数理解析研究所講究録
1099 巻 1999 年 96-118

非可換物理量の同時測定について

林 正人 [1] 京都大学 理学研究科 数学教室

概 要

量子力学では, 非可換な物理量を同時に測定することは不可能であると言われる. これは数学的には非可換な物理量の同時対角化が不可能であることに起因する. 本論文では, POVM(正作用素値測度) を用いて同時測定を緩い条件で定式化し, その上でその同時測定の共分散の下限を与える. 本稿で与える下限は Holevo [3] により与えられた下限よりも良く, 長岡 [5] により 2 つの物理量の同時測定のときに与えられた下限の一般化になっている. なお, 物理量の同時測定の定式化には様々な方法があり, あくまでもここで述べられるものはそのうちの 1 つである.

1 問題の定式化

$\mathcal{H}$ を対応する量子系の表現空間とする. このとき測定対象となる量子系の状態は $\mathcal{H}$ 上の非負定値で trace が 1 となる自己共役作用素 S で表される. そして, 状態の集合を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で表し, そのような S のことを密度演算子と呼ぶことにする. 一般に量子系の測定値のなす集合が Ω であるとき, 測定は次の条件を満たす $\mathcal{F}$ 上の σ-algebra $\mathcal{F}(\Omega)$ から $\mathcal{H}$ 非負定値な自己共役作用素への写像 M で与えられる.

- $\forall B \in \mathcal{F}(\Omega) \quad M(B) = M(B)^* \geq 0$ (self-adjoint 非負定値) ,
- $M(\emptyset) = 0, \ M(\Omega) = \mathrm{I}$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j)$ を満たす加算個の集合列 $\{B_j\} \subset \mathcal{F}(\Omega)$ に対し $\displaystyle\sum_j M(B_j) = M\left(\bigcup_j B_j\right)$.

このような条件を満たす M は正作用素値測度 (Positive Operator-Valued Measure, POVM) と呼ばれ, 量子系で情報理論や統計的推測を展開するための基礎的概念となる. そして, 状態 S を測定 M で測定したときに測定値が $B \in \mathcal{F}(\Omega)$ に含まれる確率は $\mathrm{Tr}\, SM(B)$ で与えられる. さらに任意の $B \in \mathcal{F}(\Omega)$ にたいして $M(B)$ が $\mathcal{H}$ 上の射影であるとき, M は射影値測度 (Projection-Valued Measure, PVM) と呼ばれる. そして以下の Naǐmark の拡張定理 [6] により, 任意の POVM はより広い空間上の PVM と見なすことが可能となる.

定理 1 (Naǐmark の拡張定理) *任意の $\mathcal{H}$ 上の POVM M に対して, 以下の条件を満たす $\mathcal{H}$ を含む Hilbert 空間 $\mathcal{H}'$ と $\mathcal{H}'$ 上の PVM E が存在する.*

$$PE(B)P = M(B), \quad \forall B \in \mathcal{F}(\Omega).$$

ただし, P は $\mathcal{H}'$ から $\mathcal{H}$ への射影を表す.

今後上記の条件を満たす $(\mathcal{H}', P, E)$ の組を M の Naǐmark 拡張と呼ぶことにする. そして量子力学系では物理量は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 X で表される. 今後物理量とそれに対応する自己共役作用素 X を同一視することにする. そして物理量 X の測定は以下の条件を満たす POVM M と考えることができる.

$$X = \int_{\mathbb{R}} x M(dx). \tag{1}$$

条件 (1) の下で状態 $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に測定を行ったときの分散は

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \,\mathrm{Tr}(M(dx)S) - (\mathrm{Tr}\, XS)^2$$

[1] e-mail address: masahito@kusm.kyoto-u.ac.jp

となる. (1) を満たす POVM M について

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} (x-X) \operatorname{Tr} M(dx)(x-X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \operatorname{Tr} M(dx) - X^2$$

となる. したがって任意の状態 $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ について

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \operatorname{Tr}(M(dx)S) \geq \operatorname{Tr} X^2 S. \tag{2}$$

となる. 任意の状態 $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ について (2) で等号が成立するために必要十分条件は M が X のスペクトル分解 E_X になるときである. したがって, 物理量 X の測定は X のスペクトル分解 E_X で考えればよい. 次に複数の物理量 $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_d)$ の同時測定を考えてみることにする.

$$X_i = \int_{\mathbb{R}^d} x_i M(dx). \tag{3}$$

を満たす PVM M を $\mathbf{X}$ の同時測定と定義したい所であるが, $\mathbf{X}$ の各要素が可換でないと (3) を満たす PVM M は存在しない. しかし (3) を満たす POVM M は存在するので (3) を満たす POVM M を $\mathbf{X}$ の同時測定 (Simultaneous Measurement,SM) と呼ぶことにする. $\mathbf{X}$ の同時測定 M の共分散行列は

$$\int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j \operatorname{Tr} SM(dx) - (\operatorname{Tr} X_i S)(\operatorname{Tr} X_j S). \tag{4}$$

で与えられる. 1つ目の物理量 X_1 の分散を最小化すると2つ目以降の物理量の分散が大きくなり, trade-off の関係になっている. 従って以下では $\mathbf{X}$ の同時測定の範囲での共分散行列の対角和の最小化を扱うことにする. まず (4) の第1項を $\mathbf{v}(S,M) := [v_{i,j}(S,M)]$ で表し, $C(S,M) := \mathbf{tr}\,\mathbf{v}(S,M)$ とおくことにする. 従って以下の量を求めることが本稿の目的となる.

$$C(S,\mathbf{X}) := \inf\{C(S,M) | M \text{ は } \mathbf{X} \text{ の同時測定}\}. \tag{5}$$

ここで以下の節の内容を簡単に触れておくことにする. §2 では本論文で必要となる作用素値行列に関する準備を行う. §3 では作用素値行列を考えることによって容易に得られる $C(S,\mathbf{X})$ の2つの下限 $C^1(S,\mathbf{X}), C^2(S,\mathbf{X})$ を導入する. §4 ではその2つの下限を線形計画的見地から分析する. $C^2(S,\mathbf{X})$ については具体的な解が得られる. そして $C^1(S,\mathbf{X})$ については線形計画的見地から問題の書き換えを行う. ここで行われる問題の書き換えは後の節の証明で用いられる. また $d=2$ については以前に長岡 [5] によってなされた結果と一致していることを示す.

§5 では i.i.d. 拡張を考えたときの2つの下限の漸近的挙動を扱う. §6 では2つの下限が一致するための必要十分条件を扱う. §7 では POVM に対して条件 (3) に加えて各自己共役作用素 X_i の線形結合の射影分解を確率的に行うものに限るという条件を加えたときの考察をする. その上でこの条件の下での最適解と §3 で導入した下限 $C^1(S,\mathbf{X})$ が一致するための必要十分条件を扱う. 最後に §8 ではいくつかの具体例について扱った. なお,§A では §4 で述べられる定理 4 の証明を行った. §B では §5 で必要となる補題を証明した. §C では主に §6 §7 で必要となる作用素値行列に関するいくつかの補題を証明した.

2 作用素値行列に関する準備

$C(S,\mathbf{X})$ の評価のためには以下に導入する作用素値行列を用いると便利である. 本稿では作用素に値を持つ行列を太い大文字を用いて $\mathbf{A} = [A_{i,j}]$ (各 A_i, j は $\mathcal{H}$ 上の作用素) と表すことにする. そして, $\mathbf{A}$ の転置行列は ${}^t\mathbf{A} = [A_{j,i}]$ で与えられ, その共役行列は $\mathbf{A}^* = [A_{j,i}^*]$ で与えられる. そして $\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}$ となるとき自己転置と呼び, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ となるとき自己共役と呼ぶことにする. また $\mathbf{A} = -{}^t\mathbf{A}$ なるとき反自己転置と呼び, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$ となるとき反自己共役と呼ぶことにするさらに任意の作用素値行列 $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = \mathfrak{S}(\mathbf{A}) + \mathfrak{A}(\mathbf{A}), \quad \mathfrak{S}(\mathbf{A}) := \frac{1}{2}(\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A}), \quad \mathfrak{A}(\mathbf{A}) := \frac{1}{2}(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A})$$

と自己転置行列と反自己転置行列の和に分解できる.

さらに本稿では複素数に値を持つ行列を太い小文字を用いて $\mathbf{a}=[a_{i,j}]$ と表すことにする. そして次の式が成り立つことが容易に分る. ${}^t(T\otimes\mathbf{a})=(T\otimes\ {}^t\mathbf{a})$. なおテンソル積を取るときには左側に $\mathcal{H}$ 上の作用素右側に複素数に値を持つ行列を書くことにする. さらに $1\times d$ の作用素値行列 $\mathbf{P}_i$ を以下のように定義する.

$$\mathbf{P}_i := (00\ldots\mathrm{I}\ldots0)^*. \tag{6}$$

以下では次のように集合を定義する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mathcal{H}) :=&\{\mathcal{H}\ \text{上の 有界作用素}\ \}\\
\mathcal{T}(\mathcal{H}) :=&\{\mathcal{H}\ \text{上の trace class 作用素}\ \}\\
\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H}) :=&\{A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})|A\ \text{は自己共役作用素}\ \}\\
\mathcal{B}_{sa}^{+}(\mathcal{H}) :=&\{A\in\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})|A\geq 0\}\\
\mathcal{T}_{sa}(\mathcal{H}) :=&\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})\cap\mathcal{T}(\mathcal{H})\\
\mathcal{T}_{sa}^{+}(\mathcal{H}) :=&\mathcal{B}_{sa}^{+}(\mathcal{H})\cap\mathcal{T}(\mathcal{H})
\end{aligned}$$

さらに, 作用素値行列の集合は $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d$ 上の線形作用素とみなすことによって, $\mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ 等で表すことができる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{st}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d) :=&\{\mathbf{A}\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)|\mathbf{A}\ \text{は自己転置}\ \}\\
\mathcal{B}_{sa,st}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d) :=&\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)\cap\mathcal{B}_{st}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)\\
\mathcal{B}_{sa,st}^{+}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d) :=&\mathcal{B}_{sa}^{+}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)\cap\mathcal{B}_{st}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)\\
\mathcal{B}_{at}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d) :=&\{\mathbf{A}\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)|\mathbf{A}\ \text{は反自己転置}\ \}
\end{aligned}$$

この他, $\mathcal{B}_{sa,st}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ も同じように定義する. さらに $\mathcal{T}_{st}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d),\mathcal{T}_{sa,st}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)\mathcal{T}_{sa,st}^{+}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)\mathcal{T}_{at}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)\mathcal{T}_{sa,st}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ も同じように定義する.

また, 作用素 A の値域を $\mathcal{R}(A)$, Kernel を $\mathcal{K}(A)$ で表すことにする. そして $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{H}'$ への射影を $P_{\mathcal{H}}$ で表すことにする.

最後に trace について若干の準備をしておく. 本稿では既に見たように単に $\mathcal{H}$ 上の作用素の trace は大文字の Tr を用いて表してきた. 従って, 作用素値行列 $\mathbf{A}$ に対しては Tr を次のように定義する.

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} := [\mathrm{Tr}\,A_{i,j}]$$

そして複素数に値を持つ行列 $\mathbf{a}=[a_{i,j}]$ の trace は太い小文字の $\mathbf{tr}$ で次のように表すことにする. $\mathbf{tr}\,\mathbf{a}:=\sum_{i=1}^{d}a_{i,i}$. 従って作用素値行列 $\mathbf{A}$ を $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d$ 上の作用素としてみたときの trace は $\mathrm{Tr}\otimes\mathbf{tr}$ で与えられ, 簡単のため $\mathbf{Tr}$ であらわすことにする.

3 作用素値行列による下限

前節で準備した作用素値行列の言葉を用いて $\mathbf{x}:=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^{d*}$ と表すと, M が $\mathbf{X}$ の同時測定であるための条件式は以下のように書き直される. ($\mathbb{R}^d$ は縦ベクトルの集合を $\mathbb{R}^{d*}$ は横ベクトルの集合を表すとする.)

$$\int_{\mathbb{R}^d} M(d\mathbf{x})\,\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}=\mathbf{X}. \tag{7}$$

そして以下の作用素不等式が常に成り立つ.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{X} - \mathrm{I} \otimes \mathbf{x})^* M(d\mathbf{x}) (\mathbf{X} - \mathrm{I} \otimes \mathbf{x}) \geq 0. \tag{8}$$

M が $\mathbf{X}$ の同時測定であるときは, (7) を用いて (8) を整理すると次の定理を得る.

