数理解析研究所講究録
1117巻 1999年 98-118

相転移問題に現れる変分問題と解の構造

千葉大・自然　白川　健 (Ken SHIRAKAWA)
千葉大・教育　劔持　信幸 (Nobuyuki KENMOCHI)

序論

本論文では、次の非線形方程式について考察する。

$$\kappa\partial V(w) \ni w+\theta_0 \text{ in } L^2(0,L). \tag{0.1}$$

ここで、κ, L は正定数、θ_0 は与えられた定数で、∂V は $|w|\leq 1$ a.e. in $(0,L)$ を満たす任意の L^2-関数 w の全変動を対応させる汎関数 V の $L^2(0,L)$ の位相での劣微分である。方程式 (0.1) は次の汎関数（自由エネルギー）

$$F_{\theta_0}(z) := \kappa V(z) - \frac{1}{2}\int_0^L |z+\theta_0|^2\,dx,\ z\in L^2(0,L)$$

の Euler-Lagrange 方程式である。

方程式 (0.1) は、次の非線形放物型の方程式系

$$(\theta+\chi)_t - \theta_{xx} = 0 \text{ in } Q := (0,+\infty)\times(0,L), \tag{0.2}$$

$$\chi_t + \kappa\partial V(\chi) \ni \chi+\theta \text{ in } L^2(0,L),\ t>0, \tag{0.3}$$

において適当な境界条件、初期条件を与え、

$$\theta(t)\to\theta_0 \text{ in } L^2(0,L) \text{ as } t\to+\infty$$

となる様にした時の定常問題に対応している。この力学系は A. Visintin（[7] 参照）によって液体・固体相転移問題の中間的尺度 (mesoscopic length scale) での数理モデルとして提唱されており、そこでは θ は（相対）温度の分布関数で、χ は物質の状態を（液体か固体かを）表す相関数とされる。従って方程式 (0.1) の解の構造を調べることは、力学系 $\{(0.2),(0.3)\}$ の定常解の安定性を議論する際に多くの情報を与えるもので、非常に意義深い。

本論分の目的は２つあり、第１は方程式 (0.1) の解の構造を調べる事で、実際に (0.1) の解はすべて高々有限個の不連続点を持つ様な階段関数（図１ 参照）である事が示される。

第２の目的は、自由エネルギー F_{θ_0} の極小元の構造を明らかにすることである。この問題に関しては Visintin によって既に研究されており、彼は co-area formula（[1] 参照）

を応用して F_{θ_0} の極小元 w_* は必ず $|w_*|=1$ a.e. となる事を一般多次元空間の場合に示した。本論分では、空間1次元に限定して方程式 (0.1) の解の構造を利用し、F_{θ_0} の極小元のより精密な構造を調べる。結果として F_{θ_0} の極小元はすべて高々有限個の点を除いて 1 または -1 を値に持つ階段関数（図2 参照）である事が示される。

1 結果の概要

本論分を通して κ, L は正定数で、θ_0 は与えられた定数とする。$V_0 : L^2(0,L) \longrightarrow [0,+\infty]$ は L^2-関数の全変動を対応させる汎関数で、

$$V_0(z) := \sup \left\{ \int_0^L z\varphi_x \, dx \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \in C^1[0,L], \\ \mathrm{supp}\, \varphi \subset (0,L)\text{: compact}, \\ |\varphi| \le 1 \text{ a.e. in } (0,L). \end{array} \right\}, \forall z \in L^2(0,L),$$

で与えられる。

注意 1.1 よく知られるように、$z \in L^2(0,L)$ の全変動 $V_0(z)$ は

$$V_0(z) := \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} \sum_{k=0}^{n_\Delta} |z(x_{k+1}) - z(x_k)|, \text{ 但し}$$

$$\mathcal{D} := \{\Delta \mid \Delta := \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n_\Delta} = L\},\ n_\Delta \in N\}$$

として与えても良い。また、特に z が十分滑らかな関数であれば、

$$V_0(z) = \int_0^L |z_x| \, dx$$

となる。

ここで全変動が有限な関数、いわゆる有界変分関数全体の空間を $BV[0,L]$ と書く。即ち

$$BV[0,L] := \left\{ z \in L^1(0,L) \mid V_0(z) < +\infty \right\}$$

である。任意の有界変分関数 $f \in BV[0,L]$ は各点 $x \in [0,L]$ において 右極限、左極限を持つが、それらをそれぞれ $f(x+)$, $f(x-)$ で表す。即ち

$$f(x+) := \lim_{y \searrow x} f(y),\ f(x-) := \lim_{y \nearrow x} f(y)$$

とする。

更に $L^2(0,L)$ 上の汎関数 V を次で定義する。

$$V(z) := \begin{cases} V_0(z), \text{ if } z \in BV[0,L],\ |z| \le 1 \text{ a.e. on } [0,L], \\ +\infty \text{ otherwise.} \end{cases}$$

V は $L^2(0,L)$ 上の適正下半連続凸関数である（[1, Chapter 5] 参照）。以下、V の有効領域を $D(V)$ と表記する。即ち

$$D(V) := \{z \in BV[0,L] \mid |z| \le 1 \text{ a.e. on } [0,L].\}$$

とする。

今、定数 θ_0 を与えるごとに次の非線型方程式 $(P)_{\theta_0}$ を考える。

$$(P)_{\theta_0} \quad \kappa\partial V(w) \ni w + \theta_0 \text{ in } L^2(0,L),$$

ここに ∂V は V の $L^2(0,L)$ の位相での劣微分作用素である。

定義 1.1 任意の定数 $\theta_0 \in (-1,1)$ と $n \in N \cup \{0\}$ に対し、$BV[0,L]$ の部分空間 $S_n(\theta_0)$ を次のように定める（図1 参照）。

(I) $S_0(\theta_0) := \{-1, -\theta_0, 1\}$;

(II) 任意の $n \in N$ に対し、$S_n(\theta_0)$ は次の4つの条件を満たす $[0,L]$ の分点 $\{x_k^L, x_k^R \mid k = 1, \cdots, n\}$ と有限数列 $\{c_k \mid k = 0, 1, \cdots, n\} \subset [-1,1] \setminus \{-\theta_0\}$ が存在する様な有界変分関数 z の集合である。

(i) $0 < x_1^L \le x_1^R < \cdots < x_k^L \le x_k^R < \cdots < x_n^L \le x_n^R < L$,

$$J_k := \begin{cases} [0, x_1^L) \text{ for } k = 0, \\ (x_k^R, x_{k+1}^L) \text{ for } k = 1, \cdots, n-1, \\ (x_n^R, L] \text{ for } k = n. \end{cases}$$

(ii) $(c_{k-1} + \theta_0)(c_k + \theta_0) < 0,\ k = 1, \cdots, n.$

(iii) • $k \in \{0, n\}$ の場合、

$$|c_k + \theta_0||J_k| \ge \kappa \text{ 及び } c_k \in \left\{1, -1, \frac{\kappa}{|J_k|} - \theta_0, -\frac{\kappa}{|J_k|} - \theta_0\right\}.$$

ただし $|J_k|$ は区間 J_k の長さである。

• $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ $(n \ge 2)$ の場合、

$$|c_k + \theta_0||J_k| \ge 2\kappa \text{ 及び } c_k \in \left\{1, -1, \frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0, -\frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0\right\}.$$

(iv)

$$z(x) := \begin{cases} c_k, \text{ if } x \in J_k,\ k = 0, 1, \cdots, n, \\ -\theta_0, \text{ if } x \in [x_k^L, x_k^R],\ k = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

