数理解析研究所講究録
1110 巻 1999 年 96-103

ヒルベルト C^* 双加群について II 可算生成の場合

岡山大学環境理工学部 梶原 毅

1 序

本稿の結果は、綿谷安男、C.Pinzari の両氏との共同研究であり、[KPW] Appendix の結果を発展させたものであるが、出版された論文においては Appendix は削除されており、別の論文として出版する予定である。

本稿 (II) では、両側に関して可算生成であるような Hilbert C*-bimodule の性質について、考察する。両側に関して有限生成の場合には必然的に有限指数的であったが、可算無限個の生成元を必要とする場合には事情はそのように単純ではない。

Pimsner-Popa 型不等式がなりたたなくなる場合がある。これは、W*-的に指数無限大になってしまう場合である。たとえば、A が単位元をもつ C*-環、G を連続群、α を G の A への連続作用として、$X = A \rtimes_\alpha G$ で ${}_AX_A$ などを考えるとこの場合になる。

一方、Pimsner-Popa 型不等式が成り立っても左から作用する C*-環がコンパクト環に含まれない場合であり、これは C*-的に指数有限にならない場合である。このような状況は、特異点をもつ被覆、指数が 4 以上の Jones 包含関係、ある種の力学系から作られる例などに現れ、こちらは興味ある研究対象である。

指数無限の場合の研究に進む前に、可算無限個の基底が必要であってもある意味で" 指数有限" の条件をみたすものを十分調べておくことが必要であると考えられ、それが本稿の目的である。左右の作用と内積をもつ bimodule に対して、Pimsner-Popa 型不等式をみたすこと、さらに左右の作用がコンパクト環に入ることによって" 指数有限性" を定義し、その場合に、有限生成の場合と同様、“指数” が定義されることを示す。さらに、“指数有限” の概念は、ε-structure, duality ともよばれる conjugate の存在と同値であることを示す。

さらにこのような可算無限生成だが有限次元であるような例としては、locally finite な Cuntz-Krieger 環を与える bimodule [KPW3] がある。また、連続群による Hilbert C*-bimodule の接合積 [K] が、さらには、連続群上の C*-bundle なども考えられるが、これらについては別の機会に述べたい。

2 定義

B は σ-unital C* -環、X は B 上の可算生成 Hilbert C*-module とする。以下は簡単のため C*-環は可分、Hilbert C*-module は可算生成と仮定する。なお、B 上の Hilbert C*-module は右 B 内積と B の右作用を合わせもち両立条件をみたすものである。Hilbert C*-module に関しての詳細は、[L] が非常によい文献である。

同様に、B を C*-環として左 B 内積と左 B 作用を合わせ持ち Hilbert C*-module と同様の両立条件をもつものを、とくに left を強調して、left Hilbert C*-module とよぶことにする。

Hilbert C*-moduel, left Hilbert C*-module に対して、

$$\theta^r_{x,y}(z) = x(y|z)_B \qquad \theta^l_{x,y}(z) = {}_A(z|y)x$$

によって左右の rank one 作用素を定義する。

X_B が Hilbert C*-module のときに、$\mathbb{L}_B(X)$ は、X から X への線形写像で B 内積に関して adjoint をもつもの全体とし、$\mathcal{K}_B(X_B)$ は、rank one 作用素の有限和のノルム閉包とする。これはコンパクト環と呼ばれる。${}_AX$ が left Hilbert C*-module であるときも、同様にして ${}_A\mathbb{L}({}_AX)$, ${}_A\mathcal{K}({}_AX)$ を定義する。

X 可算基底部分集合 $\{u_i\}$ が X_B の通常の意味の (可算) 基底であるとは、任意の $x \in X$ に対して $x_n = \sum_{i=1}^n u_i(u_i|x)_B$ とおくとき、$\|x_n\| \leq \|x\|$ かつ、$\|x_n - x\| \to 0$ となることである。

