数理解析研究所講究録
1114 巻 1999 年 58-66

A concise Jacobi system and conjugate points under the strict linear independency constraint qualification. [1]

九州大学・数理　川崎英文 (Hidefumi Kawasaki)

ABSTRACT. In this paper, we deal with variational problems with inequality state constraints. The theory of conjugate points for these problems is developed, and necessary optimality conditions in terms of this concept are derived.

1 序

本稿では、次の不等式状態制約をもつ変分問題 (VP) に対する共役点とヤコビシステムを考察し，(VP) の最適性条件を共役点の概念を用いて記述する。

$$
\begin{array}{lll}
(VP) & \text{Minimize} & \displaystyle\int_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t))dt \\
& \text{subject to} & x(0)=A,\ \ x(T)=B,\ \ x\in W^n_{1,\infty}[0,T], \\
& & g(t,x(t))\le 0 \ \ \forall t\in[0,T],
\end{array}
$$

ただし，$T>0$ と R^n の２点 A, B は固定されているものとする．関数 x は

$$W^n_{1,\infty}[0,T]:=\{x:[0,T]\to R^n \mid x_i\,;\ \text{絶対連続},\ ||x||<\infty\}$$

の元で、ノルム $||x||=\max_{t\in[0,T]}||x(t)||+\mathrm{esssup}_{t\in[0,T]}||\dot{x}(t)||$ が与えられているものとする．また，関数 $f:R^{2n+1}\to R$, $g:[0,T]\times R^n\to R^m$ は２回連続微分可能とする。

この変分問題の典型的な例としては，R^3 の曲面と曲面外の２点 A, B が与えられたとき，２点を結ぶ最短路を求める問題がある（例 2.1-2.3 を見よ）.

共役点は、変分法における大域的性質をもつ重要な概念であり，長い歴史を持つ．そこで先ず，変分問題の基本問題に対する共役点を手短に説明する事にする．変分法の**基本問題 (the Simplest Problem)** は次の式で定式化される：

$$
\begin{array}{lll}
(SP) & \text{Minimize} & \displaystyle\int_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t))dt \\
& \text{subject to} & x(0)=A,\ x(T)=B
\end{array}
$$

この基本問題に対する１次の最適性必要条件が **Euler(-Lagrange) 方程式** (1744) であり，２次の最適性必要条件（のひとつ）が **Legendre 条件** (1786) である．即ち，最適解 $\bar{x}(t)$ は

- $\dfrac{d}{dt}f_{\dot{x}}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))-f_x(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))=0$ a.e. t (Euler)
- $f_{\dot{x}\dot{x}}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\ge 0$ a.e. t (非負定値，Legendre)

[1]本研究は、科学研究費、基盤研究(B)、No. 11440033 より一部補助を受けている。

を満たす．Legendre はこの逆が成立するのではないかと考えた．つまり，許容解 $\bar{x}(t)$ が Euler 方程式と Legendre の強条件

$$f_{\dot{x}\dot{x}}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) > 0 \quad \text{a.e. } t \quad (\text{正定値})$$

を満たせば、$\bar{x}(t)$ は基本問題の局所最適解になるであろうと予想した。しかし, Legendre の予想は誤りで，Jacobi（1837）が「共役点」の概念を導入して，ようやくこの問題を解決した(定理1.1 を見よ).