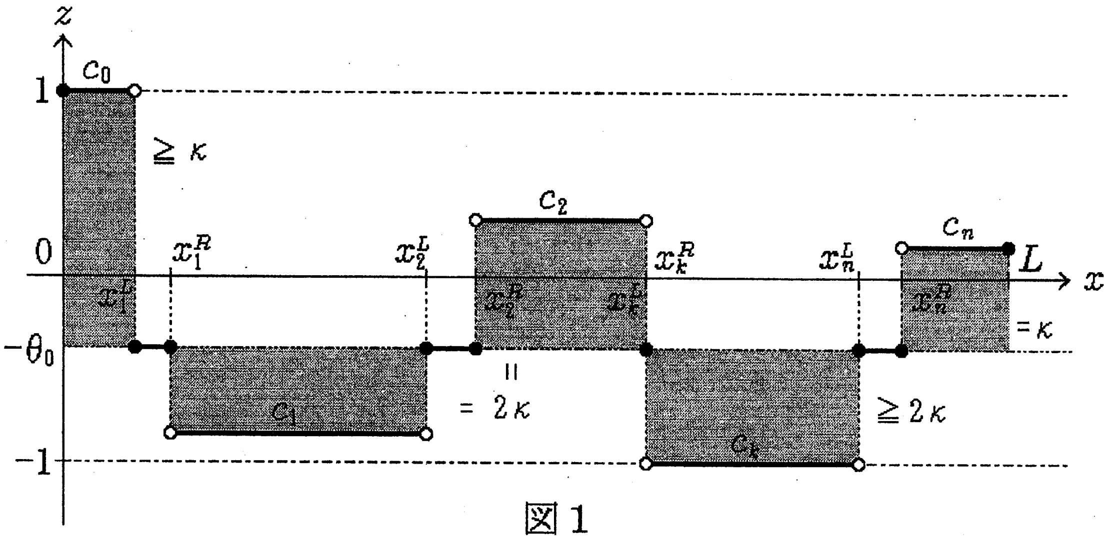

図 1

更に $N_{\theta_0} := \sup\{n \mid S_n(\theta_0) \neq \emptyset\}$ とし、$BV[0,L]$ の部分空間 $S(\theta_0)$ を次で定義する。

$$S(\theta_0) := \begin{cases} \{1\}, \text{ if } \theta_0 > 1, \\ \{1,-1\}, \text{ if } \theta_0 = 1, \\ \sum_{k=0}^{N_{\theta_0}} S_k(\theta_0), \text{ if } |\theta_0| < 1, \\ \{-1,1\}, \text{ if } \theta_0 = -1, \\ \{-1\}, \text{ if } \theta_0 < -1. \end{cases}$$

注意 1.2 各 $\theta_0 \in (-1,1)$ に対し、N_{θ_0} は有限である。実際 $S_n(\theta_0) \neq \emptyset$ $(n \geq 1)$ ならば、定義 1.1 の (II) の (iii) から

$$|J_0|, |J_n| \geq \frac{\kappa}{1+|\theta_0|}, \ |J_k| \geq \frac{2\kappa}{1+|\theta_0|}, \ k = 1, \cdots, n-1$$

となるので、

$$\frac{2n\kappa}{1+|\theta_0|} \leq \sum_{k=0}^{n} |J_k| \leq L$$

を得る。従って

$$1 \leq n \leq \frac{L}{2\kappa}(1+|\theta_0|) < +\infty,$$

即ち N_{θ_0} は有限である。

まず、最初の定理で方程式 $(P)_{\theta_0}$ の解の構造を明らかにする。

定理 1.1 次の２つの条件は互いに同値である。

(i) $w \in BV[0,L]$ は $(P)_{\theta_0}$ の解である。
(ii) $w \in BV[0,L]$ に対し、関数 $w^\circ \in S(\theta_0)$ が存在して次の２つの条件を満足する。

$$(w^\circ(x+) - w(x))(w^\circ(x-) - w(x)) \leq 0,\ \forall x \in [0,L]. \tag{1.1}$$

$$\text{点 } x \in [0,L] \text{ で } w^\circ \text{ が連続ならば } w(x) = w^\circ(x), \tag{1.2}$$

次に以下のような $L^2(0,L)$ 上の汎関数（自由エネルギー）F_{θ_0} を考える。

$$F_{\theta_0}(z) := \begin{cases} \kappa V(z) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L |z+\theta_0|^2\,dx, \text{ if } z \in D(V), \\ +\infty \text{ otherwise.} \end{cases}$$

そして $S(\theta_0)$ の２つの部分空間 $M(\theta_0)$, $M_{loc}(\theta_0)$ を次で定義する（図２ 参照）。

$$M(\theta_0) := \begin{cases} \{1\}, \text{ if } \theta_0 > 0, \\ \{1,-1\}, \text{ if } \theta_0 = 0, \\ \{-1\}, \text{ if } \theta_0 < 0, \end{cases}$$

.

$$M_{loc}(\theta_0) := \begin{cases} \{1\}, \text{ if } \theta_0 \geq 1, \\ \{1,-1\}, \text{ if } 0 < \theta_0 < 1, \\ \left\{ z \in S(0) \;\middle|\; \begin{array}{l} z \text{ の連続点 } x \text{ において } |z(x)| = 1 \text{ で、} \\ \text{もし } z \in S_n(0)\ (1 \leq n \leq N_{\theta_0}) \text{ ならば} \\ x_k^L = x_k^R\ (k = 1, \cdots, n), \\ |J_0|, |J_n| > \kappa,\ |J_k| > 2\kappa\ (k = 1, \cdots, n-1), \\ \text{ただし } x_k^L,\ x_k^R,\ J_k \text{ はすべて定義 1.1 で} \\ \text{用いた記号である。} \end{array} \right\}, \text{ if } \theta_0 = 0, \\ \{-1,1\}, \text{ if } -1 < \theta_0 < 0, \\ \{-1\}, \text{ if } \theta_0 \leq -1. \end{cases}$$

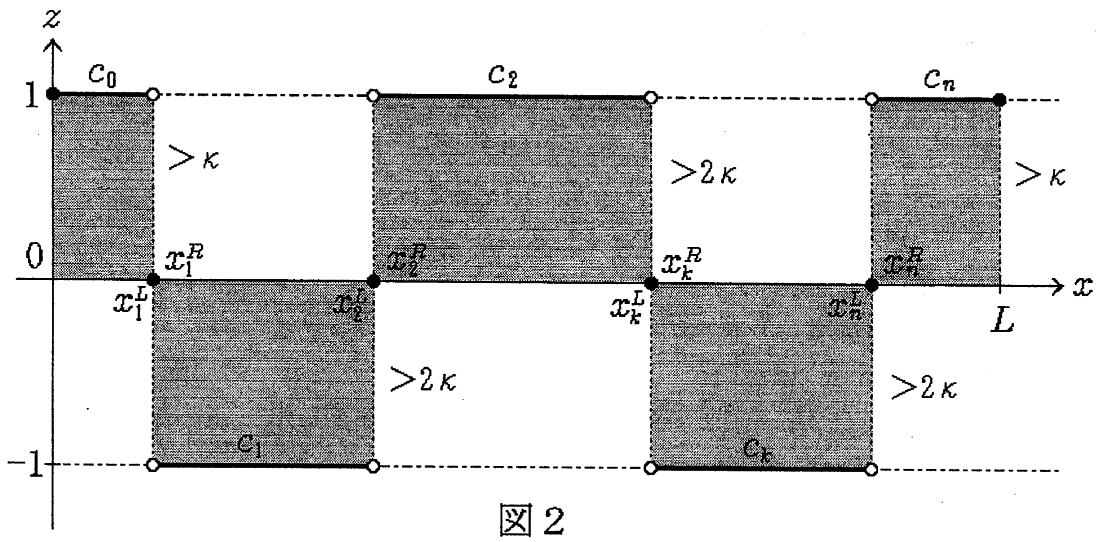

図2

第2の定理は、汎関数（自由エネルギー）F_{θ_0} の極小元の構造を明らかにしようというものである。

定理 1.2 *(i)* w が F_{θ_0} の最小元である事の必要十分条件は $w \in M(\theta_0)$ となる事である。
(ii) w が F_{θ_0} の極小元であることの必要十分条件は、空間 $M_{loc}(\theta_0)$ 内に条件 *(1.1), (1.2)* を満足する様な関数 w° が存在する事である。

