数理解析研究所講究録
1097 巻 1999 年 139-143

志村曲線の CM サイクルと Safarevich-Tate 群

東大・数理 博士課程　安田 正大 (Seidai Yasuda)

1 Introduction

K を代数体, $\overline{K}$ をその代数閉包とする. K 上のアーベル多様体 A に対し, A/K の Shafarevich-Tate 群 $Ш(A/K)$ は, ガロア・コホモロジー を用いて

$$Ш(A/K)=\mathrm{Ker}[H^1(K,A)\to\prod_v H^1(K_v,A)]$$

と定義される (ただし右辺の v は K の全素点を動く). $Ш(A/K)$ は数論的に重要な対象であり, 有限群であると予想されている. 有名な B & S-D 予想は, $Ш(A/K)$ の位数を用いて A の L-関数 $L(A/K,s)$ の $s=1$ における振る舞いを記述する予想である.

Kolyvagin の仕事等により (cf. [K]), 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の modular な楕円曲線 E に対して, アーベル群 $E(\mathbb{Q})$ の階数が 1 以下ならば $Ш(E/K)$ が有限群であることが証明されている.

Nekovar [N1] は, 上に述べた Kolyvagin の結果を, 重さ偶数 ≥ 2 の cusp 形式の場合に拡張する方向へ向かう結果を得た. 本稿の目的は, この Kolyvagin-Nekovar と類似の議論を $\mathbb{Q}$ 上の志村曲線を用いて行うことである.

Kolyvagin は, 上述の仕事のなかで Euler 系の理論を創り出した. Nekovar の仕事そして本稿の主結果の証明にも Euler 系が用いられる. Euler 系の理論は, 他に, 岩澤主予想への応用もなされている ([R1]). また, 加藤和也氏による, モジュラ曲線の K_2 における Beilinson 元のなす Euler 系を用いた強力な結果 ([Ka]) があり, Kolyvagin, Nekovar の結果及び今回の結果とも深く関係する内容なのであるが, 本稿ではこれらの事項については全く触れることができなかった.

2 ガロア表現の Shafarevich-Tate 群

体 K に対し, $G_K=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ で K の絶対ガロア群を表す. さらに, 素数 p に対し, G_K の連続な作用をもつ有限生成 $\mathbb{Z}_p$-加群のことを, G_K の $\mathbb{Z}_p$-表現とよぶことにする.

本節では，本稿の主結果を述べるのに必要な，代数体のガロア群の $\mathbb{Z}_p$-表現の Shafarevich-Tate 群及び Selmer 群を定義する．(これらは，Bloch-加藤の論文 [BK] の中で本質的に導入された．)

K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大，l を素数，T を G_K の $\mathbb{Z}_l$-表現とする．$V = T \otimes \mathbb{Q}_p$, $A = V/T$ とおく．(連続) ガロア・コホモロジー $H^1_{cont}(K,V)$ の finite-part $H^1_f(K,V) \subset H^1_{cont}(K,V)$ を，

$$H^1_f(K,V) := \begin{cases} \mathrm{Ker}[H^1_{cont}(K,V) \to H^1_{cont}(K^{ur},V)], & \text{if } p \neq l \\ \mathrm{Ker}[H^1_{cont}(K,V) \to H^1_{cont}(K, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{crys})], & \text{if } p = l \end{cases}$$

により定義する (但し，K^{ur} は K の最大不分岐拡大，B_{crys} は Fontaine の環)．また，$H^1_{cont}(K,V) \to H^1(K,A)$ による $H^1_f(K,V)$ の像 (*resp.* $H^1_{cont}(K,T) \to H^1_{cont}(K,V)$ による $H^1_f(K,V)$ の逆像) を $H^1_f(K,A)$ (*resp.* $H^1_f(K,T)$) とおく．

K を代数体，p を素数，V を G_K の $\mathbb{Z}_p$-表現とする．簡単のため以下では $p \neq 2$ とする．$H^1_{cont}(K,V)$ の finite-part $H^1_f(K,V) \subset H^1_{cont}(K,V)$ を，自然な射

$$H^1_{cont}(K,V) \to \prod_{v:K\text{ の有限素点}} H^1_{cont}(K_v,V)$$

による $\prod_v H^1_f(K_v,V)$ の逆像として定める．さらに次のようにして，Selmer 群 $\mathrm{Sel}_p(A/K)$, 及び Shafarevich-Tate 群の p-part $\text{Ш}_p(A/K)$ を定める：

$$\mathrm{Sel}_p(A/K) := \mathrm{Ker}[H^1(K,A) \to \prod_v H^1(K_v,A)/H^1_f(K_v,A)],$$

$$\text{Ш}_p(A/K) := \mathrm{Coker}[H^1_f(K,V) \to \mathrm{Sel}_l(A/K)].$$

Σ を，K の有限素点の有限集合とする．T, V, A を，上のとおりとする．Σ に属する素点のところだけ local 条件を無視することによって，$Sel_p(A/K)$ の variant

$$Sel_p^{\Sigma}(A/K) := \mathrm{Ker}[H^1(K,A) \to \prod_{v \notin \Sigma} \frac{H^1(K_v,A)}{H^1_f(K_v.A)}]$$