基本問題に対する共役点は次のようにして定義される．先ず，許容解 $\bar{x}(t)$ が局所最適解ならば, (Legendre 条件とは別の）２次の最適性必要条件により，**アクセサリー問題**と呼ばれる変分問題において$y(t) \equiv 0$ が最小値ゼロを与えることが分かる．

$$(AP) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \displaystyle\int_0^T \{y^T \bar{f}_{xx} y + 2y^T \bar{f}_{x\dot{x}} \dot{y} + \dot{y}^T \bar{f}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{y}\} dt \\ \text{subject to} & y(0) = y(T) = 0, \end{array}$$

ただし,

$$\bar{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) := f_{\dot{x}\dot{x}}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)), \quad etc.$$

この変分問題は再び基本問題の形をしており，その Euler 方程式を考えることができる．それが **Jacobi 方程式**である：

$$\frac{d}{dt}\{\bar{f}_{\dot{x}x}(t)y(t) + \bar{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{y}(t)\} = \bar{f}_{xx}(t)y(t) + \bar{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{y}(t)$$

定義 1. 1 区間 $[0,c]$ 上で *Jacobi* 方程式と $y(0)=0$, $y(c)=0$ を満たす自明でない $y(t)$ が存在するとき，$c \neq 0$ を $t=0$ **の共役点**と呼ぶ.

定理 1. 1 *(Jacobi 1837)*

(1) $\bar{x}(t)$ が *Euler* 方程式、*Legendre* の強条件を満たし、さらに $(0,T]$ に $t=0$ の共役点が存在しなければ、$\bar{x}(t)$ は局所最適解である。

(2) 逆に $\bar{x}(t)$ が基本問題 *(SP)* の局所最適解で，*Legendre* の強条件を満たすとき，$(0,T)$ に $t=0$ の共役点は存在しない。

ところで，変分問題を工学的方向に発展させたものとして最適制御問題があり，それに対する最適性必要条件としてはポントリヤーギンの最大値原理が重要である．Warga (1978) は制御集合 U が凸集合であるような最適制御問題に対して，共役点の理論を展開するために，アクセサリー問題を与えた．Warga の研究を契機に，様々なタイプの最適制御問題に対して，共役点による最適性条件の記述が試みられるようになった，Zeidan, Zezza[32][33][34], Zeidan[31]．Loewen, Zheng[23], Ferreira[8], Dontchev[7].

これらとは別に，変分問題についても長らく未解決の問題があった．それが，不等式状態制約をもつ変分問題に対する共役点の理論であった．Kawasaki, Zeidan (1998) は包絡線

項を考慮にいれることにより，この問題の必要条件に関する部分を解決した．詳しくは次節に譲る事にするが，そこでは包絡線効果を処理するために，新しい変数 $\beta(t)$ が導入された．ところが，ある種の正則条件 (狭義一次独立制約想定) を満たす例では，$\beta(t)$ として恒等的にゼロの関数をとればよいことも分かった．即ち，包絡線項が表れないのである．

本稿では，強一次独立制約想定の下では，包絡線項を考慮することなしにアクセサリー問題を導びけることを示す．その結果，ヤコビシステムは変数 $\beta(t)$ を含まない簡単な形になる．さらに，共役点を定義し，共役点の言葉で最適性条件を記述する．

2 包絡線項を考慮に入れたヤコビシステムと共役点

本節では，不等式状態制約をもつ変分問題 (VP) の共役点に関する Kawasaki, Zeidan [20] の結果を解説する．本節は，本稿のモチベーションを理解する為に必要である．本節では，序節の仮定に加えて，次の仮定を設ける．ただし，$I(t) := \{j\ : \bar{g}_j(t) := g_j(t, \bar{x}(t)) = 0\}$.

- $g(0, \bar{x}(0)) < 0,\ g(T, \bar{x}(T)) < 0$
- $\bar{g}_{jx}(t) := g_{jx}(t, \bar{x}(t)),\ j \in I(t)$ は一次独立（一次独立制約想定）