2 定理 1.1 の証明（前半）

この節で定理 1.1 の (i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す。よって、この節を通して w は方程式 $(P)_{\theta_0}$ の解であるとする。証明の前準備としていくつかの補題を証明する。

補題 2.1 *(i)* $\theta_0 > 1$ ならば、$w \equiv 1$ *on* $[0, L]$;
(ii) $\theta_0 = \pm 1$ ならば $w \equiv 1$ *or* $w \equiv -1$ *on* $[0, L]$;
(iii) $\theta_0 < -1$ ならば $w \equiv -1$ *on* $[0, L]$.

証明 w は方程式 $(P)_{\theta_0}$ の解であるので明らかに次が成り立つ。

$$\kappa V(z) - \int_0^L (w + \theta_0) z \, dx \geq \kappa V(w) - \int_0^L (w + \theta_0) w \, dx, \ \forall z \in D(V). \tag{2.1}$$

ここで $\theta_0 \geq 1$ であれば、(2.1) において $z \equiv 1$ とおくと

$$0 \leq \kappa V(w) \leq \int_0^L (w + \theta_0)(w - 1) \, dx \leq 0$$

となる。よって $V(w) = 0$, 即ち w は $[0, L]$ 上で定数である。従って $\theta_0 > 1$ ならば上の不等式に戻れば $w \equiv 1$ on $[0, L]$ となる。他の場合も同様に示される。■

補題 2.2 任意の点 $x \in [0, L]$ に対し

$$(w(x+) - w(x))(w(x-) - w(x)) \leq 0,$$

即ち

$$w(x-) \leq w(x) \leq w(x+) \ \ or \ w(x+) \leq w(x) \leq w(x-)$$

が成り立つ。
証明　背理法で証明する。そこで、ある点 $x_0 \in [0, L]$ に対しては

$$(w(x_0+) - w(x_0))(w(x_0-) - w(x_0)) > 0$$

となると仮定し、関数 $w_0 \in D(V)$ を次で定める。

$$w_0(x) := \begin{cases} w(x_0-), \text{ if } x = x_0, \\ \\ w(x) \text{ otherwise.} \end{cases}$$

この時、明らかに

$$\kappa V(w_0) < \kappa V(w), \ -\int_0^L (w + \theta_0) w_0 \ dx = -\int_0^L (w + \theta_0) w \ dx$$

であるから

$$\kappa V(w_0) - \int_0^L (w + \theta_0) w_0 \ dx < \kappa V(w) - \int_0^L (w + \theta_0) w \ dx$$

となる。これは w が (2.1) を満たさない事を意味し、w が $(P)_{\theta_0}$ の解であることに矛盾する。■

ここで、各 $\theta_0 \in R$ に対し、集合 $X(\theta_0)$ を次で定義する。

$$X(\theta_0) := \{x \in [0, L] \mid (w(x+) + \theta_0)(w(x-) + \theta_0) \leq 0\}.$$

補題 2.3 $X(\theta_0)$ は $[0, L]$ の閉部分集合である。
証明　$\{x_n\} \subset X(\theta_0)$, $x_0 \in [0, L]$, $x_n \to x_0$ as $n \to +\infty$ とする。一般性を失う事なく

$$w(x_n-) + \theta_0 \leq 0 \leq w(x_n+) + \theta_0 \text{ for } n = 1, 2, 3, \cdots,$$

としてよい。(実際、他の場合もまったく同様な手法で証明される。) この時、右・左極限の定義から任意の $n \in N$ に対し、2点 $\overline{x}_n$, $\underline{x}_n$ が取れて

$$\overline{x}_n > x_n, \ |\overline{x}_n - x_n| < \frac{1}{n}, \ w(\overline{x}_n) > w(x_n+) - \frac{1}{n},$$

$$\underline{x}_n < x_n, \ |\underline{x}_n - x_n| < \frac{1}{n}, \ w(\underline{x}_n) < w(x_n-) + \frac{1}{n},$$

となるように出来る。従って

$$(w(\underline{x}_n)+\theta_0)-\frac{1}{n}<0<(w(\overline{x}_n)+\theta_0)+\frac{1}{n},\ \forall n\in N.$$

ここで $n\to+\infty$ とすれば

$$w(x_0-)+\theta_0\le 0\le w(x_0+)+\theta_0,$$

即ち $x_0\in X(\theta_0)$ である。■

補題 2.3 により、$X(\theta_0)$ の補集合は高々可算個の連結開集合の直和である事がわかる。よって

$$[0,L]\setminus X(\theta_0)=\sum_{k=0}^{\infty}J_k$$

と書ける。ここに J_k $(k=0,1,2,\cdots)$ は $J_k\cap J_l=\emptyset$ $(k\neq l)$ を満たす $[0,L]$ の相対位相での開集合である。

補題 2.4 各 J_k $(k=0,1,2,\cdots)$ 上では $w+\theta_0$ の符号は一定である。即ち

$$w+\theta_0>0\ \mathit{or}\ w+\theta_0<0\ \mathit{on}\ J_k,\ \mathit{for}\ k=0,1,2,\cdots.$$

証明 $x_0\in J_k$ を任意に取ると、補題 2.2 から

$$w(x_0)+\theta_0>0 \text{ or } w(x_0)+\theta_0<0$$

となる。今、$w(x_0)+\theta_0>0$ とすると、$\delta_0>0$ を十分小さく取ることにより、

$$w+\theta_0>0 \text{ on } (x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\cap[0,L]$$

となる様に出来る。実際、そうでないとすると

$$x_n\nearrow x_0 \text{ (resp. } x_n\searrow x_0) \text{ as } n\to+\infty,$$

$$w(x_n)+\theta_0\le 0,\ \forall n\in N$$

を満たす数列 $\{x_n\}$ が取れる事になるが、補題 2.2 を使うと

$$w(x_0-)+\theta_0\le 0<w(x_0)+\theta_0\le w(x_0+)+\theta_0$$

$$\text{(resp. } w(x_0+)+\theta_0\le 0<w(x_0)+\theta_0\le w(x_0-)+\theta_0)$$

これは $x_0\in X(\theta_0)$ となり、$x_0\in J_k$ に反する。

$w(x_0)+\theta_0<0$ の場合も同様の事が成り立つので、2つの集合 $\{x\in J_k\,|\,w(x)+\theta_0>0\}$ と $\{x\in J_k\,|\,w(x)+\theta_0<0\}$ は共に $[0,L]$ の相対開集合である。従って J_k の連結性から

$$w+\theta_0>0 \text{ or } w+\theta_0<0 \text{ on } J_k$$

を得る。■

補題 2.5 w は J_k 上で定数である。

証明　$w+\theta_0>0$ on J_k $(k\in N\cup\{0\})$ の場合、関数 $\tilde{w}$ を次で定義する。

$$\tilde{w}(x):=\begin{cases}\sup_{x\in J_k} w(x), & \text{if } x\in J_k,\\ w(x) & \text{otherwise},\end{cases}$$