定理 2 M が $\mathbf{X}$ の同時測定であるとき次の不等式を得る.

$$\mathbf{V}(M) \geq \mathbf{X}^*\mathbf{X}. \tag{9}$$

ただしここでは $\mathbf{V}(M)$ を以下のように定義した.

$$\mathbf{V}(M) := \int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{I} \otimes \mathbf{x})^* M(d\mathbf{x}) (\mathrm{I} \otimes \mathbf{x}).$$

ここで $\mathbf{V}(M)$ を用いると $\mathbf{v}(S, M)$ は $\mathbf{v}(S, M) = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right) \mathbf{V}(M) \left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right)$ と書け, $C(S, M)$ は $\mathbf{Tr}\left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right) \mathbf{V}(M) \left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right)$ と書ける. さらに定理 2 から次の不等式が得られる.

$$\left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right) \mathbf{V}(M) \left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right) \geq \left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right) \mathbf{X}^*\mathbf{X} \left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right) \quad \text{on } \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d.$$

従って, 作用素値行列 $\left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right) \mathbf{V}(M) \left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right)$ は自己共役かつ自己転置であることから $C^1(S, \mathbf{X})$ を (11) のように定義すると, 次の不等式を得る.

$$C(S, \mathbf{X}) \geq C^1(S, \mathbf{X}), \tag{10}$$

ただし,

$$C^1(S, \mathbf{X}) := \inf\left\{\mathbf{Tr}\,\mathbf{V} \middle| \mathbf{V} \in \mathcal{T}_{sa,st}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^d), \quad \mathbf{V} \geq \left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right) \mathbf{X}^*\mathbf{X} \left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right)\right\}. \tag{11}$$

と定義した. (11) で定義した下限 $C^1(S, \mathbf{X})$ を第 1 下限 (First bound) と呼ぶことにする. しかし, 今定義した第 1 下限 $C^1(S, \mathbf{X})$ は計算がかなり難しく, 見通しが悪いことが多い. ここで第 1 下限 $C^1(S, \mathbf{X})$ を下から押さえられ, かつ計算が容易な下限 $C^2(S, \mathbf{X})$ を以下のように導入する.

$$C^2(S, \mathbf{X}) := \inf\left\{\mathbf{tr}\,\mathbf{v} \middle| \mathbf{v} \in \mathcal{T}_{sa,st}(\mathbb{C}^d), \quad \mathbf{v} \geq \mathrm{Tr}\left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right) \mathbf{X}^*\mathbf{X} \left(\sqrt{S} \otimes \mathbf{i}\right)\right\}. \tag{12}$$

第 1 下限 $C^1(S, \mathbf{X})$ の条件式を満たす $\mathbf{V}$ に対して $\mathbf{v} := \mathbf{Tr}\,\mathbf{V}$ とおくと, $C^2(S, \mathbf{X})$ の条件を満たすことから,

$$C^1(S, \mathbf{X}) \geq C^2(S, \mathbf{X}) \tag{13}$$

を得ることが分る. 今後 $C^2(S, \mathbf{X})$ を第 2 下限 (Second bound) と呼ぶことにする. この第 2 下限 $C^2(S, \mathbf{X})$ は [3, 1, 2] などで示されている不等式から容易に導けるがここでは, 第 1 下限 $C^1(S, \mathbf{X})$ の自明な下限として導いた.

そして (10) の等号成立に関連して以下の定理が証明できる.

定理 3 $\mathcal{H}$ 上の有界自己共役作用素の列 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ とする. $\mathcal{H}$ 上の自己共役かつ自己転置な作用素値行列 $\mathbf{V}$ が以下の条件を満たすとする. 「$\mathbf{V} - \mathbf{X}^*\mathbf{X}$ が正定値かつ, $\mathbf{V} - \mathbf{X}^*\mathbf{X}$ の逆元が有界である.」このとき 次の条件を満たすように $\mathcal{H}$ を含む *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}'$ と $\mathcal{H}'$ 上の自己共役作用素の列 $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_d)$ が取れる. $[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = 0$ かつ $P\tilde{X}_i P = X_i$. ただし, P は自己共役な $\mathcal{H}'$ から $\mathcal{H}$ への射影とする.

しかしながら残念なことに, 上記の条件を満たす有界な作用素の列 $\tilde{\mathbf{X}}$ が存在することは証明できていない. 現在のところ,$\mathcal{H}$ の次元が有限であっても一般的には $\mathcal{H}'$ の次元が無限になる場合でしか上記の条件を満たす,$\tilde{\mathbf{X}}$ が構成できていない. おそらく, 一般には $C(S, \mathbf{X})$ と $C^1(S, \mathbf{X})$ は一致しないと思われる. この事情は §6 の末尾でもう少し深く触れる. なお,$\mathcal{H}'$ の次元が無限になる場合では, $\tilde{\mathbf{X}}$ の同時スペクトル分解が存在するための必要十分条件は $[\exp(\sqrt{-1}t\tilde{X}_i), \exp(\sqrt{-1}s\tilde{X}_j)] = 0, \forall s, t$ であることに注意せよ.

ここで状態が純粋状態 $|\phi\rangle\langle\phi|$ のときについて考える. このとき $(|\phi\rangle\langle\phi| \otimes \mathbf{i})\, \mathbf{X}^*\mathbf{X}\, (|\phi\rangle\langle\phi| \otimes \mathbf{i}) = (\mathbf{Tr}\,(|\phi\rangle\langle\phi| \otimes \mathbf{i})\, \mathbf{X}^*\mathbf{X}\, (|\phi\rangle\langle\phi| \otimes \mathbf{i})) \otimes |\phi\rangle\langle\phi|$ となることから, $C^1(|\phi\rangle\langle\phi|, \mathbf{X}) = C^2(|\phi\rangle\langle\phi|, \mathbf{X})$ が成立する.

4 線形計画的アプローチ

この節では第1下限 $C^1(S,\mathbf{X})$ 及び第2下限 $C^2(S,\mathbf{X})$ を線形計画的手法を用いて分析することにする. 第1下限 $C^1(S,\mathbf{X})$ についてはこの方法では完全に解くことは不可能であるが以下の節での分析でこの手法は基礎となるのでここで紹介しておく. 一方, 第2下限 $C^2(S,\mathbf{X})$ についてはここで扱う線形計画的手法で完全に求めることができるが, この方法以外にも解法はある. しかし, 第2下限 $C^2(S,\mathbf{X})$ を線形計画的手法で解くことが後の節の議論を展開する基礎になるので, ここではこの手法を用いて解くことにする.

第1下限 $C^1(S,\mathbf{X})$ 及び第2下限 $C^2(S,\mathbf{X})$ は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}C^1(S,\mathbf{X}) =& \mathbf{Tr}\,\mathfrak{S}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\\ &+\inf\left\{\mathbf{Tr}\,\mathbf{V}\middle|\mathbf{V}\in\mathcal{T}_{sa,st}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d),\quad \mathbf{V}-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\geq 0\right\}. \qquad (14)\\ C^2(S,\mathbf{X}) =& \mathbf{Tr}\,\mathfrak{S}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\\ &+\inf\left\{\mathbf{tr}\,\mathbf{v}\middle|\mathbf{v}\in\mathcal{T}_{sa,st}(\mathbb{C}^d),\quad \mathbf{v}-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\geq 0\right\}. \qquad (15)\end{aligned}$$

ここで (14) 及び (15) の第2項を $\tilde{C}^1(S,\mathbf{X})$ 及び $\tilde{C}^2(S,\mathbf{X})$ とおくことにする. 以下の節では任意のベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$ に対して,

$$\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S}\left|(\mathrm{I}\otimes\mathbf{a})^*\,\mathfrak{A}\,(\mathbf{X}^*\mathbf{X})\,(\mathrm{I}\otimes\mathbf{b})\right|\sqrt{S}\right)<\infty. \qquad (16)$$

が成立するものとする.

定理 4 $\tilde{C}^2(S,\mathbf{X})$ について以下の等式を得る.

$$\begin{aligned}\tilde{C}^2(S,\mathbf{X}) &= \min\left\{\mathbf{tr}\,\mathbf{v}\middle|\mathbf{v}\in\mathcal{T}^+_{sa}(\mathbb{C}^d),\quad \mathfrak{A}(\mathbf{v})=-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right\} \qquad (17)\\ &= \max\left\{\mathbf{tr}\,\mathbf{w}\left(-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right)\middle|\mathbf{w}\in\mathcal{B}_{sa,at}(\mathbb{C}^d),\quad \mathbf{i}-\mathbf{w}\geq 0\right\} \qquad (18)\\ &= \mathbf{tr}\left|\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right|. \qquad (19)\end{aligned}$$

さらにこのとき *(18)* の右辺及び *(17)* の右辺の解は $\left|\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right|-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$ 及び $-\mathbf{u}$ で与えられる. ただし $\mathbf{u}$ は以下の条件の $\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$ の極分解で与えられる.

$$\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)=\mathbf{u}\left|\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right|.$$

証明 (17) は自明な書き換えである. まず (18) の不等式 $\geq$ を示す. $\mathbf{v}\in\mathcal{T}^+_{sa}(\mathbb{C}^d)$ 及び $\mathbf{w}\in\mathcal{B}_{sa,at}(\mathbb{C}^d)$ を以下の条件を満たすように取る.

$$\mathfrak{A}(\mathbf{v})=-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right),\quad \mathbf{i}-\mathbf{w}\geq 0.$$

すると $\mathbf{tr}\,(\mathbf{i}-\mathbf{w})\,\mathbf{v}\geq 0$ となり, $\mathbf{tr}\,\mathbf{v}\geq\mathbf{tr}\,\mathbf{w}\left(-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right)$. を得る. 従って,(18) の不等式 $\geq$ が示せた. さらに $\mathbf{v}_0:=\left|\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right|-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$, $\mathbf{w}_0:=-\mathbf{u}$ とおくと, $\mathbf{tr}\,(\mathbf{i}-\mathbf{w}_0)\,\mathbf{v}_0=0$ となり, $\mathbf{tr}\,\mathbf{v}_0=\mathbf{tr}\,\mathbf{w}_0\left(-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right)$. を得る. 従って,

$$\begin{aligned}\mathbf{tr}\,\mathbf{v}_0 &\geq \min\left\{\mathbf{tr}\,\mathbf{v}\middle|\mathbf{v}\in\mathcal{T}^+_{sa}(\mathbb{C}^d),\quad \mathfrak{A}(\mathbf{v})=-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right\}\\ &\geq \max\left\{\mathbf{tr}\,\mathbf{w}\left(-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right)\middle|\mathbf{w}\in\mathcal{B}_{sa,at}(\mathbb{C}^d),\quad \mathbf{i}-\mathbf{w}\geq 0\right\}\\ &\geq \mathbf{tr}\,\mathbf{w}_0\left(-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right)\\ &= \mathbf{tr}\left|\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right|.\end{aligned}$$

これらの式より題意を得る. □

定理 5 $\tilde{C}^1(S,\mathbf{X})$ について以下の等式を得る.

$$\begin{aligned}\tilde{C}^1(S,\mathbf{X}) &= \inf\left\{\mathbf{Tr}\,\mathbf{V}\,\middle|\,\mathbf{V}\in\mathcal{T}^+_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d),\quad \mathfrak{A}(\mathbf{V}) = -\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right\} \\ &= \sup\left\{\mathbf{Tr}\,\mathbf{W}\left(-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right)\,\middle|\,\mathbf{W}\in\mathcal{B}_{sa,at}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d),\quad \mathbf{I}-\mathbf{W}\geq 0\right\}.\end{aligned} \tag{20}$$

さらに系として次を得る.

系 6 以下の条件:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{V}_0) = -\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right),\quad \mathbf{I}-\mathbf{W}_0\geq 0,\quad \mathbf{Tr}(\mathbf{I}-\mathbf{W}_0)\mathbf{V}_0 = 0 \tag{21}$$

を満たす $\mathbf{V}_0\in\mathcal{T}^+_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ 及び $\mathbf{W}_0\in\mathcal{B}_{sa,at}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ が取れるとき *(22)* が成立する.

$$\tilde{C}^1(S,\mathbf{X}) = \mathbf{Tr}\,\mathbf{V}_0 = \mathbf{Tr}\,\mathbf{W}_0\left(-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right). \tag{22}$$

証明 (20) は $C^1(S,\mathbf{X})$ の定義より自明. (20) の等号成立は困難なので付録 A にまわしここでは $\geq$ のみ簡単に示す. $\mathbf{V}\in\mathcal{T}^+_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ 及び $\mathbf{W}\in\mathcal{B}_{sa,at}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ が条件:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{V}) = -\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right),\quad \mathbf{I}-\mathbf{W}\geq 0$$

を満たすとする. このとき,

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr}\,(\mathbf{I}-\mathbf{W})\,\mathbf{V} &\geq 0 \\ \mathbf{Tr}\,\mathbf{V} - \mathbf{Tr}\,\mathbf{W}\left(-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right) &\geq 0.\end{aligned}$$

よって (20) の $\geq$ が示せた. □

次に $d=2$ のときには長岡 [5] によって与えられた下限と $C^1(S,\mathbf{X})$ が等しくなることを示す.

補題 7 $d=2$ のとき $\tilde{C}^1(S,\mathbf{X})$ は以下の式で与えられる.

$$\tilde{C}^1(S,\mathbf{X}) = \mathrm{Tr}\left|\sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S}\right|.$$

なお本論文では作用素の絶対値 $|A|$ は $\sqrt{A^*A}$ で定義されるが A が正規作用素の場合は対角化を行った上で各対角成分の絶対値を取るという操作と一致している. したがって, これは長岡 [5] よって与えられた下限と一致している.