このとき，$t = 0$ 以外では右連続な有界変動関数 $\lambda : [0, T] \to R^m$ が存在して，次の２つの条件が成立する：

$$\bar{f}_{\dot{x}}(t) - \int_0^t \bar{f}_x ds - \int_{(0,t]} d\lambda^T \bar{g}_x = \text{定数}\ \ (\mathit{Euler} - \mathit{Lagrange}\,\text{方程式})$$

$$d\lambda(t)^T \bar{g}(t) = 0\ \ (\text{相補性条件}).$$

さらに，２次の最適性必要条件から次のアクセサリー問題が導かれる：

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad \int_0^T \{y^T \bar{f}_{xx} y + 2y^T \bar{f}_{x\dot{x}} \dot{y} + \dot{y}^T \bar{f}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{y}\} dt + \int_{[0,T]} \{y^T \bar{g}_{xx} y + 2E\} d\lambda \\ &\text{subject to} \quad y \text{ は臨界方向で } \ E(t) < \infty\ \ \forall t. \end{aligned}$$

ただし，臨界方向とは，

$$\int_0^T \{\bar{f}_x y + \bar{f}_{\dot{x}} \dot{y}\}\, dt = 0,$$

$$y(0) = y(T) = 0,$$

$$\bar{g}_{jx}(t) y(t) \leq 0 \ \text{ if } \bar{g}_j(t) = 0,$$

を満たす $y \in W^n_{1,\infty}$ であり，$E(t) := (E_1(t), \ldots, E_m(t))^T$ はふたつの関数 $u_j(t) := -\bar{g}_j(t)$ と $v_j(t) := \bar{g}_{jx}(t) y(t)$ を用いて次のように定義される．

$$E_j(t) := \begin{cases} \max\left\{\text{limsup} \frac{v_j(t_n)^2}{4u_j(t_n)};\ \{t_n\} \text{ satisfies (2.1)}\right\}, & \text{if } t \in T_j^0, \\ 0 & \text{if } t \in T_j^1 \backslash T_j^0, \\ -\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$T_j^0 := \left\{ t \in T \mid {}^{\exists} t_n \to t \ s.t. \ u_j(t_n) > 0, \ -\frac{v_j(t_n)}{u_j(t_n)} \to +\infty \right\}, \tag{2.1}$$

$$T_j^1 := \{ t \in T \mid u_j(t) = v_j(t) = 0 \}.$$

アクセサリー問題において，$E(t)$ を含む項は**包絡線項**あるいは**extra term** と呼ばれ，不等式制約固有のものである，Kawasaki[16][17][18], Ioffe[13][14], Penot[28]，Palés，Zeidan[26][27], Bonnans, Cominetti，Shapiro[5].

アクセサリー問題に対する１次の最適性必要条件から次のヤコビシステムが導かれる．

定義 2.1 $y \in W^n_{1,\infty}[0,T]$, $\beta \in W^m_{1,\infty}[0,T]$, 定数ベクトル $d \in R^n$, $t=0$ 以外では右連続な有界変動関数 $\mu : [0,T] \to R^m$ に関する次の条件を **Jacobi system** と呼ぶ．

$$(J1) \qquad \bar{f}_{\dot{x}x}(t)y(t) + \bar{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{y}(t) - \int_0^t \{\bar{f}_{xx}y + \bar{f}_{x\dot{x}}\dot{y}\}dt - \int_{(0,t]} \{\bar{g}_{xx}y d\lambda + \bar{g}_x d\mu\} = d \quad a.e.\ t,$$

$$(J2) \qquad \beta(t)d\lambda(t) = \bar{g}(t)d\mu(t) = 0,$$

$$(J3) \qquad \bar{g}_{jx}(t)y(t) + \sqrt{-2\bar{g}_j(t)}\beta_j(t) \le 0 \quad if \ \ d\lambda_j(t) = 0,$$

$$(J4) \qquad \bar{g}_{jx}(t)y(t) \le 0 \quad if \ \ \bar{g}_j(t) = 0,$$

$$(J5) \qquad \bar{g}_{jx}(t)y(t)d\mu_j(t) = \bar{g}_{jx}(t)y(t)d\lambda_j(t) = 0,$$

$$(J6) \qquad d\mu_j(t) \ge 0 \quad if \ \ d\lambda_j(t) = 0$$

for all $j = 1, \ldots, m$ *and* $t \in [0,T]$.