を定義する．

3 志村曲線

本稿では，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の 4 元数体から構成される志村曲線のみを取り扱う (cf. [Shr])．B を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の不定符号 4 元数体, $d > 1$ をその discriminant とする．$\mathbb{Q}$ 上の代数群 $G = B^{\times}$ を考える．$S = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ を Deligne のトーラスとし (但し $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ は Weil restriction),

$$h : S \to G_{\mathbb{R}}, \qquad h(x + y\sqrt{-1}) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^{-1}$$

で定まる志村曲線を考える (cf. [D1], [D2]). B の極大 order $\mathcal{O}_B$, 及び各素数 $p \nmid d$ に対し同型 $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong M_2(\mathbb{Z}_p)$ を固定する. d と素な整数 $N > 4$ に対し, $G(\mathbb{A}^f)$ の極大コンパクト部分群 $\mathbb{K}_{1,N}$ を $\mathcal{O}_B^\times(\hat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ による

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N) \;\middle|\; a_{21} = 0, a_{22} = 1 \right\}$$

の逆像と定める. $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線 $X_{1,N}$ を, $\mathbb{K}_{1,N}$ に対応する志村曲線として定義する. これは楕円モジュラー曲線 $X_1(Nd)$ の類似である.

さて, 虚 2 次体 K と, 埋め込み $\varphi : K \hookrightarrow B$ であって, $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_B) = \mathcal{O}_K$ を満たすものを 1 つ固定する ($\mathcal{O}_K$ は K の整数環). φ の誘導する代数群の射 $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \to G$ は志村多様体 $X = X_{1,N}$ 上に CM-point x を定める.

$X = X_{1,N}$ は QM 型と呼ばれるアーベル曲面のモジュライ空間としての解釈を持つ ([KS], [Bu]). $\mathcal{A} \to X$ を X 上の普遍アーベル曲面の族とする. 久賀-志村多様体 $\mathcal{A}^{r-1}$ を, $\mathcal{A}$ の X 上の r-重ファイバー積として定義する.

$\mathcal{A}^{r-1}$ における, K の Hilbert 類体 H 上定義された余次元 r のサイクル z^r が次のようにしてを構成される (cf. [Be1]). $\mathcal{A}$ の x における fiber となるアーベル曲面を $\mathcal{A}_x$ とする. x は H 上定義されている. 埋め込み $H \hookrightarrow \mathbb{C}$ をひとつ選ぶ. K の判別式を $-D$ とし, $b = \varphi(2\sqrt{-D}) \in \mathcal{O}_B$ とおく. 交代双一次形式,

$$\mathcal{O}_B \times \mathcal{O}_B \to \mathbb{Z}, \qquad (x, y) \mapsto \mathrm{trd}(bxy')$$

は (但し trd は reduced trace, $y \mapsto y'$ は canonical involution), 同型 $H_1(\mathcal{A}_x(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathcal{O}_B$) により, $H^2(\mathcal{A}_x(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ の元を定めるが, 実は $NS(\mathcal{A}_x(\mathbb{C}))$ の元を定める. さらにこれは, H 上のアーベル多様体 $\mathcal{A}_x$ の Picard 群 $z' \in Pic(\mathcal{A}_x)$ の元に canonical に持ち上がる. z^r は, z' の $r-1$ 回直積を $\mathcal{A}^{r-1}$ に押し込むことによって得られる.

4 主結果

r を自然数, $f = \sum_n a_n q^n$ を $\Gamma_0(Nd)$ に属する重さ $2r$ の normalized newform とする.

§3 で構成した, 久賀-志村多様体 $\mathcal{A}^{r-1}$ を用いて, 各素数 l に対し f に対応する $G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{Z}_l$-表現 $T_{f,p}$ を幾何学的に構成することができる. F を, $\mathbb{Q}$ に全ての a_n を添加して得られる体, $\mathcal{O}_F$ をその整数環とする. $T_{f,p}$ は階数 2 の自由 $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$-加群となり, ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$-線型に作用する.

p の上にある $\mathcal{O}_F$ の素イデアル $\wp$ を取り，$G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{Z}_p$-表現 $T = T_{f,p} \otimes_{\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{F,\wp}(r)$ を考察する．前節で構成した z^r に少し操作を施してから p-進アーベル-ヤコビ写像 ([J] 参照) 及びガロア・コホモロジーの corestriction で送ることによって，ガロア・コホモロジーの元 $y_0 \in H^1(K,T)$ を構成することができる (実際は有限個の p を除外する必要がある詳細は [Y]).