証明 $\sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S}$ を次のように極分解する.

$$\sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S} = U\left|\sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S}\right|.$$

このとき,

$$\left[\left|\sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S}\right|,U\right]=0,\quad U^*=-U$$

となることに注意せよ. ここで

$$\mathbf{V}_0 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left|\sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S}\right| & \sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S} \\ \sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S} & \left|\sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S}\right|\end{pmatrix},\quad \mathbf{W}_0 := \begin{pmatrix}0 & U \\ -U & 0\end{pmatrix}.$$

とおくと, 補題 18 より $\mathbf{V}_0\geq 0$ となる. さらに $\mathrm{I}-\mathbf{W}_0\geq 0$ 及び

$$\begin{pmatrix}\left|\sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S}\right| & \sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S} \\ \sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S} & \left|\sqrt{S}[X_1,X_2]\sqrt{S}\right|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{I} & -U \\ U & \mathrm{I}\end{pmatrix} = 0$$

となることから (21) の 3 条件を満たすことから系 6 が使えて, $\mathbf{Tr}\,x_0 = \tilde{C}^1(S,\mathbf{X})$ となり題意が示せた. □

5 n i.i.d. 拡張

次に独立同一分布の量子力学的対応物を考えてみることにする．まず $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_n$ を各量子系に対応する Hilbert 空間とする．従って合成系は以下のテンソル空間で表される．

$$\mathcal{H}^{(n)} := \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n.$$

さらに, 合成系上の状態は $\mathcal{S}(\mathcal{H}^{(n)})$ の元 $S^{(n)}$ 表され, 自己共役作用素の列 $\mathbf{X}^{(n)}$ の同時測定を考える．

量子系での独立性条件は状態 $S^{(n)}$ 及び自己共役作用素の列 $\mathbf{X}^{(n)}$ が以下のように書けることである．

$$S^{(n)} = S_1 \otimes \cdots \otimes S_n,\ X_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} X_i^{k,(n)},$$

ただし,

$$X_i^{k,(n)} = \mathrm{I} \otimes \cdots \otimes \mathrm{I} \otimes \overset{i}{X_i^k} \otimes \mathrm{I} \otimes \cdots \otimes \mathrm{I}.$$

さらに量子系での同一性条件は以下で与えられる:

$$\mathcal{H}_1 = \cdots = \mathcal{H}_n = \mathcal{H}, S_1 = \cdots = S_n = S$$
$$X_1^1 = \cdots = X_1^n = X_1,\ldots,X_d^1 = \cdots = X_d^n = X_d.$$

同一性条件を満たすときは $\mathcal{H}^{(n)}$ を $\mathcal{H}^{\otimes n}$ で表し, $S^{(n)}$ を $S^{\otimes n}$ で表すことにする．以下では独立同一性条件を満たす場合の自己共役作用素の列 $\mathbf{X}^{(n)}$ の同時測定を考える．

定理 8 $\mathbf{X}^{(n)}$ が独立同一性条件を満たすとき以下の式が成立する．

$$C(S,\mathbf{X}) \geq \frac{1}{n}C(S^{\otimes n},\mathbf{X}^{(n)}) \geq \frac{1}{n}C^1(S^{\otimes n},\mathbf{X}^{(n)}) \tag{23}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}C^1(S^{\otimes n},\mathbf{X}^{(n)}) = C^2(S,\mathbf{X}) \tag{24}$$

$$\frac{1}{n}C^2(S^{\otimes n},\mathbf{X}^{(n)}) = C^2(S,\mathbf{X}). \tag{25}$$

証明 (23) は自明である．

$$n\,\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right) = \mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)^*\mathbf{X}^{(n)}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$$

より (25) は導ける．以下では (24) を証明する．

適当な直交変換により以下のように対角化する．

$$\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_m & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

d が偶数のときは $2m = d$ となり最後の列は存在しない．一方 d が奇数のときは $2m+1 = d$ となり最後の列の対角成分は 0 となる．なお $a_i \geq 0$ とする．このとき $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\tilde{C}^2(S^{\otimes n}, \mathbf{X}^{(n)}) = \tilde{C}^2(S,\mathbf{X}) = 2\sum_{i=1}^m a_i$ となる．題意を示すには

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\tilde{C}^1(S^{\otimes n}, \mathbf{X}^{(n)}) \leq \tilde{C}^2(S,\mathbf{X}) = 2\sum_{i=1}^m a_i$$

を示すとよい．以下では (26) の座標系で考える．(14) の inf の中での条件式を満たす $\mathbf{V}_n$ を以下で定義する．

$$\mathbf{V}_n := \frac{1}{2}\,\mathbf{Diag}\left(\sum_{j=1}^d \left|\sqrt{S}\left[X_i^{(n)}, X_j^{(n)}\right]\sqrt{S}\right|\right). \tag{27}$$

ここで $\mathbf{Diag}(C_i)$ は対角成分が C_i となる作用素値行列を表す．そして条件 (16) より補題 15 を用いるための条件は満たされているので,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\mathrm{Tr}\left|\sqrt{S}\left[X_i^{(n)}, X_j^{(n)}\right]\sqrt{S}\right| = \begin{cases} a_l & i = 2l, j = 2l-1 \text{ or } i = 2l-1, j = 2l \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}. \tag{28}$$

を得る．以下では $\mathbf{V}_n - \mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right) \geq 0$ となることを示す．$\mathbf{A}_n(i,j)$ を次のように定義する．

$$\mathbf{A}_n(i,j) := (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j)^*\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j).$$

$\mathbf{P}_i$ の定義については (6) を参照のこと．そして $\mathbf{V}_n(i,j)$ を $(i,i),(i,j),(j,i),(j,j)$ 成分は以下で定義され，それ以外の成分が 0 となる作用素値行列とする．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_i^*\mathbf{V}_n(i,j)\mathbf{P}_i & \mathbf{P}_j^*\mathbf{V}_n(i,j)\mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_i^*\mathbf{V}_n(i,j)\mathbf{P}_j & \mathbf{P}_j^*\mathbf{V}_n(i,j)\mathbf{P}_j \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left|\sqrt{S}\left[X_i^{(n)}, X_j^{(n)}\right]\sqrt{S}\right| & 0 \\ 0 & \left|\sqrt{S}\left[X_i^{(n)}, X_j^{(n)}\right]\sqrt{S}\right| \end{pmatrix}. \tag{29}$$

すると $\mathbf{V}_n(i,j) \geq \mathbf{A}_n(i,j)$ を得る．したがって

$$\mathbf{V}_n = \sum_{i>j}\mathbf{V}_n(i,j) \geq \sum_{i>j}\mathbf{A}_n(i,j) = \mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right). \tag{30}$$

したがって,(27) 及び (28) より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\,\mathbf{V}_n = 2\sum_{i=1}^m a_i. \tag{31}$$

(30) 及び (31) より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\tilde{C}^1(S^{\otimes n}, \mathbf{X}^{(n)}) \leq 2\sum_{i=1}^m a_i.$$

を得る．よって題意を得た． □

6 第 1 下限と第 2 下限が一致するための条件

この節では第 1 下限 $C^1(S,\mathbf{X})$ と第 2 下限 $C^2(S,\mathbf{X})$ が一致するための条件を考える．

定理 9 以下のように極分解することにする.

$$\mathfrak{A}\left(\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)=\mathbf{u}\left|\mathfrak{A}\left(\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right|.$$

このとき, 部分等距離作用素の値域に関して, $\mathcal{R}(\mathbf{u})=\mathcal{R}\left(\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right)$ が成立するものとする. そして, $\mathbf{p}:=\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}^2-\mathbf{u}\right)$ と定義する. このとき以下の *2* 条件は同値になる.

(9.1) $C^1(S,\mathbf{X})=C^2(S,\mathbf{X})$.

(9.2) 以下の *2* 条件を満たす自己共役かつ非負定値な作用素値行列 $\mathbf{K}$ が取れる.

(9.2.1) $\mathbf{K}$ の値域が $\mathbf{P}:=\mathrm{I}\otimes\mathbf{p}$ の値域に含まれる.

(9.2.2) $-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)=\mathfrak{A}(\mathbf{K})$ が成立する.

証明 まず $\mathbf{u}$ 及び $\mathbf{p}$ の性質を調べる. 補題 28 より, $\mathbf{u}$ は自己共役かつ反自己転置な部分等距離作用素であるから, $\mathbf{u}^2$ は射影作用素となり, 補題 29 より $\mathbf{u}^3=\mathbf{u}$ となる. 従って,

$$\mathbf{p}^2=\frac{1}{4}\left(\mathbf{u}^2-\mathbf{u}\right)^2=\frac{1}{4}2\left(\mathbf{u}^2-\mathbf{u}\right)=\mathbf{p}$$

となることから $\mathbf{p}$ は射影となる. よって $\mathbf{p}$ は補題 23 の条件を満たすことが分る. そして,$\mathbf{U}:=\mathrm{I}\otimes\mathbf{u}$ とおくと, $\mathbf{P}:=\frac{1}{2}(\mathbf{U}^2-\mathbf{U})$ は同様にして, 補題 23 の条件を満たすことが分る.

次に **(9.2)** から **(9.1)** を導く. $\mathbf{K}$ の値域が $\mathbf{P}$ の値域に含まれることから, $\mathbf{K}=\mathbf{PK}$ となる. 従って,$\mathfrak{A}(\mathbf{P})=-\frac{1}{2}\mathbf{U}$ であることに注意して, 補題 23 の条件 **(23.7)** を用いると,

$$\mathbf{Tr}\,(\mathrm{I}+\mathbf{U})\,\mathbf{K}=\mathbf{Tr}\,(\mathrm{I}+\mathbf{U})\,\mathbf{PK}=0. \tag{32}$$

従って $\mathbf{V}_0:=\mathbf{K},\quad \mathbf{W}_0:=-\mathbf{U}$ とおくと系 6 の条件を満たし補題 32 を用いると以下のような変形が可能となる.

$$\begin{aligned}\tilde{C}^1(S,\mathbf{X})&=\mathbf{Tr}\,\mathfrak{S}(\mathbf{K})=\mathbf{Tr}\,\mathbf{U}\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\\&=\mathbf{Tr}\,\mathrm{I}\otimes\mathbf{u}\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\\&=\mathbf{tr}\,\mathbf{u}\mathfrak{A}\left(\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)=\mathbf{tr}\left|\mathfrak{A}\left(\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right|.\end{aligned}$$

よって (19) より $C^1(S,\mathbf{X})=C^2(S,\mathbf{X})$ を得る. よって **(9.2)** から **(9.1)** が導けた.

次に **(9.1)** から **(9.2)** を導く. まず条件 **(9.1)** より, 定理 4 及び補題 32 を用いると,

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr}\,\mathbf{U}\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)&=\mathbf{tr}\,\mathbf{u}\mathfrak{A}\left(\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\\&=\mathbf{tr}\left|\mathfrak{A}\left(\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right|\\&=\tilde{C}^2(S,\mathbf{X})=\tilde{C}^1(S,\mathbf{X}).\end{aligned}$$

となることが分る. さらに定理 5 より以下の条件を満たす作用素の列 $\mathbf{V}_n\in\mathcal{T}^+_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ が取れる.

- $\mathfrak{A}(\mathbf{V}_n)=-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$
- $\mathbf{Tr}(\mathrm{I}+\mathbf{U})\mathbf{V}_n\to 0$

補題 22 より ${}^t\mathbf{P}$ も射影となることから, ${}^t\mathbf{P}=\mathbf{P}+\mathbf{U}\geq 0$ より $(\mathrm{I}-\mathbf{P})\leq(\mathrm{I}+\mathbf{U})$ が導ける. 従って, $\mathbf{Tr}(\mathrm{I}-\mathbf{P})\mathbf{V}_n(\mathrm{I}-\mathbf{P})=\mathbf{Tr}(\mathrm{I}-\mathbf{P})\mathbf{V}_n\leq\mathbf{Tr}(\mathrm{I}+\mathbf{U})\mathbf{V}_n\to 0$ となる. 従って $\mathbf{P}$ が射影であることから, 補題 20 より, $\|\mathbf{K}_n-\mathbf{PK}_n\mathbf{P}\|_{\mathbf{Tr}}\to 0$ となる. さらに補題 24 より $\|\mathfrak{A}(\mathbf{K}_n)-\mathfrak{A}(\mathbf{PK}_n\mathbf{P})\|_{\mathbf{Tr}}\to 0$ すなわち

$$\left\|-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)-\mathfrak{A}\left(\mathbf{PK}_n\mathbf{P}\right)\right\|_{\mathbf{Tr}}\to 0$$

を得る. 従って $\{\mathfrak{A}(\mathbf{P}\mathbf{K}_n\mathbf{P})\}$ はコーシー列となる. ここで補題 25 を用いると, $\{\mathbf{P}\mathbf{K}_n\mathbf{P}\}$ もコーシー列となる. 従って値域が $\mathbf{P}$ の値域に含まれる非負定値な自己共役作用素 $\mathbf{K}$ が存在して $\mathbf{P}\mathbf{K}_n\mathbf{P} \to \mathbf{K}$ となる. $\mathbf{K}$ が条件 **(9.2.1)** 及び **(9.2.2)** を満たすことは容易に確かめられる. よって **(9.2)** が導かれた. □

定理 10 以下の *3* 条件は同値となる.

(10.1) $\mathfrak{A}(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)) \in \mathcal{T}_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ となる任意の密度演算子 S に対して $\mathbf{Tr}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{V}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right) = C^1(S,\mathbf{X}) = C^2(S,\mathbf{X})$ となる作用素値行列 $\mathbf{V}$ が取れる.