定義 2.2 点 $c \in (0,T]$ は次の条件を満たすとき，$t=0$ **の共役点**と呼ばれる．*Jacobi system (J1)-(J6)* を区間 $[0,c]$ 上で満たす $y(t)$, $\beta(t)$, d, $\mu(t)$ が存在して，それらは

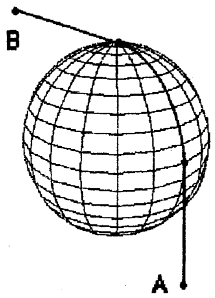
$$y(0) = y(c) = 0 \quad and \quad \beta(c)^T \int_{(c,T]} d\lambda = 0. \tag{2.2}$$

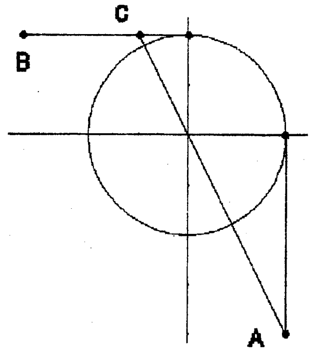
$$\bar{g}_{jx}(c)^T \dot{y}(c-0) \ge 0 \quad if \ \ \bar{g}_j(c) = 0 \ \ and \ \ d\lambda_j(c) = 0, \tag{2.3}$$

$$\bar{g}_{jx}(c)^T \dot{y}(c-0) = 0 \quad if \ \ d\lambda_j(c) > 0, \tag{2.4}$$

$$\dot{y}(c-0)^T \bar{f}_{\dot{x}\dot{x}}(c-0)\dot{y}(c-0) > 0. \tag{2.5}$$

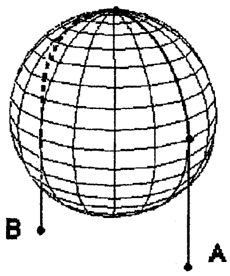
定理 2.1 もし $\bar{x}(t)$ が *(VP)* の局所最適解ならば, $(0,T)$ は $t=0$ の共役点を含まない．

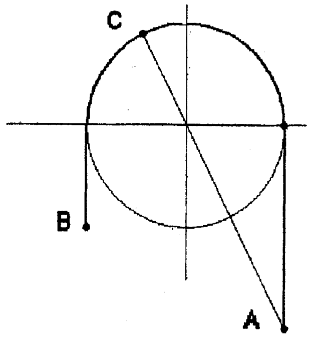




例 2.1

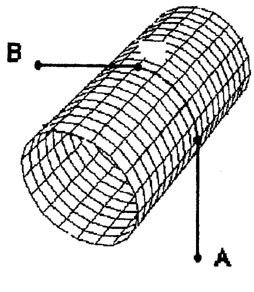
点Cは点Aの共役点になる.





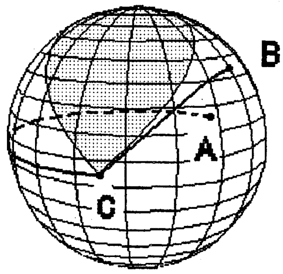
例 2.2

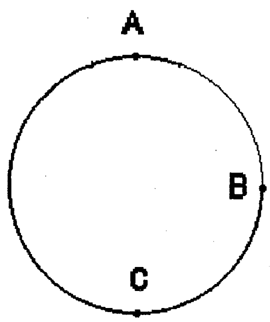
点Cは点Aの共役点になる.



例 2.3

共役点は存在しない.





例 2.4

気球の形をした領域は進入禁止域とする．点Aの真裏の点Cは点Aの共役点にはならない.