すると、容易に

$$\kappa V(\tilde{w})\le\kappa V(w),\ -\int_0^L(w+\theta_0)\tilde{w}\,dx\le-\int_0^L(w+\theta_0)w\,dx,$$

となる事が確かめられ

$$\kappa V(\tilde{w})-\int_0^L(w+\theta_0)\tilde{w}\,dx\le\kappa V(w)-\int_0^L(w+\theta_0)w\,dx \tag{2.2}$$

となる。一方、w は $(P)_{\theta_0}$ の解であるので (2.1) を満たす。(2.1), (2.2) から

$$\kappa V(\tilde{w})-\kappa V(w)=\int_0^L(w+\theta_0)(\tilde{w}-w)\,dx=0.$$

よって、

$$\tilde{w}=w \text{ on } J_k. \tag{2.3}$$

$w+\theta_0<0$ on J_k の場合は、関数 $\tilde{w}$ を

$$\tilde{w}(x):=\begin{cases}\inf_{x\in J_k} w(x), & \text{if } x\in J_k,\\ w(x) & \text{otherwise},\end{cases}$$

と置けば $w+\theta_0>0$ on J_k の場合と同様の手法により (2.3) を得る。■

以下

$$w\equiv c_k\ (\in[-1,1]\setminus\{-\theta_0\}) \text{ on } J_k,\ k=0,1,2,\cdots$$

と置く。

補題 2.6 $-1<\theta_0<1$ で w が $[0,L]$ で定数でないとする。このとき、次の *(i), (ii), (iii)* が成立する。

(i) $(c_k+\theta_0)(w(a_k-)+\theta_0)\le0$ *and* $(c_k+\theta_0)(w(b_k+)+\theta_0)\le0$,
ただし、$a_k:=\inf J_k,\ b_k:=\sup J_k,\ k=0,1,2,\cdots$ である。

(ii) $k\in N\cup\{0\},\ J_k\cap\{0,L\}\ne\emptyset$ ならば

$$|c_k+\theta_0||J_k|\ge\kappa.$$

(iii) $k\in N\cup\{0\},\ J_k\cap\{0,L\}=\emptyset$ ならば

$$|c_k+\theta_0||J_k|\ge2\kappa.$$

証明 (i) については補題 2.2 から明らかである。(ii) と (iii) については証明がほとんど同じであるので (iii) のみを示す。

$c_k + \theta_0 > 0$ の場合、任意の $\varepsilon \in (0, c_k + \theta_0)$ に対して、関数 $w_\varepsilon \in D(V)$ を次で定義する。

$$w_\varepsilon(x) := \begin{cases} c_k - \varepsilon \text{ for } x \in \overline{J_k}, \\ w(x) \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{2.4}$$

この時、(i) より

$$\kappa V(w_\varepsilon) = \kappa V(w) - 2\varepsilon\kappa,$$
$$-\int_0^L (w + \theta_0) w_\varepsilon \, dx = -\int_0^L (w + \theta_0) w \, dx + \varepsilon(c_k + \theta_0)|J_k|.$$

よって、辺々足せば

$$\kappa V(w_\varepsilon) - \int_0^L (w + \theta_0) w_\varepsilon \, dx = \kappa V(w) - \int_0^L (w + \theta_0) w \, dx + \varepsilon(-2\kappa + (c_k + \theta_0)|J_k|),$$

となる。w が $(P)_{\theta_0}$ の解であることに（即ち、(2.1) を満たすことに）注意すれば、上の等式から直ちに

$$(c_k + \theta_0)|J_k| \geq 2\kappa \tag{2.5}$$

が得られる。

$c_k + \theta_0 < 0$ の場合は、任意の $\varepsilon \in (0, -c_k - \theta_0)$ に対し、関数 $w^\varepsilon \in D(V)$ を

$$w^\varepsilon(x) := \begin{cases} c_k + \varepsilon \text{ for } x \in \overline{J_k}, \\ w(x) \text{ otherwise} \end{cases} \tag{2.6}$$

で定め、$c_k + \theta_0 > 0$ の時と同様の議論を繰り返せば

$$-(c_k + \theta_0)|J_k| \geq 2\kappa \tag{2.7}$$

を得る。(2.5), (2.7) を併せて、我々は

$$|c_k + \theta_0||J_k| \geq 2\kappa$$

を結論する。■

系 2.1 w は高々有限個の不連続点を持つ。

証明 w が $[0, L]$ 上で定数であれば系は無条件で成立するので、$\theta_0 \in (-1, 1)$ で、w が $[0, L]$ 上で定数でない場合のみ考えれば良い。この場合、m を J_k の個数（$+\infty$ を含める）とすると、補題 2.6 と注意 1.2 から、直ちに次の不等式を得る。

$$2 \leq m \leq \frac{L}{2\kappa}(1 + |\theta_0|) < +\infty.$$

よって J_k の個数は有限個で、更に補題 2.5 の結果と併せれば w は有限個の不連続点を持つことがわかる。■

以下、補題 2.6 と同じ仮定の下で、m $(< +\infty)$ を J_k の個数、$n = m - 1$ (≥ 1) と置く。この時、補題 2.6 と系 2.1 から、ある分割

$$0 < x_1^L \leq x_1^R < \cdots < x_k^L \leq x_k^R < \cdots < x_n^L \leq x_n^R < L$$

が取れて、

$$X(\theta_0) = \sum_{k=1}^{n} [x_k^L, x_k^R], \tag{2.8}$$

$$J_k = \begin{cases} [0, x_1^L) \text{ for } k = 0, \\ (x_k^R, x_{k+1}^L) \text{ for } k = 1, \cdots, n-1, \\ (x_n^R, L] \text{ for } k = n, \end{cases} \tag{2.9}$$

となる事が容易に確認できる。

補題 2.7 集合 $X(\theta_0)$, J_k がそれぞれ *(2.8), (2.9)* のように表現されるならば、次の *(i), (ii)* が成立する。

(i) $k \in \{0, n\}$ ならば

$$c_k \in \left\{1, -1, \frac{\kappa}{|J_k|} - \theta_0, -\frac{\kappa}{|J_k|} - \theta_0\right\}.$$

(ii) $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ $(n \geq 2)$ ならば

$$c_k \in \left\{1, -1, \frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0, -\frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0\right\}.$$

証明 証明はほとんど同じなので (ii) のみを示す。$c_k + \theta_0 > 0$ の場合は補題 2.6 の (iii) から

$$\frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0 \leq c_k \leq 1$$

となる。今、仮に

$$\frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0 < c_k < 1 \tag{2.10}$$

としてみよう。この時、任意の $\varepsilon \in (0, 1 - c_k)$ に対し、(2.6) で定義された関数 w^ε を考えると、補題 2.6 の (i) から

$$\kappa V(w^\varepsilon) = \kappa V(w) + 2\varepsilon\kappa,$$

$$-\int_0^L (w + \theta_0) w^\varepsilon \, dx = -\int_0^L (w + \theta_0) w \, dx - \varepsilon (c_k + \theta_0)|J_k|$$

となる。よって

$$\kappa V(w^\varepsilon) - \int_0^L (w + \theta_0) w^\varepsilon \, dx = \kappa V(w) - \int_0^L (w + \theta_0) w \, dx + \varepsilon(2\kappa - (c_k + \theta_0)|J_k|)$$

