数理解析研究所講究録
1098 巻 1999 年 82-95

可解格子模型の手法による楕円的可換差分作用素系の構成*

長谷川浩司 (東北大学大学院理学研究科)
池田岳 (岡山理科大学理学部)
菊地哲也 (東北大学大学院理学研究科)

1 序

可換な偏微分 (または差分) 作用素の族を見いだし、その固有関数系を求めるという問題には長い歴史がある。古典力学的 n 自由度の系は n 個の独立な、相空間の上で互いに Poisson 可換な保存量を持つとき、完全積分可能系あるいは (Liouville の意味での) 可積分系とよばれる。変数の数だけの独立な可換微分方程式の系はその量子力学版と考えることができ、この意味でやはり可積分系とよばれることにもなる。その例は、古くから物理でも (量子多体問題) 数学でも (表現論) それぞれに興味深い問題であり、色々な系が見つけられてきた。しかし色々といってもそう勝手にはないことも経験的に知られてきている。ここではいわゆる Calogero(-Moser-Sutherland-...) 系を念頭においているが、この場合 [OOS] によれば、系の「ワイル群対称性」というべき自然な仮定の下ではむしろ知っているものでほとんど尽きていることが知られている。

ただし大事なことは、知っているものとはいっても、そこには必ずしも意味が明らかでないパラメータがいくつか存在していたということであろう。

ワイル群対称性を持つ系としては、群の指標や球函数のみたす微分方程式 (Harish-Chandra) を知っている。群 G そのもの、あるいは G の対称空間の上の関数への G のリー環の作用から、展開環の中心に対応する作用素として可換な作用素が生じ、その G 不変性からワイル群対称性をもつのであった。これらは群作用で不変な高階 Laplacian といえ、その固有値問題は群または対称空間上の測地線の方程式の量子化とも言える。
しかし、まず物理的には結合定数とよぶべきパラメータ β、そしてポテンシャルとして楕円函数が現れうるけれどもその modulus のパラメータ τ と、A 型の場合に限っても系はこれら 2 変数による拡張を許す。その事情を自然な状況設定からきもちよく理解したいと思うが、対称空間 (それはそもそも離散的にしかない) においては不変 Laplacian を「動径方向」で考えたとき、β は $2, 1, 1/2$ といった離散的な値しかとれず (なぜなら「ルートの重複度」の半分を現わすことになるので)、ポテンシャルにも三角関数しか出てこない (「ワイルの分母」で決るから)。またもとの系の差分化で、やはり可積分 (=可換) 系となるものが知られている (Macdonald)。差分の spacing のパラメータが新たに入ってくるが、これは理解できるだろうか？

一方可換な作用素を生むしくみとして、可解格子模型の理論においては、Yang-Baxter 方程式が重要であった [B][TF]。これについて少し復習しよう。

*本稿は長谷川による 1997 年度数学会「無限可積分系」セッション特別講演の予稿に加筆したものである.

そもそもこのしくみは Baxter により、行転送行列 (row-to-row transfer matrix) に対し用いられた。「原子」が N 個、1 次元的に並んでいるとする (いわゆる spin chain)：各原子の状態を表すベクトル空間 (有限次元) を V とすると、N 個の原子の状態の空間は $V\otimes\cdots\otimes V=V^{\otimes N}$ である。行転送行列は $T(u):V^{\otimes N}\to V^{\otimes N}$ という行列で、これら原子の相互作用を表す量と考えられるものである。u は相互作用のパラメータと思われる変数である。ここで別の適当な「補助空間」(auxiliary space) W と $W\otimes W$ に作用する行列 $R(u,u'):W\otimes W\to W\otimes W$、そしてより大きな行列

$$\mathcal{T}(u):W\otimes V^{\otimes N}\to W\otimes V^{\otimes N}$$

があって、次のようになっているとする。

- $T(u)=\mathrm{Tr}_W\mathcal{T}(u)$. すなわち、$W$ の基底 $\{v_i\}$ をとって $\mathcal{T}(u)$ の行列成分を考え $\mathcal{T}(u)=[\mathcal{T}(u)_{i,j}]_{i,j=1,\cdots,\dim W}$, $\mathcal{T}(u)_{i,j}\in\mathrm{End}(V^{\otimes N})$ とするとき、$T(u)=\sum_i\mathcal{T}(u)_{i,i}$.
- (Yang-Baxter 方程式、YBE)

$$R(u,u')\mathcal{T}_1(u)\mathcal{T}_2(u')=\mathcal{T}_2(u')\mathcal{T}_1(u)R(u,u'). \tag{1}$$

  ただし両辺は $W\otimes W\otimes V^{\otimes N}$ に作用していると考えている：ふたつの W を区別するために第 2 成分の W を W' と書けば、$\mathcal{T}_2(u')$ は $W\otimes W'\otimes V^{\otimes N}$ の第 2 成分 W' と第 3 成分 $V^{\otimes N}$ のみに作用する $1_W\otimes T(u')$ を表し、$\mathcal{T}_1(u)$ (resp. $R(u,u')$) も同様に第 1 成分 W と第 3 成分 $V^{\otimes N}$ のみに作用する (resp. 第 1 成分と第 2 成分のみに作用する) と考えている。よく行われるようにこの方程式はひもの絵で視覚的に表すのが一番わかりやすい。

すると $R(u,u')$ が可逆なら

$$R(u,u')\mathcal{T}_1(u)\mathcal{T}_2(u')R(u,u')^{-1}=\mathcal{T}_2(u')\mathcal{T}_1(u)$$

であるから、両辺の $W\otimes W$ 上のトレイスをとれば ($\mathrm{Tr}ABA^{-1}=\mathrm{Tr}B$ により！)

$$(\mathrm{Tr}_W\mathcal{T}(u))(\mathrm{Tr}_W\mathcal{T}(u'))=(\mathrm{Tr}_W\mathcal{T}(u'))(\mathrm{Tr}_W\mathcal{T}(u)),$$

すなわち $[T(u),T(u')]=0$. ($\mathcal{T}(u)$ の各成分、従ってそのトレイス $T(u)$ は、$V^{\otimes N}$ に作用する行列であることに注意。) したがって $T(u)$ を u で展開した係数として得られる行列も互いに可換となり、それらは generic には同時対角化できる。固有ベクトルは spin 系のエネルギー固有状態という意味をもつ。