(10.2) *Kernel* が $\{0\}$ で $C^1(S,\mathbf{X}) = C^2(S,\mathbf{X})$ かつ $\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right) \in \mathcal{T}_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ となる密度演算子 S が取れる.

(10.3) 以下の *3* 条件を満たす自己共役かつ非負定値な作用素値行列 $\mathbf{K}$ と $\mathbb{C}^d$ 上の射影 $\mathbf{p}$ が取れる. $\mathbf{P} := \mathbf{I}\otimes\mathbf{p}$ とすると,

(10.3.1) $\mathbf{KP} = \mathbf{KP} = \mathbf{K}$.

(10.3.2) $2\mathfrak{S}(\mathbf{p})$ が射影.

(10.3.3) $\mathfrak{A}(\mathbf{K}) = -\mathfrak{A}(\mathbf{X}^*\mathbf{X})$.

証明 **(10.1)** から **(10.2)** は自明である.

次に **(10.2)** から **(10.3)** を示す. 定理 9 に従って $\mathbf{u}$ 及び $\mathbf{p}$ を定義し, 条件 **(9.2)** を満たす $\mathbf{K}$ を取る. 条件 **(9.2.2)** を変形すると以下の式を得る.

$$-\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathfrak{A}(\mathbf{X}^*\mathbf{X})\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right) = \mathfrak{A}(\mathbf{K}). \tag{33}$$

$\mathbf{K}' := \left(\sqrt{\mathbf{K}}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)^{-1}\right)^*\left(\sqrt{\mathbf{K}}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)^{-1}\right) = \left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)^{-1}\mathbf{K}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)^{-1}$ と定義すると $\left(\sqrt{\mathbf{K}}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)^{-1}\right)$ $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d$ の dense な部分集合で定義されてるので $\mathbf{K}'$ も $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d$ の dense な部分集合で定義される. そして (33) 及び補題 33 から $\mathbf{K}'$ は条件 **(10.3.3)** を満たす. また定理 9 の証明の前半部で行った議論により $2\mathfrak{S}(\mathbf{p}) = \mathbf{u}^2$ が射影であることが分り条件 **(10.3.2)** が満たされる. また条件 **(10.3.1)** を満たすことは容易に確かめられる.

最後に **(10.3)** から **(10.1)** を示す. $\mathbf{u} := -2\mathfrak{A}(\mathbf{p})$, $\mathbf{U} := \mathbf{I}\otimes\mathbf{u}$ とおく. $\mathbf{p}$ 及び $\mathbf{P}$ は条件 **(10.3.2)** より補題 23 の条件を満たす.

ここで $\mathbf{V}_0 := \left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{K}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)^*$, $\mathbf{W}_0 := -\mathbf{U} \in \mathcal{B}_{sa,at}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ とおく.

条件 **(10.3.3)** 及び補題 33 より $\mathfrak{A}(\mathbf{V}_0) = -\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$ を得る. このとき条件 **(10.3.1)** より $\mathbf{V}_0$ の値域は $\mathbf{P}$ の値域に含まれることから $\mathbf{V}_0 = \mathbf{P}\mathbf{V}_0\mathbf{P}$ となる. 従って, 補題 30 が使えて,

$$\|\mathbf{V}_0\|_{\mathbf{Tr}} = 2\|\mathfrak{A}(\mathbf{V}_0)\|_{\mathbf{Tr}} = 2\left\|-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right\|_{\mathbf{Tr}} < \infty.$$

従って $\mathbf{V}_0 \in \mathcal{T}^+_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ を得る. 一方, $\mathbf{I}+\mathbf{U} = \mathbf{I}-2\mathfrak{A}(\mathbf{P})$ であるから, 補題 23 の **(23.7)** より,

$$\mathbf{Tr}(\mathbf{I}+\mathbf{U})\mathbf{V}_0 = \mathbf{Tr}(\mathbf{I}+\mathbf{U})\mathbf{P}\mathbf{V}_0\mathbf{P} = 0. \tag{34}$$

ゆえに, 補題 35 及び (34) より系 6 が適用できる. 従って, 補題 32 及び補題 34 を用いると,

$$\begin{aligned}\tilde{C}^1(S,\mathbf{X}) &= \mathbf{Tr}\,\mathbf{U}\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right) = \mathbf{Tr}\,\mathbf{I}\otimes\mathfrak{A}(\mathbf{u})\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\\ &= \mathbf{tr}\,\mathfrak{A}(\mathbf{u})\,\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right).\end{aligned} \tag{35}$$

さらに補題35及び $\mathbf{u}$ の反自己転置性に注意して定理4を用いると,

$$\mathbf{tr}\,\mathfrak{A}(\mathbf{u})\,\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\leq\tilde{C}^2(S,\mathbf{X}). \tag{36}$$

よって (13),(35) 及び (36) より $C^1(S,\mathbf{X})=C^2(S,\mathbf{X})$ を得る. □

次に $d=2$ の場合に定理10の条件を満たす場合について詳しく調べてみることにする. 条件 **(10.3.2)** を満たす $\mathbb{C}^d$ 上の射影 $\mathbf{p}$ は $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & 1\end{pmatrix}$ または $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1} & 1\end{pmatrix}$ に限られる. 以後 $\mathbf{p}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1} & 1\end{pmatrix}$ の場合について考える. そして $\mathbf{K}$ の非負定値性及び条件 **(10.3.1)** より $\mathbf{K}$ は $\mathcal{H}$ 上の非負定値な作用素 K を用いて $\mathbf{K}:=\begin{pmatrix}K & \sqrt{-1}K\\ -\sqrt{-1}K & K\end{pmatrix}$ と書ける. そして条件 **(10.3.3)** は以下のように書き直される.

$$\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}K\\ -\sqrt{-1}K & 0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & [X_1,X_2]\\ [X_2,X_1] & 0\end{pmatrix}.$$

すなわち今の議論をまとめると次の系を得る.

系 11 $d=2$ のとき, 任意の $S\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$ について $C^1(S,\mathbf{X})=C^2(S,\mathbf{X})$ となるための必要十分条件は $\sqrt{-1}[X_1,X_2]\geq 0$ または $\sqrt{-1}[X_1,X_2]\leq 0$ で書き表される.

この条件は $A:=X_1+\sqrt{-1}X_2$ とおくと $[A^*,A]\geq 0$ または $[A,A^*]\geq 0$ と書き換えられる. $[A^*,A]\geq 0$ を満たす作用素はハイポ正規 (hyponormal) 作用素と呼ばれる. それについては既に多くの研究がなされている. 一方 $[A^*,A]\geq 0$ のとき $A^*=\int_{\mathbb{C}} zQ(dz), A^*A=\int_{\mathbb{C}}|z|^2M_A(dz)$ となる POVM Q が存在することが $C(S,M)=C^1(S,\mathbf{X})$ となる M が存在することの必要十分条件である. 一般には $[A^*,A]\geq 0$ であってもそのような POVM M_A が存在するとは限らないことが確かめられている. このことから一般には $C(S,\mathbf{X})$ と $C^1(S,\mathbf{X})$ は一致しないのではないかと予想される. コンパクトな台をもつ POVM でそのような条件を満たす M_A が存在するとき, A はサブ正規 (subnormal) 作用素と呼ばれる. サブ正規作用素についてはハイポ正規作用素と並んで詳しく研究されている.

7 Random 測定による最適化

次に以下の方法で構成する $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_d)$ の同時測定に限って $C(S,M)$ を最小化する.

各自己共役作用素 X_i の線形結合で表される自己共役作用素 $\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}):=\sum_{i=1}^d x_iX_i$ のスペクトル分解 $E_{\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})}$ に対応する測定を確率的に行ういその上で affine なデータ変換行うことによって構成できる同時測定を考える. なおここで $\mathbf{x}$ は縦ベクトルとした. 今後 d 次の実縦ベクトルのなす空間を $\mathbb{R}^d$ と書き, d 次の実横ベクトルのなす空間を $\mathbb{R}^{d*}$ と書くことにする.

このような手法で構成される POVM を Random POVM と呼ぶことにする. この問題を定式化するために横ベクトル $\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^{d*}$ に対して $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^{d*}$ への affine な写像 $f_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ を $f_{\mathbf{y},\mathbf{z}}(a)=a\mathbf{y}+\mathbf{z}$ で定義する. そして $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{2d*}$ に対して $\mathbb{R}^{d*}$ 上の PVM を $E^{\mathbf{y},\mathbf{z}}_{\mathbf{x}}:=E_{\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})}\circ f^{-1}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ と定義する. すると, 先に述べた Random POVM は $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{2d*}$ 上の確率測度 μ で以下のように記述される.

$$E_\mu:=\int_{\mathbb{R}^{3d}}E^{\mathbf{y},\mathbf{z}}_{\mathbf{x}}\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{z})$$

そして E_μ が $\mathbf{X}$ の同時測定になるための必要十分条件は

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{2d*}}\int_{\mathbb{R}^{d*}}a_iE^{\mathbf{y},\mathbf{z}}_{\mathbf{x}}(d\mathbf{a})\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{z})=X_i.$$

この条件は以下のようにも書き換えることができる.

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{2d*}}(\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}))\otimes\mathbf{y}+\mathrm{I}\otimes\mathbf{z}\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{z})=\mathbf{X}. \tag{37}$$

ここで $C^R(S,\mathbf{X})$ を以下のように定義する.

$$C^R(S,\mathbf{X}) := \inf\left\{C(S,E_\mu)\,\middle|\,\mu \text{ は条件 (37) を満たす } \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{2d*} \text{ 上の確率測度 }\right\}$$

$C(S,E_\mu)$ は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
&C(S,E_\mu)\\
&=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{2d*}} \mathbf{a}^*\mathbf{a}\operatorname{Tr}(E_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y},\mathbf{z}}(d\mathbf{a})S)\,\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{z})\\
&=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{2d*}} \operatorname{Tr}(\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})\otimes\mathbf{y}+\mathrm{I}\otimes\mathbf{z})^*(\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})\otimes\mathbf{y}+\mathrm{I}\otimes\mathbf{z})\,S\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{z})\\
&=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{2d*}} \operatorname{Tr}\left((\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}))^2\mathbf{y}^*\mathbf{y}+\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}^*\mathbf{z}+\mathbf{z}^*\mathbf{y})+\mathrm{I}\otimes\mathbf{z}^*\mathbf{z}\right)S\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{z})\\
&=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d*}} \operatorname{Tr}((\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}))^2\mathbf{y}^*\mathbf{y}+\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}^*E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})^*\mathbf{y})+\mathrm{I}\otimes E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})^*E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})\\
&\quad+\mathrm{I}\otimes\left(\int_{\mathbb{R}^{d*}}(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))^*(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))\,\mu(d\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})\right))\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y})\\
&=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d*}} \operatorname{Tr}\left((\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}))^2S\right)\mathbf{y}^*\mathbf{y}+\operatorname{Tr}(S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}^*E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})^*\mathbf{y})+E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})^*E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})\\
&\quad+\left(\int_{\mathbb{R}^{d*}}(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))^*(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))\,\mu(d\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})\right)\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y})\\
&=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d*}} (E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^*(E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})+\operatorname{Tr}\left((\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}))^2S\right)\mathbf{y}^*\mathbf{y}-((\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x})^2\mathbf{y}^*\mathbf{y}\\
&\quad+\left(\int_{\mathbb{R}^{d*}}(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))^*(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))\,\mu(d\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})\right)\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y})\\
&=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d*}} \operatorname{Tr}\left(((\mathbf{X}-\mathrm{I}\otimes(\operatorname{Tr}S\mathbf{X}))(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}))^2S\right)\mathbf{y}^*\mathbf{y}+(E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^*(E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\\
&\quad+\left(\int_{\mathbb{R}^{d*}}(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))^*(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))\,\mu(d\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})\right)\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

ここで $E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})$ は $\mathbf{x},\mathbf{y}$ が与えられたときの条件付き確率を表し, $\mu(d\mathbf{x},\,d\mathbf{y})$ は $\mu(d\mathbf{x},\,d\mathbf{y},\,d\mathbf{z})$ を $\mathbf{z}$ について積分することによって得られる確率測度を表すことにする. (37) は以下のように書き直される.