先のように，$A = T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ とおく．このとき本稿の主結果は, 以下のように述べられる．

定理 4.1 *([Y]) y_0 が $H^1(K,T)$ の中で torsion 元でないと仮定する．Nd を割る素数全体の集合を Σ とおく．このとき，*
(1) ほとんど全ての素数 p に対して $\mathrm{Sel}_p^{\Sigma}(A/K)/\mathcal{O}_{F,\wp}y_0$ は有限.
(2) ほとんど全ての素数 p に対して $p^{2\mathcal{I}_p}\mathrm{Sel}_p^{\Sigma}(A/K)/\mathcal{O}_{F,\wp}y_0 = 0$. ここで $\mathcal{I}_p$ は, y_0 が $H^1(K,T/p^{\mathcal{I}_p})$ で non-zero となる最小の自然数である．とくに $p^{2\mathcal{I}_p}Ш_p(A/K) = 0$.

志村曲線のかわりに楕円モジュラ曲線を用いても，同様の性質をみたすガロア表現が構成される．上の定理の主張はそれぞれ，楕円モジュラ曲線の場合の Nekovar [N1] の結果，Besser [Be2] の結果の類似である．

5 証明

以下に証明の方針を述べる．$\varphi : K \hookrightarrow B$ を §3 のものとする．Nd と素かつ square free な自然数全体の集合を S とおく．$n \in S$ に対して, $b_n \in B^\times$ を，$\mathrm{nrd}(b_n) = n$ (nrd は reduced norm), $p \nmid n$ のとき $b_n \in (\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p)^\times$, 及び

$$b_n \text{ の } \prod_{p|n} B^\times(\mathbb{Z}_p) \text{ における像 } \in \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{p|n} \mathcal{O}_B^\times(\mathbb{Z}_p)$$

を満たすように取り，$b_n \varphi b_n^{-1}$ から定まる X の CM-point x_n を考え，§3, §4 における z^r, y の構成と同様に久賀-志村多様体 $\mathcal{A}^{r-1}$ 上に余次元 r のサイクル z_n^r を構成し，さらにこの z_n^r から p-進アーベル-ヤコビ写像を用いてガロア・コホモロジーの元

$$y_n \in H^1_{cont}(K_n, T)$$

を構成する．ここで K_n は導手 n の K の ring class field である．すると y_n たちは次の条件をみたす．:

命題 5.1 $n, m \in S$, $n = m \cdot l$ *(l は素数)* とする．このとき，$\mathrm{cor}_{K_m}^{K_n}(y_n) = a_l \cdot y_m$.

y_n たちに Euler 系の理論を適用することができる．Kolyvagin の微分構成法 ([Ko], [R2]) を用いてトーション群 T/p^M の K に関するガロア・コホモロジー群の元の系が構成でき，志村曲線 X の reduction の様子から，これらの元の local component の様子が把握できる．

一方セルマー群 $\mathrm{Sel}_p(A/K)$ は $H^1(K, A)$ の，適当な local 条件を満たす部分であった．Weil pairing により，T は self Kummer dual となっている．そこで，セルマー群の元と，上で構成した元たちの間の pairing を global Tate duality を用いて考察することによりセルマー群 $\mathrm{Sel}_p(A/K)$ の大きさを制御することができ，求める結果を得る．

参考文献

[Be1] A. Besser, *CM cycles over Shimura curves*, J. Alg. Geom. **4**(1995), 659-691.

[Be2] A. Besser, *On finiteness of Ш for motives associated to modular forms*, Documenta Mathematica **2**(1997), 31-46.

[BK] S. Bloch and K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, in The Grothendieck Festschrift, I, Birkhauser(1990), 333-400.

[Bu] K. Buzzard, *Integral models of certain Shimura curves*, Duke Math. J. **87**(1997), 591-612.

[C] H. Carayol, *Sur les représentation l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4. **19**(1984), 409-468.

[D1] P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Seminaire Bourbaki exp. 389(1970/71) in Lecture Note in Math 244, Springer-Verlag (1971), 123-165.

[D2] P. Deligne, *Variétes de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modeles canoniques*, Proc. Symp. in Pure Math. **33**(1979), part 2, 247-290.

[J] U. Jannsen, *Mixed motives and algebraic K-theory*, Lecture Note in Math., vol. 1400, Springer Verlag (1988).

[Ka] K.Kato, preprint.

[Ko] V. A. Kolyvagin, *Euler systems*, The Grothendieck Festschrift **II**, Prog. Math. 87 (1990), 435-483.

[KS] M. Kuga and G. Shimura *On the zeta function of a fibre variety whose fibres are abelian varieties* Ann. of Math. **82** (1965), 478-539.

[N1] J. Nekovář, *Kolyvagin's method for Chow groups of Kuga-Sato varieties*, Invent. Math. **107** (1992), 99-125.

[N2] J. Nekovář, *Syntomic cohomology and p-adic regulators*, 1997, preprint.

[R1] K. Rubin, *The main conjecture*, Appendix to: Cyclotomic fields I and II, S. Lang, Graduate Text in Math **121**, Springer-Verlag, 1990, 397-419.

[R2] K. Rubin, a book in preparation.

[Shz] H. Shimizu, *On zeta functions of quaternion algebras*, Ann. of Math. **81**(1965), 166-185.

[Shr] G. Shimura, *Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves*, Ann. of Math. **85**(1967), 58-159.

[Y] S. Yasuda, preprint.