明らかなことであるが、可換性には作用素の実現でなく関係式 (YBE) のみが重要である。したがって、適当な関数空間に作用する差分作用素からなる行列 $\mathcal{T}(u),\mathcal{T}(u')$ が Yang-Baxter 方程式をみたしていれば、それらのトレイスは全く同様に互いに可換になる。「YBE をみたす差分作用素の組」はまた、R から定義される双代数 (量子群) の表現の実現を与えるものとも言える。Yang-Baxter 方程式の解のうち、楕円函数で与えられる解 (楕円 R 行列) [Be] については、未だ三角関数解のときの量子展開環の理論にあたるものが整備されていない。そこで楕円 R 行列に対し、関係式 (1) をみたす差分作用素の組 $\mathcal{T}(u)$ (あとでは $L(u)$ と書く) を作っていたところ、可換微分作用素系の分類についての落合さんの話を聞く機会があった。ではトレイスを計算してみようということでやってみたのが本稿の話である。そして Macdonald の差分系の楕円函数係数への拡張である Ruijsenaars [R] の可換差分系が現れることがわかったというのが主結果である (定理 2)。

通常パラメータ β の入った系の場合は、可換な作用素達の候補を (対応する古典力学系からの類似などにより) 挙げておき、それらがほんとうに可換であることをポテンシャルのみたす関数等式に帰着させて示す。あるいは、考えている作用素達の完全な同時固有関数がみつかり、したがって系の作用素は同時対角化されるから可換であるというおそろしい証明もある (差分、マクドナルド系の場合)。くりかえしになるが、これらに比べてここでの方法は系の可換性が明白である点に特徴があるといえる。そのかわり、得られる作用素の具体形を出すところで、Jacobi のテータ関数についてあたらしい公式 (補題1) をひとつ用意しなくてはいけない。(実際そこで一番時間を消費した。)

我々の構成では、楕円 modulus τ 及び差分のパラメータ $\hbar$ は出発点となる Yang-Baxter 方程式の解 $R = R_{\tau,\hbar}$ のパラメータとして入ってくる。また、結合定数 β だが、これは関数空間への「量子群」$A(R)$ の表現のパラメータとしての意味をもち、その表現が l th symmetric tensor の表現と同値の場合、$\beta = -\frac{l}{n}$ となる (n は系の自由度の数、あるいは gl_n の n)。

かくして次のAとBに現われる可換な作用素の族が、互いに密接な関係にあることがわかる:

A) 表現論 : 帯球函数のみたす微分方程式 (Harish-Chandra) とその variants :

Calogero-Moser-Sutherland (微分作用素) / Olshanetsky-Perelomov (微分、楕円的)
Macdonald operators (差分作用素) / Ruijsenaars operators (差分、楕円的)

B) 格子模型 : Baxter の commuting transfer matrix

C) CFT (共形場理論): critical level の conformal block のみたす方程式

Cと書いた共形場理論とBの格子模型の関係は、物理的には前者が後者の「極限」だそうであるが、前者にあらわれる微分方程式 (Knizhnik - Zamolodchikov - Bernard (KZB) 方程式系 [FW][F]) が後者にあらわれる差分方程式の微分極限として得られるという言いかたもできる。すなわち差分の spacing のパラメータが 0 ($\hbar \to 0$) という極限である。

KZB 方程式系は genus > 0 のときの conformal block の満たす微分方程式であるが、これを臨界レベル[1] で考えたときその可積分系を Gaudin 模型と呼ぶことが多い [FFR] [shitan]。リーマン面が $\mathbf{P}^1$ であり、その上の N 点に頂点作用素が挿入されたときの conformal block を臨界レベルで考えたものが、いわゆる Gaudin 模型と等価だからである。そして楕円曲線上で $N = 1$ のとき、これは楕円 Calogero 系 (Olshanetsky-Perelomov 系 [OP]) になっている。これは式の上での観察でなっているのであるが、ともかくこれによってAとCとを結んで考えると、パラメータ τ はその上で共形場を考えている楕円曲線の modulus、β は挿入する頂点作用素の属する表現に由来する (一般にはスカラーでない) 量という理解ができる。

一方AとBの関係にもどると、ここでの定式化は格子模型 (B) において格子点が一点の場合に、その格子点におかれた「原子」の状態空間を関数空間で実現した場合 (A) の転送行列のいわば Schrödinger 描像と言うことができる。以上を敷衍すれば、N 点 Gaudin 模型は、格子点の数が N である inhomogeneous 1 次元スピン鎖 (の Schrödinger 表現) の微分極限と思うことができる。すなわち、A〜B〜Cにおいて現れる可換な作用素はすべて同一視されることとなる！いろいろなところから出てきた「可積分」と呼ばれるものが互いに等価であったというわけで、これはすばらしいことに違いない。

[1] 共形場理論 (Wess - Zumino - Witten 模型) において、理論の対称性としての affine Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の中心 C の値 (level) は理論に固有の、一般には複素数である。$C = -\check{g}$、ただし $\check{g}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の dual Coxeter number、のときを critical level (臨界レベル) と呼ぶ。$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{sl}}_n$ のときは $\check{g} = n$ であり、$C = -n$ が臨界レベルである。

もっとも、現在までのところ共形場理論の差分化の定式化にはまだ決定版がないと思われ、したがってそこから差分系である Macdonald 系、あるいは楕円・差分の場合である Ruijsenaars 系を導出することはまだされていない。これについて更に理解がのぞまれる。

2 Zoo of commuting differential/difference operators

Family of Commuting operators （A 型のワイル群対称性をもつ場合）

• 帯球函数の微分方程式 (Harish-Chandra '58 / Calogero'71 / Sutherland'72 / Moser'75)

$G/K = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_n$ とする。G 上両側 K 不変な関数であって、G 不変微分作用素たちの同時固有関数であるものを G/K の帯球函数 (zonal spherical functions) という。G のリー環が G 上の関数に微分作用素として作用するが、G 不変微分作用素は、G のリー環の展開環の中心元 $c \in Z(U(sl_n))$ の、この作用による像 D_c で得られる。そこで帯球函数 f の方程式は、

$$\begin{cases} f(kgk') = f(g) & (k, k' \in K, g \in G), \\ D_c f_\lambda = \chi_\lambda(c) f_\lambda & (c \in Z(U(sl_n))). \end{cases}$$