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d*}} E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y})=(\operatorname{Tr}S\mathbf{X}).$$

従って先の式は次のように変形できる.

$$\begin{aligned}
C(S,E_\mu)=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d*}}&\operatorname{Tr}\left(((\mathbf{X}-\mathrm{I}\otimes(\operatorname{Tr}S\mathbf{X}))(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}))^2S\right)\mathbf{y}^*\mathbf{y}\\
&+(E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}-(\operatorname{Tr}S\mathbf{X}))^*(E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}-(\operatorname{Tr}S\mathbf{X}))\\
&+\left(\int_{\mathbb{R}^{d*}}(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))^*(\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y}))\,\mu(d\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})\right)\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y})+(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})^*.
\end{aligned}$$

今の我々の目的は条件 (37) の下で $C(S,E_\mu)$ を最小化することにあるので,

$$E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})+(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}-(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})=0 \tag{38}$$

$$\mathbf{z}-E_\mu(\mathbf{z}|\mathbf{x},\mathbf{y})=0 \tag{39}$$

となる場合について最適化を行えばよい. 上記2つの条件を満たすことは, PVM 測定 $E_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y},\operatorname{Tr}S\mathbf{X}-(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}=E_{\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})}\circ f^{-1}_{\mathbf{y},\operatorname{Tr}S\mathbf{X}-(\operatorname{Tr}S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}$ を確率 $\mu(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y})$ で行うことを意味している. この PVM 測定は PVM $E_{\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})}$ を

行った後にデータ変換 $a \mapsto a\mathbf{y} + \mathrm{Tr}\, S\mathbf{X} - (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = (a - (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})\mathbf{x})\mathbf{y} + \mathrm{Tr}\, S\mathbf{X}$ を行うことを意味している. これは PVM 測定 $E_{\mathbf{X}(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}) - (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})\mathbf{x}} = E_{(\mathbf{X} - \mathrm{I}\otimes(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X}))(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})} = E_{\mathbf{X}_S(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})}$ を行った後にデータ変換 $a \mapsto a\mathbf{y} + \mathrm{Tr}\, S\mathbf{X}$ を行うことと同じである. ここで $\mathbf{X}_S := \mathbf{X} - \mathrm{I}\otimes(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})$ とおいた. したがって, 今扱っている問題は PVM 測定 $E^{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}} := E_{\mathbf{X}_S(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})} \circ f^{-1}_{\mathbf{y},\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X}}$ を条件 (40) を満たす確率 $\mu(\,d\mathbf{x}\, d\mathbf{y})$ で行うことにより $C(S, E_\mu)$ を最小化する問題に帰着する. したがってこのような問題設定下では $C(S, E_\mu)$ は以下のように変形できる.

$$C(S, E_\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}} \left(\mathrm{Tr}\, (\mathbf{X}_S(\mathrm{I}\otimes\mathbf{x}))^2\, S \right) \mathbf{y}^*\mathbf{y}\mu(\,d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}) + (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})^*.$$

また, 条件 (37) は以下のように変形できる.

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}} (\mathbf{X}_S\, (\mathrm{I}\otimes\mathbf{x})) \otimes \mathbf{y}\mu(\,d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}) = \mathbf{X}_S. \tag{40}$$

定理 12 $C^R(S, \mathbf{X})$ は以下のように計算できる.

$$C^R(S, \mathbf{X}) = \left(\mathbf{tr}\, \sqrt{\mathbf{j}}\right)^2 + (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})^*. \tag{41}$$

ここで $\mathbf{j} := \mathfrak{S}\left(\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)(\mathbf{X}_S)^*\mathbf{X}_S\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$ とおいた. さらに下限を達成する *Random POVM* は以下のように構成できる. $\mathbf{j}$ の固有値を w_i その長さ *1* の固有ベクトルを $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^d$ で表すことにする. そのとき最適測定は $u_i := \frac{\sqrt{w_i}}{\sum_{j=1}^d \sqrt{w_j}}$ とおくと, $M_{\mathbf{j}} := \sum_{i=1}^d u_i E^{u_i^{-1}\mathbf{e}_i^*}_{\mathbf{e}_i}$ で与えられる.

証明　条件 (40) は次のように書き直せる.

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}} x_i y_j \mu(\,d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}) = \delta_{i,j}. \tag{42}$$

すると M_J が条件 (42) を満たすことは容易に示せる. また $C(S, E_\mu) - (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})^*(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})$ は次のように書き直せる.

$$C(S, E_\mu) - (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})^* = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}} \mathbf{x}^*\mathbf{j}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{y}^*\mu(\,d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}).$$

ここで $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^{d*}, b \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d*}$ に対して以下の量を定義しておく.

$$R(\mathbf{a}, b : \mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^*\mathbf{j}\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{y}^* - \mathbf{y}\mathbf{a}\mathbf{x} - b.$$

ここで (42) を満たす確率測度の集合を $\mathcal{L}$ と書き任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d*}$ に対して $R(\mathbf{a}, b : \mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ となる $(\mathbf{a}, b) \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^{d*} \times \mathbb{R}$ の集合を $\mathcal{L}^*$ と書くことにする. そのとき次の不等式が成立する.

$$\inf_{\mu\in\mathcal{L}} C(S, E_\mu) - (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})^* \geq \sup_{(\mathbf{a},b)\in\mathcal{L}^*} (b + \mathbf{tr}\, \mathbf{a}).$$

なぜなら $\mu \in \mathcal{L}, (\mathbf{a}, b) \in \mathcal{L}^*$ について,

$$C(S, E_\mu) - (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})^* - b - \mathbf{tr}\, \mathbf{a} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}} R(\mathbf{a}, b : \mathbf{x}, \mathbf{y})\mu(\,d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}) \geq 0.$$

となるからである. したがって, 適当な $\mu' \in \mathcal{L}, (\mathbf{a}', b') \in \mathcal{L}^*$ について,

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d*}} R(\mathbf{a}', b' : \mathbf{x}, \mathbf{y})\mu'(\,d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}) = 0$$

が成立するとき,

$$C(S, E_{\mu'}) - (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})^* = b' + \mathbf{tr}\, \mathbf{a}' = \inf_{\mu\in\mathcal{L}} C(S, E_\mu) - (\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})(\mathrm{Tr}\, S\mathbf{X})^* = \sup_{(\mathbf{a},b)\in\mathcal{L}^*} (b + \mathbf{tr}\, \mathbf{a})$$

となる. ここで $\mathbf{a} := 2\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)\sqrt{\mathbf{j}}, b = -\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)^2$ のときについて考える.

$$R\left(2\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)\sqrt{\mathbf{j}}, -\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)^2 : \mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = \left(\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x}\right)^*\left(\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x}\right)\mathbf{y}\mathbf{y}^* - 2\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)\mathbf{y}\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x} + \left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)^2$$
$$= \left(\mathbf{y}\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x} - \left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x}\right)^*\left(\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x}\right)\mathbf{y}\mathbf{y}^* - \left(\mathbf{y}\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x}\right)^2.$$

シュワルツの不等式より

$$\left(\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x}\right)^*\left(\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x}\right)\mathbf{y}\mathbf{y}^* - \left(\mathbf{y}\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{x}\right)^2 \geq 0$$

であるから. $R\left(2\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)\sqrt{\mathbf{j}}, -\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)^2 : \mathbf{x}, \mathbf{y}\right) \geq 0$ となり $\left(2\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)\sqrt{\mathbf{j}}, -\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)^2\right) \in \mathcal{L}^*$ となる. さらに $u_i^{-1}\mathbf{e}_i^*\sqrt{\mathbf{j}}\mathbf{e}_i = \mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}$ となることから, $M_{\mathbf{j}} = \sum_{i=1}^d u_i E_{\mathbf{e}_i}^{u_i^{-1}\mathbf{e}_i^*}$ の support では $R\left(2\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)\sqrt{\mathbf{j}}, -\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)^2 : \mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = 0$ となる. ここで $M_{\mathbf{j}}$ に対応する確率測度を $\mu_{\mathbf{j}}$ と書くと $\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d*}} R\left(2\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)\sqrt{\mathbf{j}}, -\left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)^2 : \mathbf{x}, \mathbf{y}\right)\mu_{\mathbf{j}}(d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}) = 0$ となることから, $M_{\mathbf{j}}$ が最適測定となり, $\inf_{\mu\in\mathcal{L}} C(S, E_\mu) - (\mathrm{Tr}\,S\mathbf{X})(\mathrm{Tr}\,S\mathbf{X})^* = \left(\mathbf{tr}\sqrt{\mathbf{j}}\right)^2$ を得る. したがって (41) が示せた. □

定理 13 $\mathbf{X} = \mathbf{X}^S$ の場合についてのみ考える. $\mathbf{Y} := \left(\mathfrak{S}\left(\mathrm{Tr}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)(\mathbf{X}_S)^*\mathbf{X}_S\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)\right)\right)^{-1/2}\mathbf{X}$ 以下の 4 条件は同値である.

(13.1) $C^R(S, \mathbf{X}) = C^1(S, \mathbf{X})$.

(13.2) 任意の $d\times d$ の正定値な実対称行列 $\mathbf{g}$ に対して $C^R(S, \mathbf{X}\mathbf{g}) = C^1(S, \mathbf{X}\mathbf{g})$

(13.3) $i \neq j$ に対して

- **(13.3.1)** $Y_iSY_i = Y_jSY_j$.
- **(13.3.2)** $Y_iSY_j + Y_jSY_i = 0$.

(13.4) $A_i := \sqrt{S}Y_i$ とおいたとき, $\mathcal{R}(U_i) = \mathcal{R}(|A_j|)$ となるように極分解 $A_i = U_i|A_i|$ をすると以下の条件を満たす.

- **(13.4.1)** $|A_i| = |A_j|$.
- **(13.4.2)** $U_i^*U_j + U_j^*U_i = 0$.

証明 **(13.3)** から **(13.4)** を導く. **(13.3.1)** から **(13.4.1)** は導ける. $B := U_i^*U_j + U_j^*U_i = 0$ を示す. まず $A := |A_i|$ とおく. B は自己共役作用素である. $\mathcal{K}(U_i) = \mathcal{K}(A)$ したがって $\mathcal{K}(B) \supset \mathcal{K}(U_i)\cap\mathcal{K}(U_j) = \mathcal{K}(A)$. B は有界な自己共役作用素であるから $\phi\in\mathcal{R}(A)$ に対して, $\langle\phi, B\phi\rangle = 0$ を示せばよい. そのためには $\phi\in\mathcal{H}$ に対して $\langle A\phi, BA\phi\rangle = 0$ を示せば十分である. 条件 **(13.3.2)** より, $ABA = 0$ となる. よって,**(13.4.2)** は導けた.

次に **(13.4)** から **(13.2)** を導く.

$\mathfrak{S}\left(\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right) = \mathbf{i}$ かつ $\mathbf{tr}\,\mathbf{g} = 1$ である場合に示せば十分である.

そして $\mathbf{g}$ の固有値を g_i とし, 対応する固有ベクトルを $\mathbf{e}_i$ とする. Random POVM での最適なものは 定理 12 より

$$M_{\mathbf{g}} := \sum_{i=1}^d g_i E_{\mathbf{e}_i}^{\frac{1}{g_i}\mathbf{e}_i^*}.$$

で与えられる.

$$\mathbf{V} := \left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{g}\right)\mathbf{V}(M_g)\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{g}\right) - \left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)(\mathbf{X}\mathbf{g})^*\mathbf{X}\mathbf{g}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)$$

とする．すると,

$$\mathbf{P}_i^*\mathbf{V}\mathbf{P}_i = \sqrt{S}g_i\sum_{k\neq i} g_k\left(X_i\right)^2\sqrt{S},\quad \mathbf{P}_j^*\mathbf{V}\mathbf{P}_i = -\sqrt{S}g_jg_iX_jX_i\sqrt{S}.$$

ここで $i\neq j$ に対して $\mathbf{V}(i,j)$ を $(i,i),(i,j),(j,i),(j,j)$ 成分は以下で定義され, それ以外の成分が 0 となる作用素値行列とする．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_i^*\mathbf{V}(i,j)\mathbf{P}_i & \mathbf{P}_j^*\mathbf{V}(i,j)\mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_i^*\mathbf{V}(i,j)\mathbf{P}_j & \mathbf{P}_j^*\mathbf{V}(i,j)\mathbf{P}_j \end{pmatrix} = \mathbf{g}_j\mathbf{g}_i \begin{pmatrix} A_iA_i^* & -A_jA_i^* \\ -A_iA_j^* & A_jA_j^* \end{pmatrix}. \tag{43}$$

このとき

$$\mathbf{V} = \sum_{i>j}\mathbf{V}(i,j). \tag{44}$$

を得る．さらに自己共役かつ反自己転置な作用素値行列 W を $\mathbf{P}_i^*\mathbf{W}\mathbf{P}_i = 0,\quad \mathbf{P}_i^*\mathbf{W}\mathbf{P}_j = -U_iU_j, (i\neq j)$ とおく．すると,$\mathbf{I}-\mathbf{W} = \mathbf{U}^*\mathbf{U} + \mathbf{Diag}(\mathbf{I}-U_i^*U_i) \geq 0$ となる．ここで $\mathbf{Diag}(C_i)$ は対角成分が C_i となる作用素値行列を表し．$\mathbf{U}$ は $(U_1,\ldots,U_d)$ を表す．したがって

$$\mathbf{Tr}\,\mathbf{V}(i,j)\left(\mathbf{I}-\mathbf{W}\right) = \mathbf{Tr}\,\mathbf{g}_j\mathbf{g}_i \begin{pmatrix} A_iA_i^* & -A_jA_i^* \\ -A_iA_j^* & A_jA_j^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & U_iU_j^* \\ U_jU_i^* & \mathrm{I} \end{pmatrix} = 0.$$

従って系 6 より, **(13.2)** を得る．

次に **(13.1)** から **(13.3)** を示す．$\mathbf{g}=\mathbf{i}$ とおいて先程と同じように $\mathbf{V},\mathbf{V}(i,j)$ をおく．定理 5 より, 以下の条件を満たす $\mathbf{W}^n \in \mathcal{B}_{sa,at}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ が取れる．

$$\mathbf{I}-\mathbf{W}^n \geq 0,\quad \mathbf{Tr}\,\mathbf{V}\left(\mathbf{I}-\mathbf{W}^n\right) \to 0.$$

