ にも作用する。(3.4)、(3.5) と同様にして次がわかる。

命題 3.3. 次の $\Gamma_g(1,2)$-層の同型が成立する：

$$\lambda(\Theta_m/\mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g)^{(-1)^g} \cong_{\Gamma_g(1,2)} \lambda(\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g)^{(-1)^g} \otimes \det \pi_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}(\Theta_m)$$

$\sigma_J \in H^0(\mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g, \det \pi_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}(\Theta_m))$ ($|J| = m^g$) を次で定義すれば：

$$\sigma_J(u,\tau) := u^J \cdot \bigwedge_{a\in B_m} \frac{\theta_a}{\sum_{b\in B_m} u_b\theta_b} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g,$$

$\{\sigma_J\}_{|J|=m^g}$ は $\det \pi_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}(\Theta_m)$ を生成する。即ち、自然な写像 $\oplus_{a\in B_m}\mathcal{O}_{P(V_m)\times\mathfrak{S}_g}\sigma_J \to \det \pi_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}(\Theta_m)$ は全射である。 □

4. テータ因子に対する Kronecker 極限公式

4.1 テータ因子の解析的トーションン. $g_\tau = {}^t dz(Im\tau)^{-1}d\bar{z}$ を 3.1 節で導入した A_τ の Kähler 計量、$g_{\Theta_\tau} := g_\tau|_{\Theta_\tau}$ をΘ_τ の誘導計量とする。

定理 4.1([Y2, Main Theorem]). N_g を零因子に持つ重さ $\frac{(g+3)\cdot g!}{2}$ の Siegel 保型形式$\Delta_g(\tau)$ が存在して、次が成立する：

$$\tau(\Theta_\tau, g_{\Theta_\tau}) = \|\Delta_g(\tau)\|^{\frac{(-1)^{g+1}2}{(g+1)!}}.$$

ここで、$\|\Delta(\tau)\|^2 = (\det Im\tau)^{\frac{(g+3)\cdot g!}{2}}|\Delta(\tau)|^2$ は $\Delta(\tau)$ の Petersson ノルムである。 □

$\Delta_g(\tau)$ の構造について次がわかる。$\theta_{a,b}(\tau)$ $(a, b \in \mathbb{F}_2^g)$ をテータ定数とし、$\chi_g(\tau) := \prod_{(a,b)\equiv 0} \theta_{a,b}(\tau)$ を全偶テータ定数の積とする。

命題 4.1. Siegel 保型形式 $J_g(\tau)$ が存在して、次が成立する：

$$\Delta_g(\tau) = \chi_g(\tau)\, J_g(\tau)^2. \quad \square$$

これより $g < 5$ の時、$\Delta_g(\tau)$ を定数 C_g を除いて決定できる。

$$\Delta_g(\tau) = C_g\, \chi_g(\tau) \quad (g = 2, 3), \quad \Delta_4(\tau) = C_4\, \chi_4(\tau)\, J_4(\tau)^2. \tag{4.1}$$

ここで、$J_4(\tau) \in \mathbb{Z}[\theta_{a,b}(\tau)]_{a,b\in\mathbb{F}_2^g}$ は Schottky により発見された保型形式である。(テータ定数による J_4 の表示は一意的ではない。) $C_2 = 2^{-22}\pi^{-14}e^{12\zeta'(-1)}$がわかるが ([Y2, Theorem 7.2])、C_3, C_4 について、筆者は何も知らない。Beauville、井草によれば $J_4(\tau)$ は $\mathfrak{S}_4$ の中で種数 4 の曲線の Jacobian 軌跡を特徴付ける。

4.2 一般の豊富因子に付随した保型多項式. $\pi : \Theta_m \to \mathbb{P}(V_m) \times \mathfrak{S}_g$ を 3.3 節で定義した因子族、$g_{\Theta_m/\mathbb{P}(V_m)\times\mathfrak{S}_g}$ を $g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}$ から定まる $T\Theta_m/\mathbb{P}(V_m)\times\mathfrak{S}_g$ の Kähler 計量、$\|\cdot\|_Q$ を $\lambda(\Theta_m/\mathbb{P}(V_m)\times\mathfrak{S}_g)$ の $g_{\Theta_m/\mathbb{P}(V_m)\times\mathfrak{S}_g}$ に関する Quillen 計量とする。この時、定理 4.1 は次のように一般化される。

定理 4.2([Y2, Theorem 5.1]). $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)$-係数の次数 $(g+1)!m^g$ の多項式$\Delta_{g,m}(u,\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)[u_a]_{a\in B_m}$ と$\Gamma_g(1,2)$ の $U(\mathbb{C})$-値乗法的指標 $\chi_{g,m}$ が存在して次が成立する：