Chevalley の定理 $Z(U(sl_n)) \simeq C[c_2, \ldots, c_n]$(但し c_2 は Casimir 元、c_i は i 次の元.) により、後半は本質的に $n-1$ 個の連立方程式。$D_i := D_{c_i} (i = 2, \ldots, n)$ は (シンボルが) 代数的に独立な可換微分作用素となる。$G/K = \{$ 行列式 1 の実対称行列 $\}$ とみなすことにより、「動径」$K\backslash G/K$ の座標を代表元の固有値 $x_1, \cdots, x_n$ の対数 $u_1, \cdots, u_n$ にとることができる ($x_i = e^{u_i}, \sum_i u_i = 0$)。すると 2 次の作用素は次のように書ける。

$$D_2 = \Delta^{-\beta} \circ \left(\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial u_i})^2 + \beta(\beta - 1) \sum_{i<j} \frac{1}{\sin^2(u_i - u_j)} \right) \circ \Delta^{\beta}$$

ここで $\Delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$、また $\beta = 1/2$ である。$G/K = \mathrm{SL}_n(\mathbf{H})/\mathrm{Sp}_n$ のときも、上と同様にすると $\beta = 2$ の場合が現れる。($\beta = G/K$ の被約ルート系の重複度の半分。) これら帯球函数の方程式ではパラメータ β は固定されているが、パラメータを連続にしてもやはり可換性が保たれる。これは対称空間のルート系が A 型の場合関口次郎氏 (1974, [Se])、一般の場合は Heckman-Opdam (1987,[HO]) による。なお $\beta = 1$ の場合ポテンシャル項は 0 でつまらないが、これも $G = SL_n(\mathbf{C})$ の表現の指標 (= Schur 函数 = $G \times G$/diagonal G の帯球函数) の方程式と考えることができる。

他方、この方程式は物理学者によっても (おそらく独立に) 「可積分」な量子力学的多体問題のハミルトニアン (シュレディンガー作用素) として発見されていて、Calogero-Sutherland model などといわれる ([OP83] 参照)。さらに、D_2 の第 2 項 (ポテンシャル) は $1/\sin^2$ で書かれているが、これを適当に楕円化して可換にできることを Olshanetsky-Perelomov (1976,[OP]) は発見した。すなわち $\wp$ を Weierstrass のペエ函数として上の $1/\sin^2(u_i - u_j)$ を $\wp(u_i - u_j)$ で置きかえても、D_2 と可換でシンボルが互いに独立な作用素が $n-1$ 個存在し、この意味で「可積分」である。なおこの作用素の固有値問題は、$n = 2$ (1 変数) のときは Lamé 方程式に他ならない。

• Macdonald operators

上の帯球函数の方程式の差分化を与えるもので、I.G.Macdonald [M1] が導入した。

$$M_k(q, t) = \sum_{I \subset \{1, \ldots, n\}, |I| = k} \prod_{i \in I, j \in I^c} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_I \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\text{但し}\quad T_I = \prod_i T_i \qquad (T_i f)(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., qx_i, ..., x_n)$$

パラメータ (q,t) を $t = q^\beta$ としてしかるべく $q \to 1$ とすると、$\{M_k\}$ から上の $\{D_k\}$ が現れる。これについて、野海 [N] は G/K の「量子化」(q-version) をしかるべく定義することにより、$\{M_k\}$ が不変差分作用素の動径成分として解釈できることを示した。この解釈はしかし (q,t) が (q^2, q^4) あるいは (q^4, q^2) の場合に限られるといううらみがある。一方 Etingof-Kirillov [EK1] は、$t = q^\beta, \beta \in \mathbf{Z}_{>0}$ のときの Macdonald operators も $U_q(gl_n)$ の中心由来としてとらえられることを示した。これには対称空間ではなく、共形場理論に示唆された定式化が用いられる。また Cherednik [C92] によると、double affine Hecke 環の q 差分作用素による表現を考えると、その中心に対応する作用素としても M_k が再び実現される。

- Ruijsenaars' operators ([R],Macdonald operators の楕円化)

$$R_k = \sum_{I \subset \{1, \cdots, n\}, |I| = k} \left(\prod_{s \notin I, t \in I} \sqrt{\frac{\theta(c\hbar + \lambda_s - \lambda_t)}{\theta(\lambda, \lambda_s - \lambda_t)}} \right) T_I^\hbar \left(\prod_{s \notin I, t \in I} \sqrt{\frac{\theta(c\hbar + \lambda_t - \lambda_s)}{\theta(\lambda_t - \lambda_s)}} \right) \tag{2}$$

$(k = 1, \cdots, n)$. 但し $T_i f(\lambda_1, ..., \lambda_n) = f(\lambda_1, ..., \lambda_i + \hbar, ..., \lambda_n)$、また $x = e^{2\pi i u}, p = e^{2\pi i \tau}$ $(\mathrm{Im}\tau > 0)$ とするとき、Jacobi の theta 関数 $\theta(u)$ は次で与えられる。

$$\theta(u) := p^{1/8}(x^{1/2} - x^{-1/2}) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - xp^m)(1 - x^{-1}p^m)(1 - p^m).$$

Ruijsenaars は物理学者で、Macdonald の研究とは独立に Calogero-Sutherland 系の「相対論的」(物理的思い入れを別とすれば、単に差分的ということ) 拡張を研究してこのようなものに至ったようである。彼はこれらが可換となることを直接計算で示したが、その際鍵は Frobenius determinant formula (12) であった。

Ruijsenaars の作用素系は三角関数の場合 $(p \to 0)$ Macdonald の作用素系に退化する。この対応で、本稿の「Baxter の R-matrix に対する L-operator の trace」という実現方法が、先の Macdonald 作用素の場合の U_q の中心と Hecke algebra の中心とのどちらに近いかというと、前者の方 (Etingof-Kirillov 流 [EK2]) である。両者のアプローチに深い関係があるかというのは重要かもしれない問題である。

Family of symmetric functions (固有値問題の解)

以上の可換な作用素たちの同時固有関数として、それぞれ次のような対称多項式の族が生ずる。

- Macdonald polynomials $P_\Lambda(q, t|x)$：

  Macdonald operators の同時固有関数で、$x_1, \cdots, x_n$ の対称多項式。固有関数の名前 $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n)$ は、深さ n までのヤング図形でラベルされる (変数が n 個の場合)。$m_\Lambda(x)$ を orbit sum

$$m_\Lambda(x) = \sum_{\Lambda' \in S_n(\Lambda)} x_1^{\Lambda'_1} \cdots x_n^{\Lambda'_n}$$

(S_n は対称群) とし、また Λ, Λ' を自然に gl_n の weight space の元とみなすとき

$$\Lambda > \Lambda' :\Longleftrightarrow \Lambda - \Lambda' \in Q_+$$

(Q_+ は simple roots の非負整数和からなる半群) とすれば、$P_\Lambda(q,t|x)$ は次の展開をもつ固有対称多項式として特徴付けられる:

$$P_\Lambda(q,t|x) = m_\Lambda(x) + \sum_{\Lambda'<\Lambda} c_{\Lambda,\Lambda'} m_{\Lambda'}(x). \tag{3}$$