(44) より任意の $i\neq j$ について,

$$\mathbf{Tr}\,\mathbf{V}(i,j)\left(\mathbf{I}-\mathbf{W}^n\right) \to 0. \tag{45}$$

ここで (45) の左辺は以下のように変形できる．

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr}\,\mathbf{V}(i,j)\left(\mathbf{I}-\mathbf{W}^n\right) &= \mathbf{Tr}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -\mathbf{P}_j^*\mathbf{W}^n\mathbf{P}_i \\ -\mathbf{P}_i^*\mathbf{W}^n\mathbf{P}_j & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_iA_i^* & -A_jA_i^* \\ -A_iA_j^* & A_jA_j^* \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Tr}\left(A_iA_i^* + \mathbf{P}_i^*\mathbf{W}^n\mathbf{P}_jA_iA_j^* + \mathbf{P}_j^*\mathbf{W}^n\mathbf{P}_iA_jA_i^* + A_jA_j^*\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(A_i^*A_i + A_j^*\mathbf{P}_i^*\mathbf{W}^n\mathbf{P}_jA_i + A_i^*\mathbf{P}_j^*\mathbf{W}^n\mathbf{P}_iA_j + A_j^*A_j\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\left(A_i + \mathbf{P}_j^*\mathbf{W}^n\mathbf{P}_jA_j\right)^*\left(A_i + \mathbf{P}_j^*\mathbf{W}^n\mathbf{P}_iA_j\right) + A_j^*\left(\mathrm{I}-(\mathbf{P}_j^*\mathbf{W}^n\mathbf{P}_i)^*\mathbf{P}_j\mathbf{W}^n\mathbf{P}_i\right)A_j\right)\end{aligned}$$

したがって, 補題 21 より,

$$A_i^*A_i = A_j^*A_j,\quad A_i^*A_j + A_j^*A_i = 0.$$

を得る．よって, **(13.3)** を得た． □

8 例

以下この節ではいくつかの具体例について述べる．系 11 を満たす例として $(X_1,X_2)=(P,Q)$ が挙げられる．このとき $C^2(S,\mathbf{X})$ はヘテロダイン測定により達成される．すなわち, $Q+iP$ の固有状態による I の分解に対応する POVM を考えればよい．その他 (Q,kP^{-1}) の場合についてはウェーブレット変換に対応する POVM で $C^2(S,\mathbf{X})$ が達成されることが知られている [8]．この例でも $Q+ikP^{-1}$ の固有状態による I の分解に対応する POVM を考えればよい．

また $\mathcal{H}$ が 2 次元のときには 定理 13 の条件が満たされることが容易に確かめられる．

9 結論

本論文では (3) の意味での非可換な物理量の同時測定の定義下で, 各物理量の分散和の下限 $C(S,\mathbf{X})$ について考察した. §3 では §2 で導入した作用素値行列を用いて自然に得られる第 1 下限 $C^1(S,\mathbf{X})$ 及び第 2 下限 $C^2(S,\mathbf{X})$ を与えた. その後の節では 第 1 下限 $C^1(S,\mathbf{X})$ 及び第 2 下限 $C^2(S,\mathbf{X})$ の関係を論じた. また, 条件を制限することによって得られる $C(S,\mathbf{X})$ の上限 $C^R(S,\mathbf{X})$ についても考察した.

今のところ一般に $C(S,\mathbf{X})$ と $C^1(S,\mathbf{X})$ が一致しないと予想されている. 一致しないのであれば両者がどの程度異なるか, 一致するための必要十分条件などは重要な問題である. さらに §5 で行った問題設定の下で両者が漸近的に一致するかどうかは極めて重要な問題である. $d=2$ のときは定理 10 の条件が成立する場合はハイポ正規作用素に帰着される. この場合ではサブ正規作用素であることと第 1 下限を達成する測定が存在することは同値である. サブ正規作用素とハイポ正規作用素との違いを調べることが定理 10 の条件の下で第 1 下限と $C(S,\mathbf{X})$ の違いを調べることにつながると思われる. サブ正規作用素とハイポ正規作用素については Conway[10] を参照のこと. これらについては今後の研究課題となる.

本論文で行った物理量の同時測定の定式化は一般の Jordan 代数及びそれから生成される対称錘上で展開することは可能である. $\mathcal{H}$ が有限次元である場合は Hermite 行列全体からなる Jordan 代数上の議論と見なすことができる. その際, 定理 13 の条件は $\sqrt{S}X_1\sqrt{S},\ldots\sqrt{S}X_d\sqrt{S}$ から生成される Jordan 代数の rank が 2 となることと同値になると予想される. このような Jordan 代数の代数構造 (もしくはそれに付随する対称錘の幾何構造) からのアプローチがこの問題に有効な手段となることも考えられる. 手始めとして rank が 3 のときにうまく機能する理論を構成することなどが挙げられる. Jordan 代数と対称錘との対応については Faraut and Korányi [9] を参照のこと.

謝辞

電気通信大学の長岡浩司氏からは定理 2 の証明の簡略化に関して有益なアドバイスを頂いた. 大阪大学の白井慎一氏, 京都大学の峯拓矢氏からは Hilbert 空間上の作用素に関していくつかの有益な助言を頂いた. この場を借りて感謝したい.

A 定理 5 の証明

線形計画法における双対定理は一般の線形位相空間上で成立することが知られている. ここでは第 1 下限 $C^1(S,\mathbf{X})$ を一般の線形位相空間上での線形計画問題として捉えることによって定理 5 を証明する.

$\mathcal{X},\mathcal{Y}$ を線形位相空間とする. さらに $\mathcal{L}\subset\mathcal{X}$ を凸錐とし, $\mathcal{X}^*,\mathcal{Y}^*$ を $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ の位相双対空間とする. L の双対錐 $\mathcal{L}^*$ を次のように定義する: $\mathcal{L}^*:=\{f\in\mathcal{X}|\langle f,x\rangle\geq 0,\forall x\in\mathcal{L}\}$. Style and Wets [4] によると次の双対定理が知られている.

定理 14 (双対定理) $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への連続線形写像 a と $b\in\mathcal{Y},c\in\mathcal{X}^*$ に対して次の不等式が成立する.

$$\inf_{\{x\in\mathcal{L}|a(x)=b\}}\langle c,x\rangle\geq\sup_{\{f\in\mathcal{Y}^*|c-a^*(f)\in\mathcal{L}^*\}}\langle f,b\rangle. \tag{46}$$

さらに

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{a,c}:=&\{(\langle c,x\rangle,a(x))\,|x\in\mathcal{L}\}\\ \mathcal{E}_b:=&\mathbb{R}\times\{b\}\end{aligned}$$

とおくと,

$$\overline{\mathcal{F}_{a,c}\cap\mathcal{E}_b}=\overline{\mathcal{F}_{a,c}}\cap\mathcal{E}_b. \tag{47}$$

を満たすとき (46) の等号が成立する.

以下では定理 5 の (18) の等号を示すため, (17) の右辺に定理 14 を適用し, 条件 (47) を満たすことを確かめる. 以下のように $\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{L}$ を置く.

$$\mathcal{X}:=\mathcal{T}_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d),\quad \mathcal{Y}:=\mathcal{T}_{sa,at}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d),\quad \mathcal{L}:=\mathcal{T}_{sa}^{+}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d).$$

このとき $\langle f,x\rangle=\mathbf{Tr}\,fx$ と見なすことにより,

$$\mathcal{X}^*:=\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d),\quad \mathcal{Y}^*:=\mathcal{B}_{sa,at}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d),\quad \mathcal{L}^*:=\mathcal{B}_{sa}^{+}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d).$$

となる. さらに

$$a:=\mathfrak{A},b:=-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right),c:=\mathbf{I}.$$

とおくと $C^1(S,\mathbf{X})$ が (46) の左辺と等しくなる. 次に (17) の等号を示すために, 条件 (47) を満たすことを確かめる. そのためには任意の (47) の右辺の元 $(\alpha,-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$ が (47) の左辺に含まれることを示せばよい. $\mathbf{Tr}\,\mathbf{V}_n\to\alpha,-\mathfrak{A}(\mathbf{V}_n)\to-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$ (in trace norm) となる. $\mathcal{T}_{sa}^{+}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ の列 $\{\mathbf{V}_n\}$ をとる. $\mathbf{Z}_n:=-\mathfrak{A}(\mathbf{V}_n)+\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$ とおく. さらに $\mathbf{Y}_n\in\mathcal{T}_{sa,st}^{+}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d)$ を以下のように定義する. ($\mathbf{P}_i$ の定義については (6) を参照のこと.)

$$\mathbf{P}_i^*\mathbf{Y}_n\mathbf{P}_i:=\sum_{j\neq i}|\mathbf{P}_i^*\mathbf{Z}_n\mathbf{P}_j|,\quad \mathbf{P}_i^*\mathbf{Y}_n\mathbf{P}_j:=0\text{ for }i\neq j.$$

$\mathbf{X}_n:=\mathbf{V}_n+\mathbf{Y}_n-\mathbf{Z}_n$ と定義する. $\mathbf{Y}_n$ の自己転置性より $\mathfrak{A}(\mathbf{X}_n)=-\mathfrak{A}\left(\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\mathbf{X}^*\mathbf{X}\left(\sqrt{S}\otimes\mathbf{i}\right)\right)$. ここで $i\neq j$ に対して作用素値行列 $\mathbf{Z}_n(i,j)$ を次のように定義する.$k\neq i,j$ とすると,

$$\mathbf{P}_k^*\mathbf{Z}_n(i,j)=0,\quad \mathbf{Z}_n(i,j)\mathbf{P}_k=0,\quad \begin{pmatrix}\mathbf{P}_i^*\mathbf{Z}_n(i,j)\mathbf{P}_i & \mathbf{P}_j^*\mathbf{Z}_n(i,j)\mathbf{P}_i\\ \mathbf{P}_i^*\mathbf{Z}_n(i,j)\mathbf{P}_j & \mathbf{P}_j^*\mathbf{Z}_n(i,j)\mathbf{P}_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\mathbf{P}_i^*\mathbf{Z}_n\mathbf{P}_j| & -\mathbf{P}_j^*\mathbf{Z}_n\mathbf{P}_i\\ -\mathbf{P}_i^*\mathbf{Z}_n\mathbf{P}_j & |\mathbf{P}_i^*\mathbf{Z}_n\mathbf{P}_j|\end{pmatrix}.$$

補題 18 より, $\mathbf{Z}_n(i,j)\geq 0$ かつ $\mathbf{Y}_n-\mathbf{Z}_n=\sum_{i\neq j}\mathbf{Z}_n(i,j)\geq 0$ となる. よって $\mathbf{X}_n\geq 0$ を得る. さらに $\mathbf{Z}_n\leq|\mathbf{Z}_n|$ となることから.

$$(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_j)^*\,\mathbf{Z}_n\,(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_j)\leq(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_j)^*\,|\mathbf{Z}_n|\,(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_j).$$

よって

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr}\,\mathbf{Z}_n(i,j)=&2\,\mathbf{Tr}\,|\mathbf{P}_i^*\mathbf{Z}_n\mathbf{P}_j|=\mathbf{Tr}\,(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_j)^*\,\mathbf{Z}_n\,(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_j)\\ &\leq\mathbf{Tr}\,(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_j)^*\,|\mathbf{Z}_n|\,(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_j)\leq\mathbf{Tr}\,|\mathbf{Z}_n|\to 0.\end{aligned}$$

よって $\mathbf{Tr}\,\mathbf{X}_n\to\alpha$ を得る. よって題意が示せた.