(1) $\Delta_{g,m}$ は次の保型性を持つ：$\forall\gamma \in \Gamma_g(1,2)$,

$$\Delta_{g,m}(\gamma\cdot u, \gamma\cdot\tau) = \chi_{g,m}(\gamma)\cdot j(\tau,\gamma)^{\frac{1}{2}(g+3)\cdot g!m^g}\cdot\Delta_{g,m}(u,\tau),$$

(2) σ_J を命題 3.3 の断面とすれば、任意の $(\tau, u) \in \mathbb{P}(V_m)\times\mathfrak{S}_g$ に対して、

$$\|\sigma_J\|_Q^2(u,\tau) = (\det Im\tau)^{\frac{(g-1)m^g}{2(g+1)}}\left|\frac{u^I}{\Delta_{g,m}(u,\tau)^{\frac{1}{(g+1)!}}}\right|^2,$$

(3) $\mathbb{P}(V_m)\times\mathfrak{S}_g$ 上の因子の意味で $(\Delta_{g,m})_0 = \mathcal{D}_{g,m}$. □

上で、$j(\tau,\gamma) = \det(C\tau + D)$ $\left(\tau \in \mathfrak{S}_g,\ \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g\right)$ は Siegel 保型形式の保型因子である。例としてもっとも簡単な場合である $\Delta_{2,2}(u,\tau)$ がどのように書けるか以下で見てみる。

A_τ を周期 τ の Abel 曲面、$K_\tau = A_\tau / \pm 1$ をその Kummer 曲面とする。K_τ は 4 次曲面として表せる：

$$K_\tau = \{(u_0 : u_1 : u_2 : u_3) \in \mathbb{P}^3;\ F(u,\tau) = 0\}. \tag{4.2}$$

ここで、$F(u,\tau)$ は Kummer の 4 次式で、次式で与えられる：

$$\begin{aligned} F(u,\tau) =& A(\tau)(u_0^4 + u_1^4 + u_2^4 + u_3^4) + B(\tau)(u_0^2u_3^2 + u_1^2u_2^2) \\ &+ C(\tau)(u_1^2u_3^2 + u_2^2u_0^2) + D(\tau)(u_2^2u_3^2 + u_0^2u_1^2) + 2E(\tau)u_0u_1u_2u_3. \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで、$A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$, $E(\tau)$ は次式で定まる保型形式である：

$$A(\tau) := (\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(\beta^2\delta^2 - \gamma^2\alpha^2)(\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2), \tag{4.4}$$

$$B(\tau) := (\beta^4 + \gamma^4 - \alpha^4 - \delta^4)(\beta^2\delta^2 - \gamma^2\alpha^2)(\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2), \tag{4.5}$$

$$C(\tau) := (\gamma^4 + \alpha^4 - \beta^4 - \delta^4)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2), \tag{4.6}$$

$$D(\tau) := (\alpha^4 + \beta^4 - \gamma^4 - \delta^4)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(\beta^2\delta^2 - \gamma^2\alpha^2), \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} E(\tau) :=& \alpha\beta\gamma\delta(\delta^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)(\delta^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2) \\ &\times (\delta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2), \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &:= \theta_{\frac{1}{2}000}(0,2\tau), \quad \beta(\tau) := \theta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}00}(0,2\tau), \\ \gamma(\tau) &:= \theta_{0\frac{1}{2}00}(0,2\tau), \quad \delta(\tau) := \theta_{0000}(0,2\tau). \end{aligned} \tag{4.9}$$

$H_{2,2} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \subset Aut(K_\tau) \cap PGL(4;\mathbb{C})$ を Heisenberg 群とする。
$H_{2,2}$ は次の 4 元で生成される：$H_{2,2} = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \rangle$,

$$\sigma_1 : (u_0, u_1, u_2, u_3) \to (u_2, u_3, u_0, u_1), \tag{4.10}$$

$$\sigma_2 : (u_0, u_1, u_2, u_3) \to (u_1, u_0, u_3, u_2), \tag{4.11}$$

$$\sigma_3 : (u_0, u_1, u_2, u_3) \to (u_0, u_1, -u_2, -u_3), \tag{4.12}$$

$$\sigma_4 : (u_0, u_1, u_2, u_3) \to (u_0, -u_1, u_2, -u_3). \tag{4.13}$$

$\sigma \in H_{2,2}$ に対して、$(u_0^\sigma, u_1^\sigma, u_2^\sigma, u_3^\sigma) := \sigma \cdot (u_0, u_1, u_2, u_3)$ と書く。この時、K_τ の特異点は次で与えられる：

$$Sing\, K_\tau = \{(\alpha(\tau)^\sigma, \beta(\tau)^\sigma, \gamma(\tau)^\sigma, \delta(\tau)^\sigma)\}_{\sigma \in H_{2,2}}. \tag{4.14}$$