となるから、w が $(P)_{\theta_0}$ の解であることに注意すれば

$$2\kappa-(c_k+\theta_0)|J_k|\geq 0,\ \text{i.e. } c_k\leq\frac{2\kappa}{|J_k|}-\theta_0.$$

これは (2.10) と矛盾する。

$c_k+\theta_0<0$ の場合は

$$-1<c_k<-\frac{2\kappa}{|J_k|}-\theta_0$$

と仮定し、任意の $\varepsilon\in(0,1+c_k)$ に対し、(2.4) で定義した関数 w_ε を用いれば $c_k+\theta_0>0$ の場合と同様に矛盾を導くことが出来る。■

補題 2.8 $X(\theta_0)$, J_k はそれぞれ *(2.8), (2.9)* の形で表現されているとする。もし $x_k^L<x_k^R$ $(k\in\{1,\cdots,n\})$ であれば

$$w(x)\equiv-\theta_0,\ \textit{on}\ (x_k^L,x_k^R).$$

証明 $w\in BV[0,L]$ であるので

$$w(x)=-\theta_0,\ \text{a.e. } x\in(x_k^L,x_k^R)$$

となる。（実際は高々可算個の点を除いたところで成立する。）よって、補題 2.2 の結果から容易に

$$w\equiv-\theta_0 \text{ on } (x_k^L,x_k^R)$$

が導かれる。■

補題 2.9 $X(\theta_0)$, J_k がそれぞれ *(2.8), (2.9)* の形で表現されるならば、次が成立する。

$$(c_{k-1}+\theta_0)(c_k+\theta_0)<0,\ k=1,\cdots,n.$$

証明 背理法で証明する。ある番号 $k_0\in\{1,\cdots,n\}$ に対しては

$$(c_{k_0-1}+\theta_0)(c_{k_0}+\theta_0)>0$$

となると仮定する。この時、$x_{k_0}^L<x_{k_0}^R$ でなくてはならない。なぜならば $x_{k_0}^L=x_{k_0}^R$ とすると、補題 2.6 の (i) から $(c_{k_0-1}+\theta_0)(c_{k_0}+\theta_0)\leq 0$ となり、仮定と矛盾する。

今、関数 $\overline{w}\in D(V)$ を

$$\overline{w}(x):=\begin{cases} c_{k_0-1} \text{ for } x\in[x_{k_0}^L,x_{k_0}^R],\\[2ex] w(x) \text{ otherwise,}\end{cases}$$

で定義すると、補題 2.8 から

$$\kappa V(\overline{w})-\int_0^L(w+\theta_0)\overline{w}\,dx<\kappa V(w)-\int_0^L(w+\theta_0)w\,dx$$

となり、w が $(P)_{\theta_0}$ の解であることに（即ち (2.1) を満たすことに）矛盾する。■

定理 1.1 (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明　$|\theta_0| \geq 1$ の場合は、補題 2.1 で既に証明が済んでいるので $|\theta_0| < 1$ の場合を証明する。w が $[0, L]$ 上で定数でないときは $n \in N$ を分点 x_k^L（または x_k^R）の個数として関数 $w^\circ \in D(V)$ を

$$w^\circ(x) := \begin{cases} -\theta_0, \text{ if } x = x_k^L, x_k^R, \ k = 1, \cdots, n, \\ \\ w(x) \text{ otherwise,} \end{cases}$$

で定めれば、補題 2.2, 2.6, 2.7, 2.8 の結果から直ちに

$$w^\circ \in S_n(\theta_0),$$

$$w(x) = w^\circ(x), \ \forall x \in [0, L] \setminus \{x_k^L, x_k^R \mid k = 1, \cdots, n\},$$
$$(w^\circ(x+) - w(x))(w^\circ(x-) - w(x)) = (w(x+) - w(x))(w(x-) - w(x)) \leq 0$$

を得る。

次に w が $[0, L]$ 上で定数 c である場合を考える。この時 $-\theta_0 < c < 1$（$-1 < c < -\theta_0$）とすると

$$\begin{aligned} \kappa V(c) - \int_0^L (c + \theta_0) c \, dx &= -c(c + \theta_0)L \\ > -(c + \theta_0)L &= \kappa V(1) - \int_0^L (c + \theta_0) \, dx \\ \left(> (c + \theta_0)L \right. &= \left. \kappa V(-1) - \int_0^L (c + \theta_0) \, dx \right) \end{aligned}$$

となり矛盾。よって $c \in \{-1, -\theta_0, 1\}$, 即ち $w \in S_0(\theta_0)$ である。

以上の事から任意の $(P)_{\theta_0}$ の解 w に対し

$$(w^\circ(x+) - w(x))(w^\circ(x-) - w(x)) \leq 0, \ \forall x \in [0, L],$$

$$\text{点 } x \in [0, L] \text{ で } w^\circ \text{ が連続ならば } w(x) = w^\circ(x),$$

を満足するような関数 $w^\circ \in S(\theta_0) := \sum_{k=0}^{N_{\theta_0}} S_k(\theta_0)$ が存在する事がいえたので、(i) $\Longrightarrow$ (ii) が示された事になる。■

3　定理 1.1 の証明（後半）

この節では定理 1.1 の (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す。よって、この節を通して w は有界変分関数で、条件 (1.1), (1.2) を満たす様な関数 w° が取れるものとする。示すべきことは任意の $z \in D(V)$ に対し、次の不等式が成立することである。

$$\kappa V(w) - \int_0^L (w + \theta_0) w \, dx \leq \kappa V(z) - \int_0^L (w + \theta_0) z \, dx. \tag{3.1}$$

w が $[0, L]$ 上で定数である場合は (3.1) はほとんど自明であるので、w が $[0, L]$ 上で定数でない場合、よって $|\theta_0| < 1$ の場合のみを示す。

$w^\circ \in S_n(\theta_0)$ $(n \geq 1)$, $x_{n+1}^L = x_{n+1}^R := L$ とする。今、任意の関数 $z \in D(V)$ に対し、階段関数 $\tilde{z}$ を次で定義する。

$c_0 + \theta_0 > 0$ （$c_0 + \theta_0 < 0$）ならば

$$\tilde{z}(x) := \begin{cases} \sup_{x \in J_k} z(x) \ (\inf_{x \in J_k} z(x)) =: \tilde{z}_k, \ \forall x \in J_k \cup [x_{k+1}^L, x_{k+1}^R], \ \forall k: \text{ 偶数}, \\ \inf_{x \in J_k} z(x) \ (\sup_{x \in J_k} z(x)) =: \tilde{z}_k, \ \forall x \in J_k \cup [x_{k+1}^L, x_{k+1}^R], \ \forall k: \text{ 奇数}. \end{cases}$$

すると明らかに

$$\kappa V(\tilde{z}) \leq \kappa V(z), \ -\int_0^L (w + \theta_0)\tilde{z} \, dx \leq -\int_0^L (w + \theta_0) z \, dx,$$

よって

$$\kappa V(\tilde{z}) - \int_0^L (w + \theta_0)\tilde{z} \, dx \leq \kappa V(z) - \int_0^L (w + \theta_0) z \, dx. \tag{3.2}$$

更にこの $\tilde{z}$ に対し、階段関数 v を次で定義する。

$$v(x) := \begin{cases} \tilde{z}(x), \text{ if } k \in \{0, 1, \cdots, n\} \text{ with } (c_k + \theta_0)(\tilde{z}_k + \theta_0) > 0, \ x \in J_k \cup [x_{k+1}^L, x_{k+1}^R], \\ -\theta_0, \text{ if } k \in \{0, 1, \cdots, n\} \text{ with } (c_k + \theta_0)(\tilde{z}_k + \theta_0) \leq 0, \ x \in J_k \cup [x_{k+1}^L, x_{k+1}^R]. \end{cases}$$