- Jack polynomials $J_\Lambda(\alpha|x)$ ：$P_\Lambda(q,t|x)$ において $q = t^\alpha (t = q^{1/\alpha})$ とし、$t, q \to 1$ としたもの。D_2 で $\beta = \alpha^{-1}$ とした作用素の固有関数である。

- Zonal spherical functions ：$J_\Lambda(\alpha|x)$ で、$\alpha = 2, 1/2$ の場合。それぞれ $G/K = SL_n(\mathbf{R})/SO_n$, $SL_{2n}(\mathbf{R})/Sp_n$ の帯球函数と考えられる。

- Schur polynomials $S_\lambda(x)$: $S_\Lambda(x) = J_\Lambda(1|x)$。また、$P_\Lambda(q,t|x)$ において $q = t$ としても得られる (パラメータは消える)。これは $GL_n(\mathrm{C})$ の有限次元既約表現 $(\rho_\Lambda, V_\Lambda)$ の character というのが最も素朴であろう：$x = \mathrm{diag}(x_1, ..., x_n)$ に対し、

$$S_\Lambda(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{tr}_{V_\Lambda} \rho_\Lambda(x).$$

- Hall-Littlewood polynomials $P_\Lambda(0, 1/p|x)$ (p は素数) : $G = GL_n(\mathbf{Q}_p), K = GL_n(\mathbf{Z}_p)$ に対する Hecke algebra $\mathrm{Fun}(K\backslash G/K)$ (積は合成積) から対称関数の環への Satake isomorphism とよばれるものがあり、それにより $K \cdot \mathrm{diag}(p^{\Lambda_1}, ..., p^{\Lambda_n}) \cdot K \in K\backslash G/K$ の characteristic function に対応する対称関数。

- Ruijsenaars system の固有関数系。これについては Section 4 で述べる。

なお、ここで名前があがった系の相互の関係について本稿の最後に表にしておく。

3 差分 L 作用素 — 系の母函数

自然数 $n > 1$ を固定する。$V = \oplus_{k\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \mathrm{C}e^k$ $(e^k = e^{k+n})$ とし、$g, h \in \mathrm{GL}(V)$ を $ge^k := e^k \exp\frac{2\pi i k}{n}, he^k := e^{k+1}$ とすれば、交換関係 $gh = hg\exp\frac{2\pi i}{n}$ を満たす。$\hbar, \tau \in \mathbf{C}, \hbar \neq 0, \mathrm{Im}\tau > 0$ とする。Belavin の楕円 R-matrix $R(u) = R_\hbar(u)$ は、以下の 5 つの条件を満たす唯一のものとして特徴づけられる。

- $R_\hbar(u)$ is a holomorphic $\mathrm{End}(\mathbf{C}^n \otimes \mathbf{C}^n)$ -valued function in u,
- $R_\hbar(u) = (x \otimes x) R_\hbar(u) (x \otimes x)^{-1}$ for $x = g, h$,
- $R_\hbar(u+1) = (g \otimes 1)^{-1} R_\hbar(u) (g \otimes 1) \times (-1)$,
- $R_\hbar(u+\tau) = (h \otimes 1) R_\hbar(u) (h \otimes 1)^{-1} \times (-\exp 2\pi i(u + \frac{\hbar}{n} + \frac{\tau}{2}))^{-1}$,
- $R_\hbar(0) = P : x \otimes y \mapsto y \otimes x$.

実際、1) これらを満たす R が唯一存在し、2) それは Yang-Baxter 方程式を満たすことが (函数論的方法により) 示される。

以下の関係を満たす “L 作用素” $L(u)=[L(u)^i_j]_{i,j=1,\cdots n}$ を考える。

$$\check{R}(u-v)L(u)\otimes L(v)=L(v)\otimes L(u)\check{R}(u-v), \tag{4}$$

但し $\check{R}(u):=PR(u)$.

Belavin の R-matrix に対して、そのような L が以下のように構成できる。$\mathbf{h}^*$ を $sl_n(\mathbf{C})$ のウェイト空間とする。$\mathbf{h}^*$ は $\mathbf{C}^n=\oplus_{i=1,\cdots,n}\mathbf{C}\epsilon_i$ $(<\epsilon_i,\epsilon_j>=\delta_{i,j})$ に、$\sum_{i=1,\cdots,n}\epsilon_i$ の直交補空間として実現しておき、ϵ_i の $\mathbf{h}^*$ への直交射影を $\bar{\epsilon}_i$ とする。

各 $\lambda,\mu\in\mathbf{h}^*$ と $j=1,\cdots,n$ について、次の量を定義する。

$$\phi(u)^{\mu}_{\lambda j}:=\begin{cases}\theta_j(\frac{u}{n}-<\lambda,\bar{\epsilon}_k>) & :\mu-\lambda=\hbar\bar{\epsilon}_k \quad \text{for some } k=1,\cdots,n,\\ 0 & :\text{otherwise}\end{cases} \tag{5}$$

但し

$$\theta_j(u):=\sum_{\mu\in\frac{n}{2}-j+n\mathbf{Z}}\exp 2\pi i(\mu(u+\frac{1}{2})+\frac{\mu^2}{2l}\tau)$$

である。また、$\bar{\phi}(u)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k,j}_{\mu}$ を、行列 $[\phi(u)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k}_{\mu}{}_j]_{j,k=1,\cdots,n}$ の逆行列として定義する：

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{\phi}(u)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k j}_{\mu}\phi(u)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_{k'}}_{\mu}{}_j=\delta_{k,k'},\qquad \sum_{k=1}^{n}\phi(u)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k}_{\mu}{}_j\bar{\phi}(u)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k j'}_{\mu}=\delta_{j,j'}. \tag{6}$$

定理 1 ([IK][BKMS][QF][H1][H2]) $\mathbf{h}^*$ 上の函数 f に対し、

$$(L(c|u)^i_j f)(\mu):=\sum_{k=1,\cdots,n}\phi(u+c\hbar)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k}_{\mu}{}_j\bar{\phi}(u)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k,i}_{\mu}f(\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k) \tag{7}$$

とおく。すると任意の $c\in\mathbf{C}$ に対し、この差分作用素を並べてできる行列 $L(c|u)=[L(c|u)^i_j]_{i,j=1\cdots,n}$ は、先の関係式 *(4)* を満たす。すなわち、$L(c|u)$ は *L-operators の 1-parameter (in c) family* を与える。 □