$G(u,\tau)$ を $Sing\, K_\tau$ の射影双対の定義方程式とする：

$$G(u,\tau) := \prod_{\sigma \in H_{2,2}} (\alpha(\tau)^\sigma u_0 + \beta(\tau)^\sigma u_1 + \gamma(\tau)^\sigma u_2 + \delta(\tau)^\sigma u_3). \tag{4.15}$$

定理 4.2 と Kummer 曲面の射影双対に関する自己双対性により、次の定理を得る。

定理 4.3([Y2, Theroem 7.1, Corollary 7.1]).

$$\Delta_{2,2}(u,\tau)=2^{-80}\pi^{-56}e^{48\zeta'(-1)}F(u,\tau)^2\,G(u,\tau).\quad\square$$

以下では、定理 4.2 を解析的トーションの言葉に翻訳する。$\Theta_{m,(u,\tau)}:=\{z\in A_\tau;\sum_a u_a\theta_{a,0}(mz,m\tau)=0\}$ を$\pi:\Theta_m\to\mathbb{P}(V_m)\times\mathfrak{S}_g$ のファイバーとする。簡単のため $\theta_{a,0}:=\theta_{a,0}(mz,m\tau)\in H^0(A_\tau,L_\tau^{\otimes m})$ と置く。今、$u_a\neq 0$ を仮定する。このとき、Poincaré の留数系列から $H^0(\Theta_{m,(u,\tau)},\Omega^{g-1})$ は次の $\omega_\alpha(u,\tau)$ で生成されていることがわかる：

(4.16)

$$H^0(\Theta_{m,(u,\tau)},\Omega^{g-1})=\bigoplus_{\alpha=1}^{m^g-1+g}\mathbb{C}\omega_\alpha(u,\tau)$$

$$=\bigoplus_{b\in B_m\setminus\{a\}}\mathbb{C}\,Res_{\Theta_{m,(u,\tau)}}\frac{u_a\theta_{b,0}}{\sum_c u_c\theta_{c,0}}dz_1\wedge\cdots\wedge dz_g\oplus\bigoplus_{i=1}^{g}\mathbb{C}dz_1\wedge\cdots\hat{dz_i}\cdots\wedge dz_g.$$

γ_j を $H_{g-1}(\Theta_{m,(u,\tau)},\mathbb{Z})$ の整基底とする：$H_{g-1}(\Theta_{m,(u,\tau)},\mathbb{Z})=\oplus_{j=1}^r\mathbb{Z}\gamma_j$. この整基底に関する交差行列を M とする：$M:=(\langle\gamma_i,\gamma_j\rangle)_{1\le i,j\le r}\in GL(r,\mathbb{Z})$. 周期の基底 ω_α と整ホモロジーの基底 γ_j に関する周期行列を $P(u,\tau):=\left(\int_{\gamma_j}\omega_\alpha(u,\tau)\right)$ とする。L^2-計量の主要な部分は正則形式の積分であるが、それは周期積分に還元できる。結局、定理 4.2 は次のように言い替えられる。

定理 4.4. $\Delta_{g,m}(u,\tau)$ を定理 4.2 の保型多項式とすれば、

$$\tau(\Theta_{m,(u,\tau)},g_{\Theta_{m,(u,\tau)}})^{(-1)^g}$$
$$=(\det Im\tau)^{\frac{(g-1)m^g}{2(g+1)}-g}\left|\frac{u_a^{m^g}}{\Delta_{g,m}(u,\tau)^{\frac{1}{(g+1)!}}}\right|^2\det\left({}^tP(u,\tau)\,M\,\overline{P(u,\tau)}\right).\quad\square$$

これより、$\Theta_{m,(u,\tau)}$ の解析的トーションを知ることは、その正則標準形式の周期を知ることに還元される。その具体的な形について筆者は何も知らないが、興味ある問題であると思う。$\Delta_g(\tau)$ の具体的な表示を求めることとあわせて、今後の課題である。

$\Delta_g(\tau)$ と $\Delta_{g,m}(u,\tau)$ とは無関係ではない。定理 4.2 によれば $\Delta_{g,m}(u,\tau)$ は次のように書ける：$\Delta_{g,m}(u,\tau)=\sum_J f_J(\tau)u^J$. ここで、和は $|J|=m^g$ となる指数全体を走る。$B_m=\frac{1}{m}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$ より、B_m には特別な元 0 が存在する。$u=(u_0,u_a)$ $(a\in B_m\setminus\{0\})$ と書くとき、指数 J_0 を $J_0=(u_0^{m^g},0,\cdots,0)$ で定める。この時、次が成り立つ。