この時、次の不等式が成り立つ。

$$\kappa V(v) - \int_0^L (w + \theta_0) v \, dx \leq \kappa V(\tilde{z}) - \int_0^L (w + \theta_0)\tilde{z} \, dx. \tag{3.3}$$

これは次のようにして証明される。l $(\in \{1, \cdots, n\})$ 個の番号 $k_1, \cdots, k_l$ に対して

$$(c_{k_l} + \theta_0)(\tilde{z}_{k_l} + \theta_0) \leq 0$$

となったとしよう。この時、$\{k_1, \cdots, k_l\} \subset \{1, \cdots, n-1\}$ $(n \geq 2)$ である場合のみを考えると（他の場合の証明も全く同様である）、

$$\kappa V(v) \leq \kappa V(\tilde{z}) + \sum_{i=1}^{l} 2\kappa |\tilde{z}_{k_i} + \theta_0|,$$

$$-\int_0^L (w + \theta_0) v \, dx = -\int_0^L (w + \theta_0)\tilde{z} \, dx - \sum_{i=1}^{l} |\tilde{z}_{k_i} + \theta_0||c_{k_i} + \theta_0||J_{k_i}|,$$

となるから

$$\begin{aligned} \kappa V(v) - \int_0^L (w + \theta_0) v \, dx &= \kappa V(\tilde{z}) - \int_0^L (w + \theta_0)\tilde{z} \, dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^{l} |\tilde{z}_{k_i} + \theta_0|(|c_{k_i} + \theta_0||J_{k_i}| - 2\kappa). \end{aligned}$$

従って、定義 1.1 の (iii) から、(3.3) が成り立つ。

最後に、各 $k=0,1,\cdots,n$ に対し、変換

$$\sigma_k : BV[0,L] \longrightarrow BV[0,L]$$

を次で定義する。

$$\forall y \in BV[0,L],\ \sigma_k y(x) := \begin{cases} c_k \text{ for } x \in J_k, \\ -\theta_0 \text{ for } x \in [x_k^L, x_k^R], \\ y(x) \text{ otherwise.} \end{cases}$$

ここで

$$\kappa V(\sigma_k v) - \int_0^L (w+\theta_0)\sigma_k v\ dx \le \kappa V(v) - \int_0^L (w+\theta_0) v\ dx,\ k=0,1,\cdots,n, \tag{3.4}$$

となる。実際、$|c_k|=1$ であれば (3.4) は (3.3) を導くのと全く同様に示される。$|c_k|<1$ である時は、簡単の為 $k \in \{1,\cdots,n-1\}$ $(n \ge 2)$ とすると（他の場合の証明も全く同様である）、

$$c_k = \pm\frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0 \ (\text{つまり、}|c_k+\theta_0||J_k| = 2\kappa),$$

$$\kappa V(\sigma_k v) = \begin{cases} \kappa V(v) + 2\kappa|c_k - v_k|, \text{ if } (c_k+\theta_0)(c_k-v_k) \ge 0, \\ \kappa V(v) - 2\kappa|c_k - v_k|, \text{ if } (c_k+\theta_0)(c_k-v_k) < 0, \end{cases}$$

$$-\int_0^L (w+\theta_0)\sigma_k v\ dx = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^L (w+\theta_0) v\ dx - |c_k - v_k||c_k+\theta_0||J_k| \\ \qquad\qquad \text{if } (c_k+\theta_0)(c_k-v_k) \ge 0, \\ -\displaystyle\int_0^L (w+\theta_0) v\ dx + |c_k - v_k||c_k+\theta_0||J_k|, \\ \qquad\qquad \text{if } (c_k+\theta_0)(c_k-v_k) < 0, \end{cases}$$

となるので

$$\kappa V(\sigma_k v) - \int_0^L (w+\theta_0)\sigma_k v\ dx = \kappa V(v) - \int_0^L (w+\theta_0) v\ dx,$$

となる。よって (3.4) が示された。

同様の計算を繰り返せば、我々は次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} & \kappa V(w) - \int_0^L (w+\theta_0) w\ dx \\ = & \ \kappa V(\sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n v) - \int_0^L (w+\theta_0)(\sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n v)\ dx \\ \le & \ \kappa V(v) - \int_0^L (w+\theta_0) v\ dx. \end{aligned}$$

よって (3.2), (3.3) と併せて (3.1) を得る。■

4 定理 1.2 の証明

定理を証明する前に、我々は次の補題を用意する。

補題 4.1 w が F_{θ_0} の極小元ならば w は $(P)_{\theta_0}$ の解である。
証明 F_{θ_0} の第１変分を取れば簡単に証明できる。■

補題 4.2 w が F_{θ_0} の極小元ならば高々有限個の点を除いたところでは $|w|=1$ となる。
証明 $|\theta_0|\geq 1$ であれば、補題 2.1 と 4.1 から $|w|=1$ on $[0,L]$ となる。

よって $|\theta_0|<1$ の場合を証明する。補題 4.1 から w は $(P)_{\theta_0}$ の解であるから、定理 1.1 より (1.1), (1.2) を満たすような関数 $w^\circ\in S(\theta_0)=\sum_{k=1}^{N_{\theta_0}} S_k(\theta_0)$ が取れる。ここで我々は次の２つの場合にわけてこの補題を証明する。

（１）$w^\circ\in S_0(\theta_0)$ である場合。

$S_0(\theta_0):=\{-1,-\theta_0,1\}$ であるので、$-\theta_0$ が極小元でないことを示せば良い。任意の正の数 $\varepsilon\in(0,1-|\theta_0|)$ に対し、定数値関数 $-\theta_0+\varepsilon$ を考えると、

$$|(-\theta_0+\varepsilon)-(-\theta_0)|_{L^2(0,L)}=\varepsilon\sqrt{L},$$

$$F_{\theta_0}(-\theta_0+\varepsilon)=F_{\theta_0}(-\theta_0)-\frac{\varepsilon^2}{2}L<F_{\theta_0}(-\theta_0),$$

となるので $-\theta_0$ は極小元でないことがわかる。

（２）$w^\circ\in S_n(\theta_0)$ $(1\leq n\leq N_{\theta_0})$ である場合。

始めに

$$|c_k|=1,\ k=0,1,\cdots,n \tag{4.1}$$

を示す。今、ある番号 k_0 に対し、$|c_{k_0}|<1$ となるとしよう。例によって証明の類似性から、$1\leq k_0\leq n-1$ $(n\geq 2)$, $c_{k_0}+\theta_0>0$ の場合のみを考える。この場合、定理 1.1 から $(c_{k_0}+\theta_0)|J_{k_0}|=2\kappa$ となるので、任意の $\varepsilon\in(0,1-c_{k_0})$ に対し (2.6) で定義される関数 w^ε を考えると、明らかに次が成り立つ。

$$|w^\varepsilon-w|_{L^2(0,L)}=\varepsilon\sqrt{|J_{k_0}|}\leq\varepsilon\sqrt{L},$$

$$\kappa V(w^\varepsilon)=\kappa V(w)+2\varepsilon\kappa,$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^L|w^\varepsilon+\theta_0|^2\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^L|w+\theta_0|^2\,dx-\varepsilon(c_{k_0}+\theta_0)|J_{k_0}|-\frac{\varepsilon^2}{2}|J_{k_0}|,$$