これで十分であるように思えるが、可算集合は必ずしも自然数によって自然に順序づけられているとはかぎらない。そこで、並べ替えによらない収束を考えておくことが必要となる。たとえば、bimodule のテンソル積をつくると、index は 2 重になるので、並べ方に任意性がある。

Definition 1. $\{u_i\}_{i\in\Lambda}$ が X の無条件収束基底であるとは、任意の $x \in X$ に対して

$$\sum_{i\in F} u_i(u_i|x)_B$$

がネットの意味で x に収束することである。

普通の級数では、無条件収束は絶対収束と同じ意味になる。

可算生成な Hilbert module に対して無条件収束基底がとれないとこのような定義をしても意味がない。

Lemma 2. $\{u_i\}_{i\in\Lambda}$ が X の通常の意味の可算基底であって、$\{\theta^r_{u_i,u_i}\}_{i\in\Lambda}$ が互いに可換であれば、実は無条件収束基底である。

この補題を用いて、次の命題により、一般的にとれることが示される。

Proposition 3. *σ-unital な C^*-環 B 上の可算生成 Hilbert module X には、無条件収束する可算基底が必ずとれる。*

Proof. 特に、$X_B = B_B$ のときは、$h \in B_+$, $0 \le h \le I$ で $\overline{Bh} = B$ となるものが必ずとれる。そこで、$\{h^{1/n}\}_n$ とおけばよい。これは明らかに上の補題の可換条件をみたしている。

B_B の可算個の直和 B-module を H_B とかく。Kasparov の stabilization trick [B] により、任意の σ-unital C*-環 B 上の可算生成 C*-module X_B に対して、$X_B \oplus H_B \simeq H_B$ となっている。$X = H_B$ のときは、各 B の基底をうまく並べることにより、無条件収束基底を作れる。さらに、一般の場合は、pH_B の形であるから、H_B の基底に左から p をかければよい。 □

A, B が σ-unital な C*-環であるとする。(X, ϕ) または X が Hilbert A-B bimodule (A, B を明記したくないときは Hilbert C* -bimodule) であるとは、

1. X_B は可算生成 Hilbert B-module である。
2. ϕ は A から $\mathcal{L}_B(X_B)$ への非退化な * 単射である。

これを、略して ${}_AX_B$ と書くこともある。左右を逆にして、left Hilbert C*-module で 右作用をもつものとして、left Hilbert C*-bimodule も同様に定義できる。

$X = X_A$, $Y = {}_AY_B$ であるとき、balanced tensor product $X \otimes_A Y$ が定義される。Lemma 2 を用いて、次の命題が示される。

Proposition 4. *A, B, は σ-unital で、X, Y は可算生成とする。Hilbert B-module $X \otimes_A Y$ の無条件収束基底として、$\{u_i \otimes v_j\}_{i,j}$ の形のものがとれる。ただし、$\{u_i\}_i$ は X_A の可算基底 $\{v_j\}_j$ Y_B の可算基底である。*

Proof. X の方を pH_A の形でかく。$H_A \otimes_A Y$ に基底を構成するときに、H_A の基底を有限交差性をもつようにとっておくと、基底の収束が 2 重級数ではなく 1 重の級数になりうまく収束が示せる。 □

なお、この命題は、X_A, ${}_AY_B$ の任意の基底 $\{u_i\}_i$, $\{v_j\}_j$ に対して $\{u_i \otimes v_j\}_{i,j}$ が $X \otimes_A Y$ の基底になることを意味するものではない。この場合には、一般に各基底は直交せず、また有限交差性もつ保証がないので、非常に難しい問題になる。

${}_A\mathcal{L}_B(X_B)$ および ${}_A\mathcal{K}_B(X_B)$ は $\mathcal{L}_B(X_B)$, $\mathcal{K}_B(X_B)$ の元で、A の左からの作用と可換なものの集合を表すものとする。なお、left Hilbert C*-bimodule に対しても、同様な記号を定義する。さらに、${}_AX_B$ と ${}_AY_B$ に対しても、$\mathcal{L}_B(X_B, Y_B)$, $\mathcal{K}_B(X_B, Y_B)$, ${}_A\mathcal{L}_B(X_B, Y_B)$, ${}_A\mathcal{K}_B(X_B, Y_B)$, なども同様に定義する。