B 定理 8 の証明に必要な種々の補題

この節では $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 Z に対して $Z^{(n)}$ で以下の $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の自己共役作用素を表すとする.

$$Z^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}Z^{k,(n)}.$$

なおここで

$$Z^{k,(n)} := \mathrm{I}\otimes\cdots\otimes\mathrm{I}\otimes \overset{i}{Z}\otimes\mathrm{I}\otimes\cdots\otimes\mathrm{I}. \tag{48}$$

と定義した．以下では，このような記号の下で定理 8 の証明に必要な補題 15 及びその補題 15 の証明に必要な種々の補題を証明する．

補題 15 X,Y を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし，S を $\mathcal{H}$ 上の密度演算子とする．

$$\left\|\sqrt{S}\,|[X,Y]|\,\sqrt{S}\right\|_{\mathrm{Tr}} < \infty.$$

が満たされるならば，以下の式が成立する．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\sqrt{S^{\otimes n}}\left|\left[X^{(n)},Y^{(n)}\right]\right|\sqrt{S^{\otimes n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left|\sqrt{S^{\otimes n}}\left[X^{(n)},Y^{(n)}\right]\sqrt{S^{\otimes n}}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\mathrm{Tr}\sqrt{S^{\otimes n}}\left[X^{(n)},Y^{(n)}\right]\sqrt{S^{\otimes n}}\right| = \left|\mathrm{Tr}\sqrt{S}\,[X,Y]\,\sqrt{S}\right|.\end{aligned} \tag{49}$$

証明 ここで $Z := \sqrt{-1}[X,Y]$ とおくと $Z^{(n)} = \sqrt{-1}\left[X^{(n)},Y^{(n)}\right]$ となる．したがって補題 16 を用いると (49) を得る． □

補題 16 Z を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし，S を $\mathcal{H}$ 上の密度演算子とする．

$$\left\|\sqrt{S}\,|Z|\,\sqrt{S}\right\|_{\mathrm{Tr}} < \infty. \tag{50}$$

が満たされるならば，以下の式が成立する．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\sqrt{S^{\otimes n}}\left|Z^{(n)}\right|\sqrt{S^{\otimes n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left|\sqrt{S^{\otimes n}}Z^{(n)}\sqrt{S^{\otimes n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\sqrt{S^{\otimes n}}Z^{(n)}\sqrt{S^{\otimes n}}\right| = \left|\mathrm{Tr}\sqrt{S}Z\sqrt{S}\right|. \tag{51}$$

証明 Z のスペクトル分解を E_Z で表し $Z^{i,(n)}$ のスペクトル分解を $E_{i,n}$ で表す．このとき，

$$\frac{1}{n}\left|Z^{(n)}\right| = \int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|E_{1,n}(dx_1)E_{2,n}(dx_2)\cdots E_{n,n}(dx_n).$$

各 $Z^{i,(n)}$ が可換であることに注意せよ．従って

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left|\sqrt{S^{\otimes n}}\left|Z^{(n)}\right|\sqrt{S^{\otimes n}}\right|\\ &=\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{\otimes n}}\sqrt{S^{\otimes n}}E_{1,n}(dx_1)E_{2,n}(dx_2)\cdots E_{n,n}(dx_n)\sqrt{S^{\otimes n}}\\ &=\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|\mathrm{Tr}\sqrt{S}E_Z(dx_1)\sqrt{S}\,\mathrm{Tr}\sqrt{S}E_Z(dx_2)\sqrt{S}\cdots\mathrm{Tr}\sqrt{S}E_Z(dx_n)\sqrt{S}.\end{aligned} \tag{52}$$

ここで X を確率測度 $\mathrm{Tr}\sqrt{S}E_Z(dx)\sqrt{S}$ に従う確率変数とする．そして確率変数 $X_i = X, X^{(n)} := \sum_{i=1}^n X_i$ と定義する．このとき大数の法則より，

$$\frac{1}{n}E\left(\left|X^{(n)}\right|\right) \to |E(X)| \tag{53}$$

が導ける．従って (52)(53) 及び補題 17 より (51) を得る． □

補題 17 *(50)* が成立するとき以下の不等式が成立する．

$$\mathrm{Tr}\sqrt{S}|Z|\sqrt{S} \geq \mathrm{Tr}\left|\sqrt{S}Z\sqrt{S}\right| \geq \left|\mathrm{Tr}\sqrt{S}Z\sqrt{S}\right|. \tag{54}$$

証明 一般の Trace class な自己共役作用素に関して以下の式が成立する．

$$\mathrm{Tr}\,|T| = \min\left\{\mathrm{Tr}\,T' \,|\, T' \geq \pm T,\quad T' \in \mathcal{T}_{sa}(\mathcal{H})\right\}.$$

$|Z| \geq \pm Z$ より $\sqrt{S}|Z|\sqrt{S} \geq \pm\sqrt{S}Z\sqrt{S}$ となる．したがって $\mathrm{Tr}\sqrt{S}|Z|\sqrt{S} \geq \mathrm{Tr}\left|\sqrt{S}Z\sqrt{S}\right|$ となる． □

C 作用素値行列に関する種々の補題

補題 18 A を $\mathcal{H}$ 上の作用素とする. 2×2 の作用素値行列: $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$ を考える. $\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} AA^* & 0 \\ 0 & A^*A \end{pmatrix}$ となるので $|\mathbf{B}| = \begin{pmatrix} \sqrt{AA^*} & 0 \\ 0 & \sqrt{A^*A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A^*| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix}$ となる. したがって $\begin{pmatrix} |A^*| & A \\ A^* & |A| \end{pmatrix} = |\mathbf{B}| + \mathbf{B} \geq 0$ となる.

補題 19 反自己共役な作用素 U に対して

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & U \\ -U & \mathrm{I} \end{pmatrix} \geq 0. \tag{55}$$

であれば,

$$\mathrm{I} - U^*U = \mathrm{I} + U^2 \geq 0 \tag{56}$$

を得る.

証明 仮定より,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & U \\ -U & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ U \end{pmatrix} \geq 0. \tag{57}$$

を得る. これを計算すると (56) を得る. □

補題 20 S_n を $\|S_n\|_{\mathrm{Tr}} \leq R$ となる自己共役作用素の列とする. P を射影とする. $\|PS_nP\|_{\mathrm{Tr}} \to 0$ となるとき, $\|S_n - (\mathrm{I}-P)S_n(\mathrm{I}-P)\|_{\mathrm{Tr}} \to 0$ となる.

証明 $\|(\mathrm{I}-P)S_nP\|_{\mathrm{Tr}} \to 0$ となることを示すと良い. すなわち $\mathrm{Tr}\sqrt{PS_n(\mathrm{I}-P)S_nP} \to 0$ を示せばよい. まず, $PS_n(\mathrm{I}-P)S_nP = \sum_{i=1}^{\infty} s_{i,n}|\phi_{i,n}\rangle\langle\phi_{i,n}|$ と Schatten 分解する. このとき $\phi_{i,n} \in \mathcal{R}(P)$ であるから, $P\phi_{i,n} = \phi_{i,n}$ となる. すると $\sqrt{s_{i,n}} = \|(\mathrm{I}-P)S_nP\phi_{i,n}\|$ となる. さらに $\psi_{i,n} := (\mathrm{I}-P)S_nP\phi_{i,n}$ とし, $\psi'_{i,n} := \frac{1}{\|\psi_{i,n}\|}\psi_{i,n}$ とする. シュワルツの不等式より,

$$\langle\phi_{i,n}|S_n|\psi'_{i,n}\rangle\langle\psi'_{i,n}|S_n|\phi_{i,n}\rangle \leq \langle\psi'_{i,n}|S_n|\psi'_{i,n}\rangle\langle\phi_{i,n}|S_n|\phi_{i,n}\rangle$$

そして,

$$\langle\phi_{i,n}|S_n|\psi'_{i,n}\rangle = \frac{\langle\phi_{i,n}|S_n|(\mathrm{I}-P)S_nP\phi_{i,n}\rangle}{\|\psi_{i,n}\|} = \frac{\langle\phi_{i,n}PS_n(\mathrm{I}-P)S_nP|\phi_{i,n}\rangle}{\|\psi_{i,n}\|} = \|\psi_{i,n}\|.$$

したがって,

$$\|\psi_{i,n}\| \leq \sqrt{\langle\psi'_{i,n}|S_n|\psi'_{i,n}\rangle\langle\phi_{i,n}|S_n|\phi_{i,n}\rangle}.$$

を得る. これらを用いて,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\sqrt{PS_n(\mathrm{I}-P)S_nP} &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{s_{i,n}} = \sum_{i=1}^{\infty}\|\psi_{i,n}\| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\langle\psi'_{i,n}|S_n|\psi'_{i,n}\rangle\langle\phi_{i,n}|S_n|\phi_{i,n}\rangle} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\langle\psi'_{i,n}|S_n|\psi'_{i,n}\rangle}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\langle\phi_{i,n}|S_n|\phi_{i,n}\rangle} \leq \sqrt{\mathrm{Tr}\,S_n}\sqrt{\mathrm{Tr}\,PS_nP} \\
&\leq \sqrt{R}\sqrt{\mathrm{Tr}\,PS_nP} \to 0.
\end{aligned}$$

□

補題 21 A, B を *Hilbert Schmit* 作用素とする．U_n は線形作用素の列で以下の *3* 条件を満たすとする．

- $\mathrm{I} - U_n^* U_n \geq 0$
- $\mathrm{Tr}\,(A - U_nB)^*\,(A - U_nB) \to 0$
- $\mathrm{Tr}\,B^*\,(\mathrm{I} - U_n^* U_n)\,B \to 0$

このとき以下の式が成立する．

$$A^*A - B^*B = A^*B + B^*A = 0. \tag{58}$$

証明 (58) の左辺を変形すると，

$$A^*A - B^*B = (A - U_nB)^*\,(A - U_nB) - B^*\,(\mathrm{I} - U_n^*U_n)\,B + (A - U_nB)^*\,U_nB + (U_nB)^*\,(A - U_nB)$$

を得る．従って，

$$
\begin{aligned}
&\|A^*A - B^*B\| \\
&\leq \left\|(A - U_nB)^*\,(A - U_nB)\right\| + \|B^*\,(\mathrm{I} - U_n^*U_n)\,B\| + \left\|(A - U_nB)^*\,U_nB\right\| + \left\|(U_nB)^*\,(A - U_nB)\right\| \\
&\leq \left\|(A - U_nB)^*\,(A - U_nB)\right\|_{\mathrm{Tr}} + \|B^*\,(\mathrm{I} - U_n^*U_n)\,B\|_{\mathrm{Tr}} + \left\|(A - U_nB)^*\right\|\,\|U_nB\| + \left\|(U_nB)^*\right\|\,\|(A - U_nB)\| \\
&\leq \left\|(A - U_nB)^*\,(A - U_nB)\right\|_{\mathrm{Tr}} + \|B^*\,(\mathrm{I} - U_n^*U_n)\,B\|_{\mathrm{Tr}} + \left\|(A - U_nB)^*\right\|_{HS}\|U_nB\| + \left\|(U_nB)^*\right\|\,\|(A - U_nB)\|_{HS} \to 0
\end{aligned}
$$

なお $\|\ \ \|_{\mathrm{Tr}}$ は trace ノルム $\|\ \ \|_{HS}$ は Hilbert Schmit ノルムを表す．さらに

$$A^*B + B^*A = (A - U_nB)^*\,U_nB + (U_nB)^*\,(A - U_nB)$$

であるから先程と同じようにして

$$\|A^*B + B^*A\| = 0$$

を得る．□

補題 22 $\mathbf{A}$ を自己共役な作用素値行列とする．このとき以下は同値

(22.1) $\mathbf{A}$ は射影．

(22.2) ${}^t\mathbf{A}$ は射影．

(22.3) $\mathfrak{S}(\mathbf{P})^2 + \mathfrak{A}(\mathbf{P})^2 = \mathfrak{S}(\mathbf{P}),\quad \mathfrak{S}(\mathbf{P})\mathfrak{A}(\mathbf{P}) + \mathfrak{A}(\mathbf{P})\mathfrak{S}(\mathbf{P}) = \mathfrak{A}(\mathbf{P}).$

証明 $\mathbf{P}$ が射影であるための必要十分条件は以下で与えられる．

$$(\mathfrak{S}(\mathbf{P}) + \mathfrak{A}(\mathbf{P}))^2 = \mathfrak{S}(\mathbf{P}) + \mathfrak{A}(\mathbf{P})$$

この条件を自己転置部分と反自己転置部分に別けて書くと，

$$\mathfrak{S}(\mathbf{P})^2 + \mathfrak{A}(\mathbf{P})^2 = \mathfrak{S}(\mathbf{P}),\quad \mathfrak{S}(\mathbf{P})\mathfrak{A}(\mathbf{P}) + \mathfrak{A}(\mathbf{P})\mathfrak{S}(\mathbf{P}) = \mathfrak{A}(\mathbf{P}).$$

すなわち **(22.3)** を得る．同様にして **(22.2)** との同値性を得る．□

補題 23 $\mathbf{P}$ を射影となる作用素値行列とする．このとき以下の条件は同値である．

(23.1) $2\mathfrak{S}(\mathbf{P})$ が射影となる．

(23.2) $(\mathfrak{A}(\mathbf{P}))^2 = \frac{1}{2}\mathfrak{S}(\mathbf{P})$ が成立する.

(23.3) $\mathfrak{S}(\mathbf{P})^2 = \mathfrak{A}(\mathbf{P})^2$ が成立する.

(23.4) $\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{P} = 0$.

(23.5) ${}^t\mathbf{P}\mathbf{P} = 0$.

(23.6) $\mathbf{P}(\mathbf{I} - 2\mathfrak{A}(\mathbf{P})) = 0$.

(23.7) $(\mathbf{I} - 2\mathfrak{A}(\mathbf{P}))\mathbf{P} = 0$.

(23.8) 任意の作用素値行列 $\mathbf{S}$ に対して $(\mathfrak{S}(\mathbf{PSP}))^2 = (\mathfrak{A}(\mathbf{PSP}))^2$ が成立する.