よって

$$\begin{aligned}F_{\theta_0}(w^\varepsilon)&=F_{\theta_0}(w)+\varepsilon(2\kappa-(c_{k_0}+\theta_0)|J_{k_0}|)-\frac{\varepsilon^2}{2}|J_{k_0}|\\&=F_{\theta_0}(w)-\frac{\varepsilon^2}{2}|J_{k_0}|<F_{\theta_0}(w).\end{aligned}$$

これは w が F_{θ_0} の極小元であることに反する。よって (4.1) が示された。
次に
$$x_k^L = x_k^R,\ k = 1, \cdots, n, \tag{4.2}$$
を示す。ある番号 $k_1 \in \{1, \cdots, n\}$ に対し、$x_{k_1}^L < x_{k_1}^R$ であるとしよう。この時、任意の $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{x_{k_1}^R - x_{k_1}^L}{2}\right)$ に対し、関数 z_ε を
$$z_\varepsilon(x) := \begin{cases} c_{k_1-1},\ \text{if } x \in [x_{k_1}^L, x_{k_1}^L + \varepsilon], \\ c_{k_1},\ \text{if } x \in [x_{k_1}^R - \varepsilon, x_{k_1}^R], \\ w(x) \text{ otherwise}, \end{cases}$$
で定義すると、簡単な計算により次を得る。
$$|z_\varepsilon - w|_{L^2(0,L)} = \sqrt{2(1+\theta_0^2)\varepsilon},$$
$$\kappa V(z_\varepsilon) = \kappa V(w),$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^L |z_\varepsilon + \theta_0|^2\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^L |w + \theta_0|^2\, dx - \frac{\varepsilon}{2}(1+\theta_0)^2 - \frac{\varepsilon}{2}(-1+\theta_0)^2.$$
従って
$$F_{\theta_0}(z_\varepsilon) = F_{\theta_0}(w) - (1+\theta_0^2)\varepsilon < F_{\theta_0}(w).$$
これは w が F_{θ_0} の極小元であることに矛盾する。よって (4.1) が示された。
以上のことから w は高々有限個の点（即ち w の不連続点）を除いたところでは $|w| = 1$ となる事がわかる。■

注意 4.1 補題 4.2 の証明中の（1）と同様の手法で、定数値関数 -1 (resp. $+1$) は F_1 (resp. F_{-1}) の極小元でないことが示される。結果、$\theta_0 \geq 1$ (resp. $\theta_0 \leq -1$) の場合、F_{θ_0} の極小元は 1 (resp. -1) しかない、即ち最小元である事がわかる。

定理 1.2 (i) の証明 任意の $z \in D(V)$ に対し、明らかに次の 2 つの式が成り立つ。
$$\kappa V(z) \geq 0, \tag{4.3}$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^L |z + \theta_0|^2\, dx \geq \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L |1+\theta_0|^2\, dx,\ \text{if } \theta_0 > 0, \\ -\dfrac{L}{2},\ \text{if } \theta_0 = 0, \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L |-1+\theta_0|^2\, dx,\ \text{if } \theta_0 < 0. \end{cases} \tag{4.4}$$
(4.3), (4.4) より、$M(\theta_0)$ の元は F_{θ_0} の最小元である。逆に w が F_{θ_0} の最小元であるとしても、補題 4.1, 4.2, 注意 4.1 の結果と (4.3), (4.4) を併せれば $w \in M(\theta_0)$ となる事が示される。■

補題 4.3 $|\theta_0| < 1$, $0 \le n \le N_{\theta_0}$, $w \in BV[0,L]$ で、w に対して *(1.1), (1.2)* を満たすような関数 $w^\circ \in S_n(\theta_0) \cap M_{loc}(\theta_0)$ が取れるとする。また、任意の（十分小さな）正数 ε と番号 $k \in \{0,1,\cdots,n\}$ に対し、関数 $\tilde{w}_\varepsilon^k$ を次で定義する。

$$\tilde{w}_\varepsilon^k(x) := \begin{cases} 1-\varepsilon \ \mathit{for}\ x \in \overline{J_k} \ \mathit{with}\ w \equiv 1 \ \mathit{on}\ J_k, \\ 1+\varepsilon \ \mathit{for}\ x \in \overline{J_k} \ \mathit{with}\ w \equiv -1 \ \mathit{on}\ J_k, \\ w(x) \ \mathit{otherwise}, \end{cases}$$

ただし、$n=0$ の場合は $J_0 := [0,L]$ とする。この時、十分小さな正数 ε_k（番号 k に依存する）が存在し

$$F_{\theta_0}(\tilde{w}_\varepsilon^k) > F_{\theta_0}(w),\ \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_k),$$

となる。

証明　始めに $n=0$ の場合を示す。この時

$$w = w^\circ \equiv 1 \text{ or } w = w^\circ \equiv -1 \text{ on } [0,L]$$

であるが、証明は同様なので $w \equiv 1$ on $[0,L]$ である場合のみを示す。この時、$\tilde{w}_\varepsilon^0 \equiv 1-\varepsilon$ on $[0,L]$ であるので、

$$\kappa V(\tilde{w}_\varepsilon^0) = \kappa V(w) = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^L |w_\varepsilon^0 + \theta_0|^2\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^L |1+\theta_0|^2\,dx + \varepsilon(1+\theta_0)L - \frac{\varepsilon^2}{2}L,$$

従って

$$F_{\theta_0}(\tilde{w}_\varepsilon^0) = F_{\theta_0}(w) + \varepsilon L\left((1+\theta_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \ge F_{\theta_0}(w) + \varepsilon L\left((1-|\theta_0|) - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

となる。$|\theta_0| < 1$ であるので、正数 ε_0 を

$$(1-|\theta_0|) - \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$$

となる様に取れば、

$$F_{\theta_0}(\tilde{w}_\varepsilon^0) > F_{\theta_0}(w),\ \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$$

を得る。

次に $1 \le n \le N_{\theta_0}$ である場合を考える。ここでも簡単のため、$w \equiv 1$ on J_k, $k \in \{1,\cdots,n-1\}$ とする。（他の場合の証明は全く同様。）この時、

$$\kappa V(\tilde{w}_\varepsilon^k) = \kappa V(w) - 2\kappa\varepsilon,$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^L |\tilde{w}_\varepsilon^k + \theta_0|^2\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^L |w+\theta_0|^2\,dx + \varepsilon(1+\theta_0)|J_k| - \frac{\varepsilon^2}{2}|J_k|,$$

従って

$$F_{\theta_0}(\tilde{w}_\varepsilon^k) = F_{\theta_0}(w) + \varepsilon\left(-2\kappa + \left((1+\theta_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right)|J_k|\right), \tag{4.5}$$

であるので、正数 ε_k を

$$-2\kappa + \left((1+\theta_0) - \frac{\varepsilon_k}{2}\right)|J_k| > 0$$

となる様に取れば

$$F_{\theta_0}(\tilde{w}^k_\varepsilon) > F_{\theta_0}(w),\ \forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_k)$$

となる。■

系 4.1 補題 *4.3* と同じ仮定の下で、w は $[0, L]$ 上で定数でないとする。任意の $\delta = (\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_n) \in R^{n+1}; 0 < \delta_k < 1,\ k = 0, 1, \cdots, n$ に対し、関数 $\tilde{w}_\delta$ を次で定義する。

$$\tilde{w}_\delta(x) := \begin{cases} 1 - \delta_k,\ \textit{if}\ x \in \overline{J_k}\ \textit{with}\ w \equiv 1\ \textit{on}\ J_k, \\ \\ -1 + \delta_k,\ \textit{if}\ x \in J_k\ \textit{with}\ w \equiv -1\ \textit{on}\ J_k. \end{cases}$$