この L 作用素は、$n=2$ のときは Sklyanin [S] が得ている。量 $\phi(u+c\hbar)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k}_{\mu}{}_j,\bar{\phi}(u)^{\mu+\hbar\bar{\epsilon}_k,i}_{\mu}$ は “intertwining vector” と呼ばれ、まず $n=2$ のとき [Bax71] で格子模型の spin chain (eight vertex model) を face model に変換するために用いられ、その後神保ら [JMO1] により n state Belavin R matrix の変換として $A^{(1)}_{n-1}$ 型 face model を構成するに際し一般化された。

$\mathcal{M}(\mathbf{h}^*)$ を $\mathbf{h}^*$ 上の有理型函数の全体とする。すると上の L-作用素は $V\otimes\mathcal{M}(\mathbf{h}^*)$ を決めるから、

$$L(c|u)\in\mathrm{End}(V\otimes\mathcal{M}(\mathbf{h}^*))$$

と思うことができる。そしてこのはじめの成分 $V=\mathbf{C}^n$ は、関係式 (4) で定義される双代数 $A(R)$ の「定義余加群」(vector “co”representation) と考えられる。量子逆散乱法の研究で出てきた “fusion procedure” によれば、より複雑な $A(R)$ 余加群が Young 図形 Y ごとに構成できる。それを $V(Y)$ と書けばその次元は Y に対応する GL_n-加群のそれと等しい [KRS][C]。$V(Y)$ は実際には、$V(\square)=V=\mathbf{C}^n$ の適当なテンソル積の sub/quotient をとることで構成される。これより、一般に各 Young 図形 Y ごとに、作用素

$$L^Y(c|u)\in\mathrm{End}(V(Y)\otimes\mathcal{O}(\mathbf{h}^*))$$

が、$LLR = RLL$ 関係式を満すように存在する。

$$\check{R}^{Y,Y'}(u-v)L^{Y}(c|u)\otimes L^{Y'}(c|v) = L^{Y'}(c|v)\otimes L^{Y}(c|u)\check{R}^{Y,Y'}(u-v), \tag{8}$$

ここで $\check{R}^{Y,Y'}$ は、同じ手続きで R から構成される "fused R-matrices" と呼ばれるもので、generic な u, u' に対して $A(R)$-comodules の同型 $\check{R}^{Y,Y'}(u,u') : V(Y)\otimes V(Y') \to V(Y')\otimes V(Y)$ を与える。(これらの構造は $R(u)$ が e^{u} の三角函数解のときにはよくしられた量子展開環の議論から自然に理解される。)

さて、この $L^{Y}(c|u)$ のトレイスをとったらどんな作用素になるだろうか、というのが問題である。以下 $Y = 1^{k}$ (縦に k 個のヤング図形) の時を特に考える。すると $L^{1^k}(c|u)$ はサイズ $\dim \wedge^{k}\mathbf{C}^{n}$ の、成分が差分作用素であるような行列と考えられる。

定理 2 ([H3]) *1.)* $M_k(c|u) := \mathrm{Tr}_{1^k}L^{1^k}(c|u) \quad (k = 1,\cdots,n)$ と書く。すると

$$M_k(c|u) = \frac{\theta(u+\frac{kc\hbar}{n})}{\theta(u)}\sum_{I\subset\{1,\cdots,n\},|I|=k}\left(\prod_{s\notin I,t\in I}\frac{\theta(<\lambda,\bar{\epsilon}_s-\bar{\epsilon}_t>+\frac{c\hbar}{n})}{\theta(<\lambda,\bar{\epsilon}_s-\bar{\epsilon}_t>)}\right)T_I^{\hbar}, \tag{9}$$

但し $T_I^{\hbar}$ は *$\hbar$-shift operator:*

$$(T_i^{\hbar}f)(\lambda) := f(\lambda+\hbar\bar{\epsilon}_i), \quad T_I^{\hbar} := \prod_{i\in I}T_i^{\hbar}.$$

2.) $p = \exp 2\pi i\tau,\ q = \exp 2\pi i\hbar\ (|q|<1)$ とする。また $z_j := \exp 2\pi i <\lambda,\bar{\epsilon}_j>$ として

$$\Phi(\lambda) := \prod_{k\neq k'}d^{+}(z_k/z_{k'}), \quad \text{ただし } d^{+}(z) := \prod_{k=0}^{\infty}\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1-zq^{m+1}p^{k}}{1-zq^{m+g+1}p^{k}}\frac{1-z^{-1}q^{m-g}p^{k+1}}{1-z^{-1}q^{m}p^{k+1}} \tag{10}$$

と定める $(g = -c/n)$。すると $M_k(c|u)$ の $\Phi^{1/2}$ による *conjugation* は *Ruijsenaars* の *commuting operators (2)* を与える：

$$\left(\frac{\theta(u+\frac{kc\hbar}{n})}{\theta(u)}\right)^{-1}\cdot\Phi^{-1/2}\circ M_k(c|u)\circ\Phi^{1/2} = R_k.$$

□

系 1 : $*:$ を *normal ordering* "差分を右" とすると、M_k の母函数は次の表示を持つ。

$$\sum_{k=0}^{n}(-t)^{n-k}M_k(c|u) =: \det[L(c|u)-t] :.$$

□

トレイスをとってできたものとして、(8) より作用素 $M_k(c|u)$ $(k=1,\cdots,n)$ は明らかに互いに可換である。注目すべき点として、$M_k(c|u)$ (9) においては、spectral parameter u は overall でのみ現われていることがある。また、三角極限はあきらかに Macdonald 作用素となるが、そのとき parameters の対応は $q = \exp 2\pi i\hbar,\ t = q^{-c/n}$ となっている。

定理において、作用素の具体形を得る部分はきわめて計算的であるが、ひとつ面白い点は次の「和を積に変える」公式が自然に必要になることである。

補題 1 $Y_{r<s} := 1$ *if* $r < s$, $Y_{r<s} := 0$ *otherwise*、とする。次の公式が成りたつ：

$$\det\left[\prod_{r=1}^{k}\theta\left(\mu_r - \lambda_{s'} + \hbar Y_{r<s} + \delta_{r,s}(u-(s-1)\hbar)\right)\right]_{s,s'=1,\cdots,k} \tag{11}$$
$$= \prod_{s=1}^{k-1}\theta(u-s\hbar)\prod_{1\le s<s'\le k}\theta(\lambda_{s'}-\lambda_s)\theta(\hbar+\mu_s-\mu_{s'}).$$