3 A concise Jacobi system and conjugate points

前節の４つの例に対してヤコビシステムを計算する際，実は $\beta(t)$ は恒等的にゼロの関数を選べばよい．しかもそれらは全て次の制約想定を満たす．

定義 3.1 $\bar{x}(t)$ が狭義一次独立制約想定を満たすとは，$\bar{g}_j(t) := g_j(t, \bar{x}(t))$, $j = 1, \ldots, m$ が全ての t において一次独立になる．

前節で述べたように，$\beta(t)$ は包絡線項に対応する関数である．その関数がゼロであるという事は，狭義一次独立制約想定が満たされるとき，アクセサリー問題，ヤコビシステムから $\beta(t)$ を消去できる可能性があることを示唆している．本節では次の二つの仮定を設ける．

(A1) 狭義一次独立制約想定

(A2) 各 j について，集合 $\{t\,;\, g_j(t, \bar{x}(t)) = 0\}$ の境界のルベーグ測度はゼロ

補題 3.1 任意の臨界方向 y と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の性質をもつ臨界方向 z が存在する．

(a) z については，包絡線項が消滅する。

(b) $\| \bar{g}_x z - \bar{g}_x y \|_\infty < \varepsilon.$

(c) $\| z - y \|_\infty < \varepsilon.$ （$\| \dot{z} - \dot{y} \|_\infty$ は小さいとは限らない.）

(d) $\left| \int_0^T z^T z dt - \int_0^T y^T y dt \right| < \varepsilon.$

(e) $\left| \int_0^T z^T \dot{z} dt - \int_0^T y^T \dot{y} dt \right| < \varepsilon.$

(f) $\left| \int_0^T \dot{z}^T \dot{z} dt - \int_0^T \dot{y}^T \dot{y} dt \right| < \varepsilon.$

この結果，任意の臨界方向 y に対して包絡線項を考えなくてもよいことになり，(VP) に対する２次の最適性必要条件が次のような簡単な形になる．

定理 3.1 もし $\bar{x}(t)$ が *(VP)* の局所最適解ならば, 任意の臨界方向 $y \in W^n_{1,\infty}[0, T]$ に対して，定数ベクトル $a \in R^n$ と $t = 0$ を除いて右連続な非減少関数 $\lambda : [0, T] \to R^m$ が存在して，次の条件を満たす：

$$\bar{f}_{\dot{x}}(t) - \int_0^t \bar{f}_x ds - \int_{(0,t]} d\lambda^T \bar{g}_x = a^T \quad a.e.\ t \in [0, T], \tag{3.1}$$

$$\int_0^T \{y^T \bar{f}_{xx} y + 2y^T \bar{f}_{x\dot{x}} \dot{y} + \dot{y}^T \bar{f}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{y}\} dt + \int_{[0,T]} y^T (d\lambda^T \bar{g})_{xx} y \geq 0, \tag{3.2}$$

$$d\lambda_j(t) = 0 \quad on \quad \{t \mid \bar{g}_j(t) = \bar{g}_{jx}(t) y(t) = 0\}^c \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.3}$$

従って，アクセサリー問題も簡単な形になる．

$$\begin{aligned}(AP)\quad \text{Minimize}\quad & \frac{1}{2}\int_0^T \{y^T\bar{f}_{xx}y + 2y^T\bar{f}_{x\dot{x}}\dot{y} + \dot{y}^T\bar{f}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{y}\}dt + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\int_{[0,T]} y^T\bar{g}_{jxx}y d\lambda_j \\ \text{subject to}\quad & y(0) = y(T) = 0,\ \ y \in W^n_{1,\infty}[0,T], \\ & \bar{g}_{jx}(t)y(t) \le 0 \ \text{ if } \ d\lambda_j(t) = 0 \text{ and } \bar{g}_j(t) = 0, \\ & \bar{g}_{jx}(t)y(t) = 0 \ \text{ if } \ d\lambda_j(t) > 0.\end{aligned}$$