なお、Hilbert C*-bimodule X の内積、および作用を左右逆にしたものを conjugate bimodule と呼び $\overline{X}$ とかく。これは、left Hilbert C*-bimodule になる。

Definition 5. B-A right Hilbert bimodule Y が X の conjugate であるとは、$R \in {}_B\mathcal{L}_B(B_B, (Y \otimes X)_B)$ と $\overline{R} \in {}_A\mathcal{L}_A(A_A, (X \otimes Y)_A)$ で、

$$(\overline{R}^* \otimes I_X) \circ (I_X \otimes R) = I_X$$
$$(R^* \otimes I_Y) \circ (I_Y \otimes \overline{R}) = I_Y$$

をみたすものが存在することである。

conjugate はユニタリ同値の範囲で一意的であることが、あとの証明の中で示される。$\inf \|R\|\|\overline{R}\|$ で X の dimension を定義する。$R, \overline{R}$ は ε-structure とか、カテゴリの世界で duality と呼ばれるものに他ならない。有限生成のときは代数的な性質だけが内包されているが、可算生成のときには強い位相的な有限性も併せて内包していることが定理によってわかる。

Definition 6. X は A-B right Hilbert bimodule とする。X が有限右次元をもつとは、左 A-内積も存在して、

1. 左 A -内積は full であり、B の右作用 ψ は ${}_A\mathcal{L}({}_AX)$ に値をとる。

2. $\phi : A \to \mathcal{L}_B(X_B)$ は、A から $\mathcal{K}_B(X_B)$ への単射である。

3. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ が存在して、$x_1, \cdots, x_n \in X$ に対して、

$$\lambda_1 \| \sum_i \theta^r_{x_i,x_i} \| \leq \| \sum_i {}_A(x_i|x_i) \| \leq \lambda_2 \| \sum_i \theta^r_{x_i,x_i} \|$$

 がなりたつ。

(3) は、Pimsner-Popa 型の不等式と類似のものであり、W*-的な条件である。A が単純であるときは、多くの場合これだけで十分であることが知られている。(2) の条件は C*-的条件であり、単純でないときは、この条件が重要である。(3) は成り立っていても (2) が成り立たない例は特異点をもつ被覆などで作られる。

X が left Hilbert C*-bimodule で $\overline{X}$ が有限右次元を持つとき、X は有限左次元をもつという。X が単位元をもつ C* -環 A-B 上の bimodule で、両側に有限次元を持てば、両方のコンパクト環が I をもち、[KW1] の意味の finite type になる。P-P 不等式はその場合不要であった。

3 定理

可算生成の Hilbert C*-bimodule の有限次元性を、conjugate を用いて特徴づけることを主目的とする。

Lemma 7. X は可算生成 *right Hilbert bimodule* で有限右次元をもつとする。そのとき、

1. X の任意の右基底 $\{x_i\}$ に対して、$\sum_i {}_A(x_i|x_i)$ は $\mathcal{Z}(M(A))$ の正値可逆元に $M(A)$ の *strict* 位相で収束する。
2. 写像 $\theta^r_{x,y} \in \mathcal{K}_B(X_B) \to z^{-1}{}_A(x|y)$ は、$\mathcal{K}_B(X_B)$ から A への条件付き期待値 E に拡張される。
3. 写像 $x' \otimes \overline{x} \in X \otimes \overline{X} \to \theta^r_{x',x} \in \mathcal{K}_B(X_B)$ は $(X \otimes \overline{X})_A$ から $(\mathcal{K}_B(X_B))_A$ へのユニタリに拡張される。$\mathcal{K}_B(X_B)$ の A 値右内積は $F = zE$ によって与えられる。