□

これは k について帰納的に、函数論的方法で示すことができ、Cauchy 型行列式 (Frobenius 行列式 [Frob]) 公式の一般化になっている。実際 $\hbar = 0$ とすると、両辺を $\theta(u)^k\prod_{1\le s<s'\le k}\theta(\lambda_{s'}-\lambda_s)$ で割ることで

$$\det\left[\frac{\theta(\mu_s-\lambda_{s'}+u)}{\theta(\mu_s-\lambda_{s'})\theta(u)}\right]_{s,s'=1,\cdots,k} = \frac{\prod_{1\le s<s'\le k}\theta(\mu_s-\mu_{s'})\theta(\lambda_{s'}-\lambda_s)}{\prod_{s,s'=1,\cdots,k}\theta(\mu_s-\lambda_{s'})} \tag{12}$$

となる。

なお Ruijsenaars 自身による作用素の可換性の直接証明にはこの $\hbar = 0$ の場合の式だけで十分であり、少し不思議に思える。

4 対称テータ函数からなる不変空間の構造

原理的には、Macdonald の差分系の楕円函数的拡張が (Ruijsenaars 系として) ある以上は、その固有関数として Macdonald 多項式の楕円拡張もまた考えられてしかるべきである。ところが計算をしてみると、Macdonald 作用素の場合のような「三角性」(3) がもはや成り立たない。この事情により、対角化の問題は Macdonald 作用素のときとは格段に難しくなっているように思われ、これは微分版でも同様である。Ruijsenaars 系を与えるしくみとしてここでは「楕円 R 行列の表現論」に依ったが、そのもっとも単純な 2 状態の場合、R 行列は spin 系としては XYZ spin chain を定める Boltzmann 荷重と思うことができる。spin 系と比較すると、格子点の数が 1(!) の場合がわれわれの問題と等価なのだが、そもそも XYZ spin chain を Faddeev-Takhtajan [TF] が解いたときにも三角性のないことが大きな困難なのだった。

そんなわけで対角化については今後の研究課題であるが、以下のことは比較的容易に示すことができる。l を非負整数とし、アフィン・リー環 $A_{n-1}^{(1)}$ の level l 既約指標の張る空間を $Th_l^{S_n}$ と書く [Kac]。これは対称テータ函数からなる $\frac{(l+n)!}{l!n!}$ 次元の空間である。これについて、

定理 3 ([H2][H3]) *1)* $L(l|u)^i_j Th_l^{S_n} \subset Th_l^{S_n}$, *したがって* $M^{(k)}(l|u)Th_l^{S_n} \subset Th_l^{S_n}$.
2) 双代数 $A(R)$ の表現空間として、

$$Th_l^{S_n} \simeq V(\square \overset{l}{\cdots} \square)$$

但し、右辺は *fusion procedure* によって定義される l^{th} *(ℏ–) symmetric tensor representation.*

なお系の固有函数を求める問題は、格子模型と等価であることを考えれば、"Bethe Ansatz" 的に扱うこともできる。([FV]) しかし実際には Bethe Equation を具体的に解くことは不可能と思われ、マクドナルド系の場合の結果がどこまで同様に拡張されるかはよくわからない。

5 他の対称性への拡張: C_2 型の場合

以上で出発点とした Yang-Baxter 方程式の楕円函数解をとりかえることを考える。ここで (1) (で $T=R$ としたもの) については、Belavin-Drinfeld による分類結果があり、前出の Belavin 解しかないことが知られている。A 型以外の楕円函数解を得るためには、方程式 (1) をいわゆる「面型」(face version) の方程式に拡張することが必要である ([JMO2])。

A 型のときは先に述べた通り、intertwining vectors を並べた行列による similarity 変換によって、 Belavin 解 R は面型解 (face 模型の Boltzmann weight) W に変換される (vertex-face 対応)。この変換を L 作用素にも施したものを $\tilde{L}$ とすれば、$\tilde{L}$ は面型解 W に対して Yang-Baxter 方程式 (面型) を満たす。そして $\tilde{L}$ は L から similarity 変換で得られているから、両者のトレイスとして得られる差分作用素は一致する。

このように面型 Yang-Baxter 方程式によって A 型の場合を述べ直しておくと、他の対称性の場合にも拡張できる見方となり、それは楕円曲線上の臨界レベルの共形場における KZB 方程式の知識にも適っている：その場合の可積分性は力学変数にも依存するような楕円函数的 classical r 行列で記述される Lax 形式から従うが (いわゆる dynamical r- struture; Sklyanin, Avan, Nekrasov, Felder, Enriquez ら)、その classical r 行列は面型解から $q\to 1(\hbar\to 0)$ の極限で得られる。以下の面型解に現われるパラメータ $\lambda,\cdots$ は最終的に差分可積分系の独立変数となるという意味で力学変数であるが、これが $q\to 1$ の極限で classical r 行列のもつ力学変数になる。尚、この「力学」はもともと楕円曲線上の共形場において「ゲージ群」の従う変換性を変化させる (主 G 束の moduli 方向の変形を記述する) という「力学」と言うべきである ([黒木])。

ここでは以上のアイデアを用いて C_2 型ワイル群不変な、楕円関数係数の可換な差分作用素の組 [vD] を構成した結果について述べる [HIK]。

$\mathfrak{h}$ を単純 Lie 環 $\mathfrak{g}:=\mathfrak{sp}(4,\mathbf{C})$ の Cartan 部分環とし、$\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}$ の双対空間とする。$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ のルート系を $R:=\{\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_2,\pm2\varepsilon_1,\pm2\varepsilon_2\}\subset\mathfrak{h}^*$ で表わす。$\mathfrak{h}^*$ 上の双線形形式 $(,)$ を $(\varepsilon_j,\varepsilon_j)=\frac{1}{2}\delta_{jk}$ で定義する。基本ウエイトを $\Lambda_1=\varepsilon_1,\Lambda_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ で与える。基本表現 $L(\Lambda_d)$ のウエイトがなす集合を $\mathcal{P}_d$ とおくと、$\mathcal{P}_1=\{\pm\varepsilon_1,\pm\varepsilon_2\},\quad \mathcal{P}_2=\{\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\}\cup\{0\}$ であり、このとき各ウエイトの重複度は 1 である。