アクセサリー問題に対する一次の最適性条件から次の concise Jacobi system が得られる．

定義 3.2 関数 $y \in W^n_{1,\infty}[0,T]$ に関する次の条件 *(CJ1)-(CJ5)* を**concise Jabobi system** と呼ぶ．定数ベクトル $a \in R^n$ と $t = 0$ を除いて右連続な非減少関数 $\lambda : [0,T] \to R^m$ が存在して，次の条件を満たす：

$$(CJ1)\quad \bar{f}_{\dot{x}x}(t)y(t) + \bar{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{y}(t) - \int_0^t \{\bar{f}_{xx}y + \bar{f}_{x\dot{x}}\dot{y}\}dt - \int_{(0,t]}\{\bar{g}_{xx}y d\lambda + \bar{g}_x d\mu\} = d \quad a.e.\ t,$$

$$(CJ2)\qquad \bar{g}(t)d\mu(t) = 0,$$

$$(CJ3)\qquad \bar{g}_{jx}(t)y(t) \le 0 \quad \textit{if} \ \ d\lambda_j(t) = 0 \ \textit{and}\ \bar{g}_j(t) = 0 \ ,$$

$$(CJ4)\qquad \bar{g}_{jx}(t)y(t)d\mu_j(t) = \bar{g}_{jx}(t)y(t)d\lambda_j(t) = 0,$$

$$(CJ5)\qquad d\mu_j(t) \ge 0 \quad \textit{if} \ \ d\lambda_j(t) = 0$$

for all $j = 1, \ldots, m$ *and* $t \in [0,T]$.

定義 3.3 点 $c \in (0,T]$ は，境界条件 $y(0) = y(c) = 0$ と *concise Jacobi system (CJ1)-(CJ5)* を $[0,c]$ 上で満たす $y \in W^n_{1,\infty}[0,T]$ が存在して，さらに次の条件を満たすとき $t = 0$ に**共役**であると言われる．

$$\begin{gathered}\bar{g}_{jx}(c)\dot{y}(c-0) \ge 0 \quad \textit{if} \ \ \bar{g}_j(c) = 0 \ \ \textit{and} \ \ d\lambda_j(c) = 0, \\ \bar{g}_{jx}(c)\dot{y}(c-0) = 0 \quad \textit{if} \ \ d\lambda_j(c) > 0, \\ \dot{y}(c-0)^T\bar{f}_{\dot{x}\dot{x}}(c-0)\dot{y}(c-0) > 0.\end{gathered}$$

補題 3.2 c を $(0,T]$ の点とし，y は境界条件 $y(0) = y(c) = 0$ と *concise Jacobi system* を $[0,c]$ 上で満たすとする．このとき，$\bar{y}(t)$ を次のように定義すると

$$\bar{y}(t) := \begin{cases} y(t) & \textit{on}\ [0,c], \\ 0 & \textit{on}\ [c,T]. \end{cases}$$

$\bar{y}$ は (AP) の許容解で，$\bar{y}$ に対する目的関数値はゼロである．

定理 3.2 もし $\bar{x}(t)$ が *(VP)* の局所最適解ならば，$(0,T)$ は $t = 0$ の共役点を含まない．

参考文献

[1] V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov and S. V. Fomin, *Optimal control*, Plenum, New York, 1987.

[2] A. V. Arutynov, On the theory of the maximum principle in optimal control problems with phase constraints, Soviet Mathematics Doklady **304** (1989), 11–14.

[3] A. Ben-Tal and J. Zowe, A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces, Math. Programming 19 (1982), 39–76.

[4] G. A. Bliss, *Lectures on the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, Chicago, (1946).

[5] J.F. Bonnans, R. Cominetti and A. Shapiro, Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets, SIAM J. Optim., 9 (1999) 466-492.

[6] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, New York, 1983.

[7] A. L. Dontchev and I. V. Kolmanovsky, State constraints in the linear regulator problem; Case study, J. Optim. Theroy. Appl., 87 (1995) 323-347.