Proof. $F_n : \mathcal{K}_B(X_B) \to A$ を $F_n(T) = \sum_{i=1}^n {}_A(Tx_i|x_i)$ で定義する。$n \to \infty$ とのとき、$\mathcal{K}_B(X_B)$ から A への写像にうまくノルム収束することが示される。$T = a \in A$ を選ぶと、$F_n(a) = \sum_i {}_A(x_i|x_i)$ が $M(A)$ の strict 位相で収束していることがわかる。収束先が $M(A)$ の可逆元であること、基底のとりかたによらないこと、$M(A)$ の center の元であることなどは、有限生成の場合と同様の考え方で、可算無限性に考慮をはらいながら証明される。 □

上の $z \in \mathcal{Z}M(A)$ を [KW1] にならって right index とよぶ。同様に、left Hilbert C*-bimodule に対して left index を定義することもできる。

Lemma 8. Y は X の *conjugate* で 作用素 $R, \overline{R}$ によって与えられているものとする。そのとき正の $T \in \mathcal{L}_B(X_B)$ に対して、

$$\|R\|^{-2}T \leq \overline{R}^*(T \otimes I_Y)\overline{R}$$

が成り立つ。

Proof.

$$\begin{aligned} T &= (\overline{R}^* \otimes I_X) \circ (I_X \otimes R)T(I_X \otimes R^*)(\overline{R} \otimes I_X) \\ &= (\overline{R} \otimes I_X)(T \otimes RR^*)(\overline{R} \otimes I_X) \\ &\leq \|R\|^2 \overline{R}^*(T \otimes I_Y)\overline{R} \end{aligned}$$

□

これは、conjugate から左内積をつくる過程において重要である。

Theorem 9. X は可分 C^* -環 A, B 上の可算生成 *right Hilbert bimodule* とする。そのとき次は同値である。

1. X は左内積も併せてもち、*Hilbert C^*-bimodule* としては右有限次元であり、*left Hilbert C^*-bimodule* としては左有限次元である。

2. X は可算生成 *right Hilbert bimodule* の中で *conjugate* をもつ。

Proof. (2) から (1) を示す。R, $\overline{R}$ を X の conjugate に現れる作用素とする。x, y に対して

$$_A(x|y)(a) = \overline{R}^*(\theta^r_{x,y} \otimes I_Y)\overline{R}(a)$$

により、$M(A)$ に値をとる $_A(x|y)$ を定める。$\overline{AX} = X$ であることをもちいて、実は $_A(x|y) \in A$ となることが示される。$y \in Y$ に対して、$l_y : X \to Y \otimes X$ を $l_y(x) = y \otimes x$ で定義する。$(\overline{R}^* \otimes I_y)(I_X \otimes R) = I_X$ を a^*xb に作用させると、$\left(l_{l_x{}^*\overline{R}(a)}\right)^* R(b) = a^*xb$ となる。$\{a^*xb\}$ の形の元全体が X で total であることより、この式は、上の式と同値である。さらに、今度は $(R^* \otimes I_Y)(I_Y \otimes \overline{R}) = I_Y$ を用いて、

$$_A(l_y{}^*R(b)|l_{y'}{}^*R(b')) = {}_A(\overline{y}b|\overline{y}'b')$$

となることがわかる。左辺の左内積は conjugate で定義したものであり、右辺の左内積は $\overline{Y}$ の左内積である。$\{l_y{}^*R(b)\}$ は X の中で total であることより、

$$U : \overline{y}b \in \overline{Y} \to l_y{}^*R(b) \in X$$

を定義する。U は左 A 内積に関してユニタリであるので U は well defined である。さらに右 B 作用と可換である。$\overline{Y}$ の左内積の性質から、X の左内積の対応する性質が従う。

$\theta^r_{x,yb} = \theta^r_{xb^*,x}$ から $_A(x|x'b) = {}_A(xb^*|x')$ であるから、$\psi(b) \in {}_A\mathcal{L}(_AX)$ である。$a^*xb = (l_{(l_x)^*}\overline{R}(a))^*R(b)$ であることと、$\overline{R}(a)$, $R(b)$ などが、代数的テンソルの有限和のルム極限であることより、$\psi(b) \in {}_A\mathcal{K}(_AX)$ である。