この時、

$$F_{\theta_0}(\tilde{w}_\delta) > F_{\theta_0}(w),\ \forall\delta \in R^{n+1}\ \textit{with}\ 0 < \delta_k < \delta_*,\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

を満たすような十分小さな正数 δ_* が存在する。

証明　$\delta_* := \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ とすれば、補題 4.3 と同様の手法で証明出来る。■

定理 1.2 (ii) の証明　$|\theta_0| \geq 1$ の場合は、補題 4.1, 4.2, 注意 4.1 から直ちに定理の証明を得る。よって以下 $|\theta_0| < 1$ の場合を示す。

始めに w が F_{θ_0} の極小元であるとすると、補題 4.1 から (1.1), (1.2) を満たす様な関数 $w^\circ \in S(\theta_0)$ が存在する。よって $w^\circ \in M_{loc}(\theta_0)$ を示せば良い事になるが、我々はこの事を次の 2 つの場合に分けて証明する。

（1）$0 < |\theta_0| < 1$ である場合。

証明はほとんど同じなので $0 < \theta_0 < 1$ とする。この場合、補題 4.1, 4.2 の結果から、w が $[0, L]$ 上で定数であることを示せば良い。今、w が定数でないとすると、補題 4.1, 4.2 から

$$w^\circ \in S_n(\theta_0)\ (1 \leq n \leq N_{\theta_0}), \tag{4.6}$$

$$x^L_k = x^R_k,\ k = 1, \cdots, n, \tag{4.7}$$

$$|w^\circ(x)| = 1,\ \text{if}\ x \neq x^L_k (= x^R_k),\ k = 1, \cdots, n \tag{4.8}$$

となる。ここで

$$w = w^\circ \equiv -1 \text{ on } J_k$$

となる様な番号 k を 1 つ取り、任意の $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{\kappa}{1+|\theta_0|}\right)$ に対し、関数 v^ε を

$$v^\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 \text{ for } x \in [x^L_k, x^L_k + \varepsilon], \\ \\ w(x) \text{ otherwise} \end{cases}$$

で定義すると、簡単な計算から

$$|v^\varepsilon - w|_{L^2(0,L)} = 2\sqrt{\varepsilon}, \tag{4.9}$$

$$F_{\theta_0}(v^\varepsilon) = F_{\theta_0}(w) - 2\varepsilon\theta_0 < F_{\theta_0}(w). \tag{4.10}$$

(4.9), (4.10) は w が F_{θ_0} の極小元である事に反する。よって w は $[0, L]$ 上で定数である。

（2） $\theta_0 = 0$ である場合。

w が定数であれば、補題 4.1, 4.2 から明らかに $w \in M_{loc}(0)$ となる。w が定数でなければ、これもまた補題 4.1, 4.2 から w° は (4.6)~(4.8) を満たすので、後は次の条件

$$|J_0|, |J_n| > \kappa,\ |J_k| > 2\kappa,\ k = 1, \cdots, n-1\ (n \geq 2) \tag{4.11}$$

が成立する事を確認すれば良い。そこである番号 $k_0 \in \{0, 1, \cdots, n\}$ に対して (4.11) が成立しないと仮定してみる。簡単の為 $k_0 \in \{1, \cdots, n-1\}$ とし（他の場合の証明も全く同様）、任意の（十分小さい）正数 ε と番号 k_0 に対して補題 4.3 で扱った関数 $\tilde{w}_\varepsilon^{k_0}$ を考えよう。この時、$|J_{k_0}| = 2\kappa$ に注意すると、(4.5) から

$$F_{\theta_0}(\tilde{w}_\varepsilon^{k_0}) < F_{\theta_0}(w),\ \forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_{k_0}).$$

これは w が F_{θ_0} の極小元である事と矛盾する。

従って、$w^\circ \in M_{loc}(\theta_0)$ である。

逆に、$w \in BV[0, L]$ に対し、(1.1), (1.2) を満たす様な関数 $w^\circ \in M_{loc}(\theta_0)$ が取れたとしよう。今、仮に w が F_{θ_0} の極小元でないとすると、

$$|z_i| \leq 1 \text{ a.e. on } (0, L),$$

$$z_i \to w \text{ in } L^2(0, L) \text{ as } i \to +\infty, \tag{4.12}$$

$$F_{\theta_0}(z_i) < F_{\theta_0}(w),\ \forall i \in N, \tag{4.13}$$

を満たす様な関数列 $\{z_i\} \subset L^2(0, L)$ が存在する。

(4.12) から、任意の $\varepsilon \in (0, \delta_*)$ に対し、

$$\max_{1 \leq k \leq n} \inf_{x \in J_k} |z_{i_\varepsilon}(x) - w(x)| < \varepsilon$$

となる様な番号 $i_\varepsilon \in N$ が取れる。ここで δ_* は系 4.1 で扱った正数である。この時、関数 $\tilde{z}_{i_\varepsilon}$ を

$$\tilde{z}_{i_\varepsilon}(x) := \begin{cases} \sup_{x \in J_k} z_{i_\varepsilon}(x), & \text{if } x \in \overline{J_k} \text{ and } w \equiv 1 \text{ on } J_k, \\ \inf_{x \in J_k} z_{i_\varepsilon}(x), & \text{if } x \in J_k \text{ and } w \equiv -1 \text{ on } J_k, \end{cases}$$

で定めると、明らかに

$$\kappa V(\tilde{z}_{i_\varepsilon}) \le \kappa V(z_{i_\varepsilon}),$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^L |\tilde{z}_{i_\varepsilon} + \theta_0|^2\, dx \le -\frac{1}{2}\int_0^L |z_{i_\varepsilon} + \theta_0|^2\, dx,$$

となるので

$$F_{\theta_0}(\tilde{z}_{i_\varepsilon}) \le F_{\theta_0}(z_{i_\varepsilon}), \tag{4.14}$$

また、系 4.1 から

$$F_{\theta_0}(w) \le F_{\theta_0}(\tilde{z}_{i_\varepsilon}).$$

(4.14) と併せると

$$F_{\theta_0}(z_{i_\varepsilon}) \ge F_{\theta_0}(w)$$

となるが、これは (4.13) と矛盾する。よって w は F_{θ_0} の極小元である。■

参考文献

[1] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions,* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Inc., Boca Raton, 1992.

[2] A. Ito, N. Yamazaki and N. Kenmochi, Attractors of nonlinear evolution systems generated by time-dependent subdifferentials in Hilbert spaces, pp. 327-350, in *Dynamical Systems and Differential Equations Vol. I*, ed. W. Chen and S. Hu, Southwest Missouri State Univ., Springfield, 1998.

[3] N. Kenmochi, Systems of nonlinear PDEs arising from dynamical phase transitions, Lecture Notes Math., Springer, Vol. 1584, Berlin, 1994.

[4] N. Kenmochi and K. Shirakawa, A variational inequality for total variation functional with constraint, to appear Nonlinear Analysis.

[5] A. Visintin, The Stefan problem with surface tension, pp. 191-213, *Mathematical Models of Phase Change Problems,* ed. J. F. Rodrigues, Birkhäuser, Basel 1989.

[6] A. Visintin, Nonconvex functionals related to multiphase systems, SIAM J. Math. Anal.,**21** (1990), pp. 1281-1304.

[7] A. Visintin, *Models of Phase Transitions,* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **Vol. 28**, Birkhäuser, Boston, 1996.