[8] M. M. A. Ferreira and R. B. Vinter, When is the maximum principle for state constrained problems nondegenerate?, J. Math. Anal. Appl. 187 (1994), 438–467.

[9] ゲリファント，フォーミン著，関根智明訳，「変分法」総合図書 (1970).

[10] R.F. Hartl, S.P. Sethi and R.G. Vickson, A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints, SIAM Rev., **37** (1995), pp.181–218.

[11] M.R.Hestenes, *Calculus of variations and optimal control theory*, John Wiley & Sons, New York, 1966.

[12] A. Ioffe and V. M. Tihomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[13] A. Ioffe, On some recent developments in the theory of second order optimality conditions, in *S. Dolezki (ed.) Optimization*, Lecture Notes in Math., 1405, Springer, New York, 1989, pp. 55–68.

[14] A. Ioffe, Variational analysis of a composite function: A formula for the lower second order epi-derivative, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991), 379–405.

[15] D. H. Jacobson, M.M. Lele, and J.L. Speyere, New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints, J. Math. Anal. Appl., **35** (1971), pp. 255–284.

[16] H. Kawasaki, An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second-order necessary conditions for minimization problems, Math. Programming 41 (1988), 73–96.

[17] H. Kawasaki, The upper and lower second order directional derivatives of a sup-type function, Math. Programming 41 (1988), 327–339.

[18] H. Kawasaki, Second order necessary optimality conditions for minimizing a sup-type function, Math. Programming 49 (1991), 213–229.

[19] H. Kawasaki, Second order necessary and sufficient optimality conditions for minimizing a sup-type function, Math. Programming 26 (1992), 195–220.

[20] H. Kawasaki and V. Zeidan, Conjugate points fro variational problems with equality and inequality state constraints, to appear.

[21] S. Koga and H. Kawasaki, Legendre-type optimality conditions for a variational problem with inequality state constraints, Math. Programming 84 (1999) 421–434.

[22] P. D. Loewen and R. T. Rockafellar, The adjoint arc in nonsmooth optimization, Trans. of AMS, 325 (1991) 39-72.

[23] P. D. Loewen and H. Zheng, Generalized conjugate points for optimal control problems, Nonlinear Analysis, Methods and Applications, 22 (1994) 771–791.

[24] K. Malanowski, Sufficient optimality conditions for optimal control subject to state constraints, **35** (1997), pp. 205–227.

[25] A.A. Milyutin and N.P. Osmolovskii, *Calculus of Variations and Optimal Control*, American Mathematical Society, 1998.

[26] Zs. Páles and V. M. Zeidan, Nonsmooth Optimum Problems with Constraints, SIAM J. Control Optim. 32 (1994), 1476–1502.

[27] Zs. Páles and V. M. Zeidan, First and second order necessary conditions for control problems with constraints, Trans. Amer. Math. Soc. 346 (1994), 421–453.

[28] J. P. Penot, Optimality conditions in Math. Programming and composite optimization, Math. Programming 67 (1994), 225–245.

[29] L. S. Pontryagin, V. G. Boltjanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publisher, New York, 1962.

[30] J. Warga, A second-order Lagrangian condition for restricted control problems, J. Optim. Theory appl. 24 (1978) 475-483.

[31] V. Zeidan, The Riccati equation for optimal control problems with mixed state-control constraints: necessity and sufficiency, SIAM J. Control and Optim., 32 (1994) 1297-1321.

[32] V. Zeidan and P. Zezza, The conjugate point condition for smooth control sets, J. Math. Anal. Appl., 132 (1988) 572-589.

[33] V. Zeidan and P. Zezza, Coupled points in the calculus of variations and applications to periodic problems, Trans. AMS, 315 (1989) 323-335.

[34] V. Zeidan and P. Zezza, Copled points in optimal control theory, IEEE Trans. on Aut. Contr., 36 (1991) 1276-1281.

E-mail address: kawasaki@math.kyushu-u.ac.jp