定理 4.5([Y2, Theorem 6.1]).

$$f_{J_0}(\tau)=m^{\frac{g\cdot g!m^g}{2}}\Delta_g(m\tau)^{m^g}.\quad\square$$

$\tilde{\Delta}_{g,m}(u,\tau):=\Delta_{g,m}(u,\tau)/f_{J_0}(\tau)$ と置けば、$u_0^{m^g}$ の係数は 1 になる。体 k_m を $k_m:=\mathbb{Q}(\theta_{a,0}(0,m\tau))_{a\in B_m}$ で定義すれば、$\tilde{\Delta}_{g,m}(u,\tau)\in k_m[u]$ が示され、$\Delta_{g,m}$ は線形系 $|mL|$ で定まる Abel 多様体の射影双対の（変数 u_0 に関して monic な）定義方程式を与えていることが示される ([Y2, Theorem 6.3])。

5. 定理 5.1 の証明の概略

この節では定理 5.1 を定理 2.1-3 を用いてどのように示すのか、その概要を説明する。定理 5.2 についても基本的には同様である。

(1) $g_E := {}^t dz \cdot d\bar{z}$ を $T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g$ の Euclid 計量、$g_{E,\Theta/\mathfrak{S}_g}$ を g_E から定まる相対接束 $T\Theta/\mathfrak{S}_g$ の Kähler 計量、$\|\cdot\|'_Q$ を $g_{E,\Theta/\mathfrak{S}_g}$ に関する $\lambda(\Theta/\mathfrak{S}_g)$ の Quillen 計量とする。Gauss-Codazzi の方程式 ([Y1, Proposition 2.1])、及び Debbare の定理 ([D]) を定理 2.1, 2.3 と組み合わせて、次が従う：

$$c_1(\lambda_\Theta, \|\cdot\|'_Q) = \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)!}\delta_{N_g}. \tag{5.1}$$

これより、$\Delta_g(\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)$ が存在して次が成立する：

$$(\Delta_g)_0 = N_g, \quad \|\sigma_\Theta\|'^2_Q(\tau) = |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2(-1)^{g+1}}{(g+1)!}}. \tag{5.2}$$

(2) 定理 2.2 と多少の計算の後 ([Y2, Proposition 5.1])、次がわかる：$\forall\gamma \in \Gamma_g(1,2)$、

$$\log\left(\frac{\gamma^*\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|'_Q}(\tau)\right)^2 = \frac{(-1)^g(g-1)}{g+1}\log|j(\tau,\gamma)|. \tag{5.3}$$

即ち、$\Delta_g(\tau)$ は $U(1)$-指標付きの $\Gamma_g(1,2)$ に関する保型形式である。Γ_g と N_g の性質から $\Delta_g(\tau)$ はΓ_g に関する保型形式で指標は自明である。

(3) 再び定理 2.2 ([Y2, Proposition 5.1]) より次がわかる：

$$\log\left(\frac{\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|_Q}\right)^2 = \frac{(-1)^g(g+1)}{2(g+1)}\log\det Im\tau. \tag{5.4}$$

(5.2) と (5.4) より

$$\|\sigma_\Theta\|^2_Q(\tau) = (\det Im\tau)^{\frac{(-1)^g(g-1)}{2(g+1)}}|\Delta_g(\tau)|^{\frac{2(-1)^{g+1}}{(g+1)!}} \tag{5.5}$$

となるので、

$$\log\|\sigma_\Theta\|^2_{L^2}(\tau) = (-1)^g\log(2\pi)^g\det Im\tau \tag{5.6}$$

と組み合わせて定理を得る。□

References

[B-G-S]. Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C., *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III*, Commun. Math. Phys. **115** (1988), 49-78, 79-126, 301-351.

[D]. Debarre, O., *Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **25** (1992), 687-708.

[J-K]. Jorgenson, J. and Kramer, J., *Towards the arithmetic degree of line bundles on abelian varieties*, Manuscripta Math. **96** (1998), 335-370.

[R-S]. Ray, D.B., Singer, I.M., *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. **98** (1973), 154-177.

[Y1]. Yoshikawa, K.-I., *Smoothing of isolated hypersurface singularities and Quillen metrics*, Asian J. Math. **2** (1998), 325-344.

[Y2]. ———, *Discriminant of theta divisors and Quillen metrics*, preprint (1997).