複素数 $\hbar$ を任意に固定する。神保-三輪-尾角の $C_2^{(1)}$ 型の face 模型の Boltzmann weight を fusion procedure により拡張したものを、4 つのウエイトの組 $\lambda,\mu,\nu,\kappa\in\mathfrak{h}^*$ に対して、$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ とスペクトルパラメータ $u\in\mathbf{C}$ の関数 $W_{dd'}\left(\begin{array}{cc|c}\lambda&\mu&\\ \kappa&\nu&\end{array} u\right)$ で表わす。これは $\mu-\lambda,\nu-\kappa\in\widehat{\mathcal{P}}_d$, $\kappa-\lambda,\nu-\mu\in\widehat{\mathcal{P}}_{d'}$ $(d,d'=1,2)$ でないとき $W_{dd'}\left(\begin{array}{cc|c}\lambda&\mu&\\ \kappa&\nu&\end{array} u\right)=0$ であり、さらに面型の Yang-Baxter 方程式を満たす。ここで $\hat{p}:=2\hbar p\ (p\in\mathcal{P}_d)$ とし、$\widehat{\mathcal{P}}_d=\{\hat{p}\,|\,p\in\mathcal{P}_d\}$ とする。(ここで、d あるいは d' が 2 の場合への拡張は、$L(\Lambda_2)$ に対応する fusion を用いて行う。先回りをすると、$L(\Lambda_2)$ の weight 0 subspace が N 次元であると、結果として得られる差分系は N 成分ベクトル値関数に対するものとなる。C_2 に限ったのは、この場合は上に述べたように $N=1$ であり、スカラー関数に対する系が得られるからである。)

定理 4 $\mathfrak{h}^*$ 上の関数に働く作用素 $M_d(u)$ $(u \in \mathbf{C}, d=1,2)$ を

$$M_d(u) := \sum_{p \in \mathcal{P}_d} W_{d2}\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda+\widehat{p} & \\ \lambda & \lambda+\widehat{p} & u \end{array}\right) T_{\widehat{p}}, \quad T_{\widehat{p}} f(\lambda) := f(\lambda+\widehat{p})$$

と定めると、$[M_d(u), M_{d'}(v)] = 0 \ \ (d, d' = 1,2,\ u, v \in \mathbf{C})$ が成り立つ。

さらに、具体形は次の通り: M_1, M_2 について u のみに依存する関数 $F(u), G(u), H(u)$ が存在し、$\widetilde{M_1} := F(u)M_1(u)$, $\widetilde{M_2} := G(u)M_2(u) - H(u)$ は u によらず、以下で与えられる。

$$\widetilde{M_1} = \sum_{p \in \mathcal{P}_1} \prod_{\substack{q \in \mathcal{P}_1 \\ q \neq \pm p}} \frac{\theta(\lambda_p - \lambda_q - \hbar)}{\theta(\lambda_p - \lambda_q)} T_{\widehat{p}}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{M_2} \ = \ \sum_{\substack{p,q \in \mathcal{P}_1 \\ p+q \in \mathcal{P}_2 - \{0\}}} & \Big(\frac{\theta(\lambda_p - \lambda_q - \hbar)}{\theta(\lambda_p - \lambda_q + \hbar)} T_{\widehat{p}+\widehat{q}} \\ & + \frac{\theta(2\hbar)}{\theta(6\hbar)} \frac{\theta(2\lambda_p + 2\hbar)}{\theta(2\lambda_p)} \frac{\theta(2\lambda_q + 2\hbar)}{\theta(2\lambda_q)} \frac{\theta(\lambda_p - \lambda_q - 5\hbar)}{\theta(\lambda_p - \lambda_q + \hbar)} \frac{\theta(\lambda_p - \lambda_q + 2\hbar)}{\theta(\lambda_p - \lambda_q)} \Big). \end{aligned}$$

ここで $\lambda_p := (\lambda, p)$ であり、$\widetilde{M_2}$ における和は $(p,q) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2), (\varepsilon_1, -\varepsilon_2), (-\varepsilon_1, \varepsilon_2), (-\varepsilon_1, -\varepsilon_2)$ をわたる。

$\hbar \to 0$ における $\widetilde{M_1}$ の $\hbar^2$ の係数として、微分作用素

$$H = \partial_1^2 + \partial_2^2 + 4\{(\log\theta)''(\lambda_1 - \lambda_2) + (\log\theta)''(\lambda_1 + \lambda_2)\}$$

が現われる。これは Olshanetsky-Perelomov 系の BC 型のハミルトニアン [OP83] においてパラメータ (coupling constant) を特別な値にした特殊化である。この意味で $\widetilde{M_1}$, $\widetilde{M_2}$ は 2 変数 Olshanetsky-Perelomov 系の差分化を与えている。

A 型の場合と同様に、この作用素の組が affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sp}}(4, \mathbf{C})$ のレベル 1 の指標が張る空間を保つことも確かめられた。$Q^\vee, P^\vee$ をそれぞれ双対ルート格子、双対ウエイト格子とする。$\beta \in P^\vee$ に対し $\mathfrak{h}^*$ 上の関数への作用素 $S_\beta, S_{\tau\beta}$ を $(S_\beta f)(\lambda) := f(\lambda+\beta)$, $(S_{\tau\beta} f)(\lambda) := \exp[2\pi i((\lambda,\beta) + \tau(\beta,\beta)/2)] f(\lambda+\tau\beta)$ で定める。また $W \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のワイル群とし、W 不変な (レベル 1 の) テータ関数の空間 Th_1^W を次で定義する:

$$Th_1^W := \{f : \mathfrak{h}^* \text{上正則} \,|\, S_{\tau\alpha} f = S_\alpha f = f, f(w\lambda) = f(\lambda) \ \forall \alpha \in Q^\vee, w \in W\}.$$

定理 5 差分作用素 M_d $(d=1,2)$ はテータ関数の空間 Th_1^W を保つ.

6 おわりに

Yang-Baxter 方程式の楕円函数解に付随する代数系については、最近 Fronsdal にはじまり神保、白石、小竹、今野あるいは B. Enriquez, E. Frenkel, N. Reshetikhin その他による研究の結果、quasi Hopf algebra の枠内で定式化がなされつつある。本稿における構成も将来はそれらの立場からより普遍的な理解がなされるべきであろう。一方、C_2 型の場合の構成をより一般に拡張できるか (ランクを上げられるか、パラメータがどこまで入るか) も興味深い。C_2 型 (BC_2 型) の場合、van Diejen および Hikami らによれば 10 個のパラメータをもつ組に拡張できるのであるが、これはその全てが共形場/格子模型の枠内で理解できるかどうかという問である。

参考文献

[B] R.J.Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics,* Academic, London (1972).