証明 $\mathbf{P}$ が射影であるから $(\mathfrak{S}(\mathbf{P}) + \mathfrak{A}(\mathbf{P}))^2 = \mathfrak{S}(\mathbf{P}) + \mathfrak{A}(\mathbf{P})$ となる. 両辺の自己転置部分をとると, $\mathfrak{S}(\mathbf{P})^2 + \mathfrak{A}(\mathbf{P})^2 = \mathfrak{S}(\mathbf{P})$ を得る. この式から **(23.1) (23.2) (23.3)** の同値関係が出る. 次に **(23.2)** 及び **(23.3)** を仮定して **(23.4)** を導く.**(23.2)** より $\mathfrak{S}(\mathbf{P})$ と $\mathfrak{A}(\mathbf{P})$ の可換性が導かれる. 従って, $\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{P} = \mathfrak{S}(\mathbf{P})^2 - \mathfrak{A}(\mathbf{P})^2 + \mathfrak{S}(\mathbf{P})\mathfrak{A}(\mathbf{P}) - \mathfrak{A}(\mathbf{P})\mathfrak{S}(\mathbf{P}) = 0$ を得る. 次に **(23.4)** を仮定して **(23.3)** を導く. まず仮定より, $0 = \mathbf{P}\ {}^t\mathbf{P} = \mathfrak{S}(\mathbf{P})^2 - \mathfrak{A}(\mathbf{P})^2 + \mathfrak{S}(\mathbf{P})\mathfrak{A}(\mathbf{P}) - \mathfrak{A}(\mathbf{P})\mathfrak{S}(\mathbf{P})$ を得る. ここで, 右辺の自己転置部分を取ると,**(23.3)** を得る. 従って **(23.1)** から **(23.4)** までの同値性が言えた. 同様にして **(23.5)** と **(23.1)** から **(23.3)** までの同値性が言える. 条件 **(23.6)** の条件式は以下のように書き換えられる. $0 = \mathbf{P}(\mathbf{I} - 2\mathfrak{A}(\mathbf{P})) = \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathfrak{S}(\mathbf{P}) - \mathfrak{A}(\mathbf{P}) + \mathfrak{S}(\mathbf{P}) - \mathfrak{A}(\mathbf{P})) = \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{P} + {}^t\mathbf{P}) = \mathbf{P}\ {}^t\mathbf{P}$. 従って,**(23.6)** は **(23.4)** と同値である. 同様にして **(23.7)** と **(23.5)** の同値性が言える. 従って **(23.1)** から **(23.7)** までの同値性が言えた.

最後に **(23.1)** から **(23.7)** までと **(23.8)** の同値性を示す. **(23.8)** から **(23.3)** は容易に導ける. そこで **(23.4)** 及び **(23.5)** を仮定して **(23.8)** を示す.

$$(\mathfrak{S}(\mathbf{PSP}))^2 = (\mathbf{PSP} + {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{S}\ {}^t\mathbf{P})^2 = \mathbf{PSP}^2\mathbf{SP} + \mathbf{PSP}\ {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{S}\ {}^t\mathbf{P} + {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{S}\ {}^t\mathbf{P}\mathbf{PSP} + {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{S}\ {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{S}\ {}^t\mathbf{P}$$

ここで **(23.4)** 及び **(23.5)** を用いると, $(\mathfrak{S}(\mathbf{PSP}))^2 = \mathbf{PSP}^2\mathbf{SP} + {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{S}\ {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{S}\ {}^t\mathbf{P}$. となる. 同様にして, $(\mathfrak{A}(\mathbf{PSP}))^2 = \mathbf{PSP}^2\mathbf{SP} + {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{S}\ {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{P}\ {}^t\mathbf{S}\ {}^t\mathbf{P}$ を得る. したがって **(23.8)** を得る. □

補題 24 $\mathbf{T}_n$ を自己共役な $d \times d$ の作用素値行列の列とするこのとき以下の *2* 条件は同値になる.

(24.1) $\|\mathbf{T}_n\|_{\mathbf{Tr}} \to 0$ となる.

(24.2) $\|\mathfrak{S}(\mathbf{T}_n)\|_{\mathbf{Tr}} \to 0$ 及び $\|\mathfrak{A}(\mathbf{T}_n)\|_{\mathbf{Tr}} \to 0$ となる.

証明 **(24.1)** から **(24.2)** を示す. $\mathfrak{S}(\mathbf{T}_n) = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_n + {}^t\mathbf{T}_n)$ であるから, 補題 26 より,

$$\|\mathfrak{S}(\mathbf{T}_n)\|_{\mathbf{Tr}} \le \frac{1}{2}(\|\mathbf{T}_n\|_{\mathbf{Tr}} + \|\ {}^t\mathbf{T}_n\|_{\mathbf{Tr}}) \le \frac{1}{2}(\|\mathbf{T}_n\|_{\mathbf{Tr}} + d^2\|\mathbf{T}_n\|_{\mathbf{Tr}}) \to 0.$$

逆は自明. □

補題 25 $\mathbf{P}$ を射影で補題 *23* の条件を満たす作用素値行列とする. 以下の *3* 条件は同値となる.

(25.1) $\|\mathbf{T}_n\|_{\mathbf{Tr}} \to 0$ となる.

(25.2) $\|\mathfrak{S}(\mathbf{T}_n)\|_{\mathbf{Tr}} \to 0$ となる.

(25.3) $\|\mathfrak{A}(\mathbf{T}_n)\|_{\mathbf{Tr}} \to 0$ となる.

証明 補題 30 より容易に導ける. □

補題 26 $\mathbf{T}$ を $d\times d$ の作用素値行列とする．すると $\|{}^t\mathbf{T}\|_{\mathbf{Tr}} \le d^2\|\mathbf{T}\|_{\mathbf{Tr}}$ を得る．

証明　補題 27 より，$\|\mathbf{P}_i\mathbf{T}\mathbf{P}_j\|_{\mathbf{Tr}} \le \|\mathbf{T}\|_{\mathbf{Tr}}$ でるから，$\|{}^t\mathbf{T}\|_{\mathbf{Tr}} \le \sum_{i,j}\|\mathbf{P}_i\mathbf{T}\mathbf{P}_j\|_{TR} \le d^2\|T\|_{\mathbf{Tr}}$ となり題意を得る． □

補題 27 $\mathbf{T}$ を $d\times d$ の作用素値行列とする．すると $\|\mathbf{P}_i\mathbf{T}\mathbf{P}_j\|_{\mathbf{Tr}} \le \|\mathbf{T}\|_{\mathbf{Tr}}$ を得る．

証明　作用素の trace norm について以下の式が知られている．

$$\|\mathbf{T}\|_{\mathbf{Tr}} = \sup\left\{\sum_n\langle\phi_n,\mathbf{T}\psi_n\rangle \,\middle|\, \{\phi_n\}\text{ 及び }\{\psi_n\}\text{ は }\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d\text{ の正規直交基底}\right\}.$$

そして，$\mathbf{P}_i\mathbf{T}\mathbf{P}_j$ は $\mathcal{H}$ 上の作用素とみなすことができるので

$$\|\mathbf{P}_i\mathbf{T}\mathbf{P}_j\|_{\mathbf{Tr}} = \sup\left\{\sum_n\langle\phi_n,\mathbf{P}_i\mathbf{T}\mathbf{P}_j\psi\rangle \,\middle|\, \begin{array}{l}\{\phi_n\}\text{ 及び }\{\psi_n\}\text{ は }\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^d\text{ の正規直交基底で}\\ \text{各 }n\text{ について }(\mathbf{P}_i\phi_n=0,\mathbf{P}_j\psi_n=0)\text{ または}\\ (\mathbf{P}_i\phi_n=\phi_n,\mathbf{P}_j\psi_n=\psi_n).\end{array}\right\}. \tag{59}$$

ここで $\mathbf{P}_i\phi_n=\phi_n, \mathbf{P}_j\psi_n=\psi_n$ となる n の集合を Λ と表すと,(59) での条件を満たす $\{\phi_n\}$ と $\{\psi_n\}$ の組について

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}\|_{\mathbf{Tr}} &\ge \sum_n\langle\phi_n,\mathbf{T}\psi_n\rangle = \sum_{n\in\Lambda}\langle\phi_n,\mathbf{T}\psi_n\rangle + \sum_{n\lambda}\langle\phi_n,\mathbf{T}\psi_n\rangle\\ &= \sum_{n\in\Lambda}\langle\phi_n,\mathbf{P}_i\mathbf{T}\mathbf{P}_j\psi_n\rangle + \sum_{n\lambda}\langle\phi_n,\mathbf{T}\psi_n\rangle \ge \|\mathbf{P}_i\mathbf{T}\mathbf{P}_j\|_{\mathbf{Tr}} + \sum_{n\lambda}\langle\phi_n,\mathbf{T}\psi_n\rangle \ge \|\mathbf{P}_i\mathbf{T}\mathbf{P}_j\|_{\mathbf{Tr}}\end{aligned}$$

よって，題意を得た． □

補題 28 $W\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ について以下は同値

(28.1) W が部分等距離作用素．

(28.2) W^* が部分等距離作用素．

(28.3) W^*W が射影作用素．

(28.4) WW^* が射影作用素．

証明は 日合・柳 [7] を参照のこと．

補題 29 U^*U が射影であるとするこのとき

$$U^*U^2 = U$$

を得る．

証明　U^*U が射影であることから $\mathrm{I}=P_{\mathcal{K}(U^*U)}+U^*U$ となる．さらに $\mathcal{K}(U)=\mathcal{K}(U^*U)$ であるから，$U^*U = \mathrm{I}-P_{\mathcal{K}(U)}$ となり，$U^*U^2=(\mathrm{I}-P_{\mathcal{K}(U)})U=U$ となる． □

補題 30 $\mathbf{P}$ を $2\mathfrak{S}(\mathbf{P})$ 及び自身が射影となる作用素値行列とする．$\mathbf{A}$ を自己共役な作用素値行列とすると

$$|\mathfrak{S}(\mathbf{PAP})| = |\mathfrak{A}(\mathbf{PAP})|$$

となり，

$$\|\mathbf{PAP}\|_{\mathbf{Tr}} \le 2\,\|\mathfrak{S}(\mathbf{PAP})\|_{\mathbf{Tr}},\quad \|\mathbf{PAP}\|_{\mathbf{Tr}} \le 2\,\|\mathfrak{A}(\mathbf{PAP})\|_{\mathbf{Tr}}$$

を得る．

証明 補題 23 より $\mathfrak{S}(\mathbf{PSP})$ 及び $\mathfrak{A}(\mathbf{PSP})$ は自己共役であるから

$$|\mathfrak{S}(\mathbf{PSP})|^2 = |\mathfrak{A}(\mathbf{PSP})|^2$$

を得る. よって題意を得た. □

以下補題 31 から補題 35 までについては補題の主張のみ書いておく. 証明は容易である.

補題 31 $\mathbf{A}$ が自己共役ならば $\mathfrak{A}(\mathbf{A})$ 及び $\mathfrak{S}(\mathbf{A})$ も自己共役になる.

補題 32 任意の作用素値行列 $\mathbf{B}$ 及び行列 $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ 及び作用素 A について以下の式が成立する.

$$\mathbf{Tr}\,(A \otimes \mathbf{a})\,\mathbf{B}\,(C \otimes \mathbf{c}) = \mathbf{a}\,\mathrm{Tr}\,((A \otimes \mathbf{i})\mathbf{B}(C \otimes \mathbf{i}))\,\mathbf{c} = A\,\mathbf{tr}\,((\mathrm{I} \otimes \mathbf{a})\,\mathbf{B}\,(\mathrm{I} \otimes \mathbf{c}))\,C.$$

補題 33 任意の作用素値行列 $\mathbf{B}$ 及び作用素 A, C について以下の式が成立する.

$$\mathfrak{S}((A \otimes \mathbf{i})\mathbf{B}(C \otimes \mathbf{i})) = (A \otimes \mathbf{i})\mathfrak{S}(\mathbf{B})(C \otimes \mathbf{i})$$
$$\mathfrak{A}((A \otimes \mathbf{i})\mathbf{B}(C \otimes \mathbf{i})) = (A \otimes \mathbf{i})\mathfrak{A}(\mathbf{B})(C \otimes \mathbf{i}).$$

補題 34 任意の作用素値行列 $\mathbf{A}$ について以下の式が成立する.

$$\mathrm{Tr}\,\mathfrak{S}(\mathbf{A}) = \mathfrak{S}(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}), \quad \mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}(\mathbf{A}) = \mathfrak{A}(\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}).$$

補題 35 $\mathbf{P}$ が射影となる作用素値行列とする. このとき,

$$\mathbf{I} - 2\mathfrak{A}(\mathbf{P}) \geq 0$$

を得る.

参考文献

[1] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory,* (Academic Press, New York, 1976).

[2] H. P. Yuen and M. Lax, IEEE trans. **IT-19**, 740 (1973).

[3] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, (North_Holland, Amsterdam, 1982).

[4] R. M. Van Style and R. J. B. Wets, J. Math. Anal. Appl., **22**, 679 (1968).

[5] 長岡浩司, "エルミート行列の同時対角化のある種の一般化とその量子推定理論との関係について", 日本応用数理学会論文誌, vol.1,No.4,305, (1991).

[6] Naǐmark, Comptes Rendus (Doklady) de l'Acadenie des Sience de l'URSS, vol. **41**, No. **9**, 359, (1943).

[7] 日合文雄, 柳研二郎, ヒルベルト空間と線形作用素, (牧野書店, 1995).

[8] 坂口 文則, "量子力学からみたウェーブレット," 量子情報と進化の力学:研究最前線 (大矢雅則・小嶋泉 編), 牧野書店, 第 2 部 (応用編) 第 5 章,pp.177-196,(1996).

[9] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, (Clarendon Press, Oxford, 1994).

[10] J. B. Conway, *The theory of Subnormal Operators*, Math. Surveys and Monographs, Vol. 36, (Amer. Math. Soc., 1991).