X と Y の役割を入れ換えて議論すると Y にも左内積を同様に定義して、

$$V : \overline{x}a \in \overline{X} \to l_x^*\overline{R}(a) \in Y$$

がユニタリであるようにできる。X の右内積が Y の左内積に対応するので、X の左かけ算は Y の右かけ算で、その結果 $\mathcal{K}_B(X_B)$ に入る。

$$\overline{R}^*(x \otimes l_{x'}^*\overline{R}(a)) = \overline{R}^*(\theta^r_{x,x'} \otimes I)\overline{R}(a)$$

であることなどより、

$$\overline{R}^*(x \otimes V\overline{x}') = {}_A(x|x') \qquad R^*(V\overline{x} \otimes x') = (x|x')_A$$

である。R を $V^*\otimes R$ で、$\overline{R}$ を $(I\otimes V^*)\overline{R}$ で置き換えて、$Y=\overline{X}$ と考えてよい。$\{y_j\}$ を X の基底とし、$b\in B$ として、$\sum_{j=1}^{n}(\overline{y}_j\otimes y_j)b$ はノルム有界で、$\sum_j(y_j|y_j)_B$ は R^*R に、$\sum_i {}_A(x_i|x_i)$ は $\overline{R}^*\overline{R}$ に strict 位相で収束している。これらが可逆という仮定より、両側内積は full である。ノルムに関する P-P 型不等式は、直前の Lemma 7 から従う。

(2) から (1) を導く。a, b がともにコンパクト環の元だから、両側の基底を取って、$\sum(x_i\otimes\overline{x}_i)a$ と $\sum(\overline{y}_i\otimes y_j)b$ を考える。これらが弱収束することとノルム有界であることが示され、それによりともに、ノルム収束することがわかる。そこで、

$$\overline{R}(a)=\sum_i(x_i\otimes\overline{x}_i)a \qquad R(b)=\sum_j(\overline{y}_j\otimes y_j)b$$

と定義すれば、基底の性質より、これらが conjugate の等式をみたすことがわかる。 □

References

[B] B.Blackarder, *Operator algebras and K-theory,* MSRI Publications, 1986

[K] T.Kajiwara, *Continuous crossed products of Hilbert C^*-bimodules,* preprint 1999

[KPW1] T.Kajiwra, C.Pinzari and Y.Watatani, Appendix in *Ideal structure and simplicity of the C^*-algebras generated by Hilbert bimodues,* preprint 1996

[KPW2] T.Kajiwra, C.Pinzari and Y.Watatani, *Ideal structure and simplicity of the C^*-algebras generated by Hilbert bimodues,* J. Funct. Anal. 159(1998), 295-322

[KPW3] T.Kajiwra, C.Pinzari and Y.Watatani, *Hilbert C^*-bimodules and countably generated Cuntz-Krieger algebras,* preprint 1998

[KW1] T.Kajiwara and Y.Watatani, *Jones index theory by Hilbert C^*-bimodules and K-theory,* to appear Trans. AMS.

[KW2] T.Kajiwara and Y.Watatani, *Crossed products of Hilbert C^*-bimodules by countable discrete groups,* Proc. Amer.Math. Soc. 126(1998), 841-851

[KW3] T.Kajiwara and Y.Watatani, *Crossed Products of Hilbert C^*-Bimodules by Bundles,* J. Austral. Math. Soc. 64(1998), 119-135

[L] E.C.Lance, *Hilbert C^*-modules : A toolkit for operator algebraists,* London Math. Soc. Lecture Note Series 210(1995)

[LR] R. Longo, J.E. Roberts, *A theory of dimension,* K-theory 11(1997), 103-159

[Pi] M.Pimsner, *A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger Algebras and Crossed products by* $\mathbf{Z}$ *in 'Free Probability theory',* Fieldes Institute Communications 12(1997), AMS

[W] Y. Watatani, *Index for C^*-subalgebras,* Memoir Amer. Math. Soc. 424(1990).