[Bax71] R.J.Baxter, "Partition function of the eight vertex lattice model", Ann. Phys.**70** (1972) 193-228.

[BKMS] V.V.Bazhanov, R.M.Kashaev, V.V.Mangazeev and Yu.G.Stroganov, "$(\mathbf{Z}_N\times)^{n-1}$ generalizaton of the Chiral Potts model", Comm. Math. Phys. 138, 393-408(1991).

[Be] A.A.Belavin, "Dynamical symmetry of integrable quantum systems", Nucl. Phys. B180 [FS2] 189-200 (1981).

[C] I.V.Cherednik, "On the properties of factorized S matrices in elliptic functions", Sov. J. Nucl. Phys. (Engl.transl.) **36** (2), 320-324 (1982) ; "Some Finite dimensional representation of generalized Sklyanin algebras", Funct. Annal. and Appl. (Engl. transl.) **19**, 77-79 (1985) ; "On "quantum" deformations of irreducible finite-dimensional representations of gl_N", Sov. Math. Dokl. (Engl. transl.) **33**, 507-510 (1986)

[C92] I.V.Cherednik, " Double affine Hecke algebras, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Macdonald's operators", International Mathematics Research Notices (Duke Math.), 1992 No.9, pp171-180.

[vD] J.F.van Diejen, "Integrability of difference Calogero-Moser sysytems", J. of Math. Phys. **35** (1994), 2983-3004.

[EK1] P.I.Etingof and A.A.Kirillov Jr., "Macdonald's polynomials and representations of quantum groups", Math. Res. Lett. **1**(1994) 3, 279-296.

[EK2] P.I.Etingof and A.A.Kirillov Jr., "On the affine analogue of Jack's and Macdonald's polynomials", Duke Math. J. **78** (1995) 5, 611-628.

[FFR] Feigin, B., Frenkel, E. and Reshetikhin, N., *Gaudin model, Bethe Ansatz and critical level,* Commun. Math. Phys. **166** (1994), 27–62.

[F] Giovanni Felder, "The KZB equations on Riemann surfaces", hep-th/9609153.

[FV] G. Felder, A. Varchenko "Algebraic integrability of the two-body Ruijsenaars operator" q-alg/9610024.

[FW] G Felder and C Wieczerkowski, "Conformal blocks on elliptic curves and the Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equations", Comm. Math. Phys. **176**(1996) 133-162.

[Frob] G. Frobenius, "Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art", J. für die reine und angew. Math. 93 (1882) 53-68.

[H1] K.Hasegawa, "On the crossing symmetry of the elliptic solution of the Yang-Baxter equation and a new L operator for Belavin's solution", J.Phys. A: Math. Gen. 26 (1993) 3211-3228.

[H2] K.Hasegawa, " L-operator for Belavin's R-matrix acting on the space of theta functions", J.Math.Phys. **35**(11), 6158-6171 (1994).

[H3] K.Hasegawa, " Ruijsenaars' commuting difference operators as commuting transfer matrices", to appear in Comm. Math. Phys.

[HIK] K. Hasegawa, T. Ikeda, T. Kikuchi, "Commuting difference operators arising from the elliptic $C_2^{(1)}$ - face model", in preparation.

[城崎] 「城崎セミナー：可換微分・差分作用素系」(1995.8.21-25) 報告集、重点領域研究「無限可積分系」レクチャーノートシリーズ No.16

[HO] G. J. Heckman, E. M. Opdam, "Root system and hypergeometric functions IV", Comp. Math. **67** (1988) 191-209.

[IK] A,G.Izergin and V.E.Korepin, Lattice version of quantum field theory models in two dimensions, Nucl. Phys. B205 [FS5] 401-413 (1982).

[J] M.Jimbo, "A q-difference analog of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation", Lett. math. Phys.**10**, 63-69 (1985).

[JMO1] M.Jimbo, T.Miwa and M.Okado, "Local state probabilities of solvable lattice models: An $A_n^{(1)}$ family", Nucl. Phys. B300 [FS22] 74-108 (1988).

[JMO2] M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, Solvable lattice models related to the vector representation of classical simple Lie algebras, Commun. Math. Phys. **116** (1988), 507–525.

[Kac] V.G.Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*(3rd ed). Cambridge 1990.

[黒木] 黒木 玄「共形場理論の定式化について」数理研講究録『群の表現論と等質空間上の解析学』929 (1995).

[KRS] P.P.Kulish,N.Yu.Reshetikhin and E.K.Sklyanin,. "Yang-Baxter equation and representation theory I", Lett. math. phys. **5**, 393-403(1981).

[M] I.G.Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*(2nd ed.), Oxford Univ. Press (1995).

[M1] I.G.Macdonald, "A new class of symmetric functions", in *Actes Seminaire Lotharringen*, Publ. Inst. Rech. Math. adv., Strasbourg (1988), 131-171.

[OOS] H.Ochiai, T.Oshima and H.Sekiguchi, "Commuting families of symmetric differential operators", Proc. Japan-Acad. Ser. A 70 (1994) no.2, 62-66.

[OP] M.A.Olshanetsky and A.M.Perelomov, "Completely integrable Hamiltonian systems connected with semi-simple Lie algebras", Inv. Math. (1976) 93-108.

[OP83] M.A.Olshanetsky and A.M.Perelomov, "Quantum integrable finite -dimensional systems related to Lie algebras", Phys. Rep. **94** (6) 1983, 313-404.

[QF] Y.Quano and A.Fujii, 'Yang-Baxter equation for $A_{n-1}^{(1)}$ broken $\mathbf{Z}_N$ models" Modern Phys. Lett. A vol 8, No 17(1993) 1585-1597.

[R] S.N.M.Ruijsenaars, "Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities", Comm.Math.Phys. **110**(1987), pp191-213.

[shitan] "nntp://shitan.math.tohoku.ac.jp" (130.34.108.128) における議論の、主として黒木氏による集成 (重点領域研究「無限可積分系」レクチャーノートシリーズ No.13)

[Se] Jiro Sekiguchi, "Zonal sperical functions on some symmetric spaces", Publ. RIMS. Kyoto Univ. **12** Suppl. (1977), 455-464.

[S] E.K.Sklyanin, "Some algebraic structure connected with the Yang-Baxter equation", Funct. Anal. and Appl. (Engl. transl.) **16**, 27-34 (1982); **17**, 273-284 (1983).

[TF] L.A.Takhtadzhan and L.D.Faddeev, "The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model" (English translation), Russian math. surveys 34:5 (1979) 11-68.

各可積分系・対称多項式の関係 (A 型)