

多体系の幾何、力学、制御

京都大学大学院情報学研究科
数理工学専攻
岩井敏洋

1 概観

宇宙ロボットが現実のものとなっている現在、非ホロノミック制御が多くの研究者の関心を引いている。本講演では、非ホロノミック制御が猫の宙返りを実現することを実証したい。

古典力学の分野では古くから、角運動量ゼロの条件が非ホロノミック拘束であることはよく認識されて来た。しかし、角運動量ゼロの運動（つまり非回転運動、言い換えると振動運動）が結果として回転を引き起こすことがあるという認識は乏しかった。非回転運動が回転を引き起こすということが、具体的には猫が宙返りをするということが、何故可能なのかという問いに微分幾何学は明確な原理で答えてくれる。すなわち、猫の宙返りは、原理的には、微分幾何学でいうところのホロノミーの実現と理解できるという答えである。

ホロノミーという術語は微分幾何学のなかの接続の理論に現れる。70年代には、理論物理学のなかのゲージ理論は、微分幾何学にいうところの接続の理論と共通の内容をもっているという認識が確かなものになった。80年代には、接続の理論で理解できる物理現象は、ゲージ理論以外のもっと身近なところで見つかった。1984年のBerryの論文¹⁾に現れる幾何学的位相因子 (geometrical phase factor) というのがそれである。同じ1984年、Guichardet²⁾は猫の宙返りがホロノミーの概念で理解できることを数学的に証明した。すなわち、多体系が適当な“形”の変化にともなう振動運動（全角運動量ゼロの運動）をすれば、結果として回転を実現することを接続の理論を用いて厳密に証明した。歴史的に言えば、彼の論文は多体系の運動のなかに接続の幾何学あるいはゲージ理論を見出したという意味で画期的である。Berryの方は、すぐに物理の世界でもてはやされ、幾何学的位相は一時大流行したが、Guichardetの方はそれほどの注目も受けなかった。しかし、80年代末から90年代にかけて微分幾何学的制御理論の観点から興味もたれるようになってきて、J. Marsden等のグループによって研究が続けられている^{3,4)}。筆者は、Guichardetの研究を力学の研究に活かそうと80年代後半から研究してきたが、そのきっかけは量子化学の研究者との共同研究⁵⁾からだった。分子のSchrödinger方程式を分子の結合手の長さや結合角を用いて記述するにはどうすればよいかという問題に共同で取り組んだ。ここでの鍵は接続の理論あるいはゲージ理論である。その後いくつかの研究をしたのち⁶⁾、多体系の微分幾何学と古典力学について一応のまとめを得た⁷⁾。なお、この方面の総説は物理学の観点からR.G. LittlejohnとM. Reinschによって書かれた⁸⁾。

質点の多体系をモデルにして猫の宙返りが原理的に理解できるのだが、しかし、質点系では質感として猫からほど遠い。そこで、質点の多体系を剛体の多体系に拡張して、猫に近いモデルを作る。この拡張は簡単である。すなわち、質点系がいくつかのクラスターに分かれていて、各クラスター内では質点の相対的な配置変わらない、つまり各クラスターは剛体であると仮定してこれまでの議論を適用すればよい。

振動運動が回転を引き起こすといっても、Guichardet の解答は幾何学の問題としてその原理を述べているだけで、なんらかの運動方程式に従う振動運動を扱っている訳ではない。したがって、猫を宙返りさせるには、力学の問題として、適当な運動方程式に従って振動運動をさせる必要がある。さらに、宙返りを実現するには何らかの入力が必要である。こうして、猫の宙返りを実現する問題は制御の問題となる。適当な入力で猫モデルを制御して、宙返りを実現せよという問題である。ここでは、猫のモデルとして同じ形の軸対称円筒を2つ結合したものをとる。ただし、結合ジョイントは結合しているという以外の拘束は与えないものとする。速度の制御ができるとして、振動のエネルギーが最小になるようにモデルを動かして宙返りを実現するものと、制御入力は円筒結合角の変化と円筒まわりの回転を与える力であるとして、モデルを動かすものとの2通りで、宙返りを実現する。その具体的実現を画像表示でお目にかきたい。

猫の宙返りを質感のともなったモデルで実現するために、軸対称円筒結合系を考えたのであるが、当初の量子化学の問題にもどって、このモデルを量子化することができる。すると、このモデルを、剛体近似できる2つのクラスターが結合した分子とみなしたときの Schrödinger 作用素が得られる⁹⁾。日本語で書いた解説記事¹⁰⁾も参考になるだろう。

2 主バンドルとしての重心系

ロボットの力学をするには、剛体系を取扱うべきなのだが、まずは空間 \mathbf{R}^3 における質点系を取扱う。 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ を \mathbf{R}^3 における質点の位置ベクトル、 m_1, m_2, \dots, m_n を各質点の質量とする。このとき、質点系の配位は各位置ベクトルの組 $x = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ で表される。配位の全体を配位空間と呼ぶ。配位空間から平行移動の自由度を取り除いてできる重心系を X で表す。

$$X = \{x = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n); \mathbf{x}_\alpha \in \mathbf{R}^3, \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \mathbf{x}_\alpha = 0\}$$

さて、質点系の配置のなかには、“ふくらみ”の少ないものがある。たとえば、原点を通るある直線上にすべての質点が載っている場合がそうである。ふくらみを表すには、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ によって張られる \mathbf{R}^3 の部分ベクトル空間

$$F_x = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$$

を用いるのがよい。質点系が直線状の配置をとれば、 $\dim F_x = 1$ 、平面状の配置なら、 $\dim F_x = 2$ 、空間的に広がっておれば、 $\dim F_x = 3$ である。ここでは、特異性の現れる

$\dim F_x = 1$ の場合を除いて、

$$\dim F_x \geq 2 \quad (1)$$

の場合を取扱う。 $\dim F_x \geq 2$ の条件のついた重心系を \dot{X} で表す。 \dot{X} も簡単のために重心系と呼ぶ。

重心系 \dot{X} には回転群 $SO(3)$ が作用する。すなわち、任意の $g \in SO(3)$ と $x \in \dot{X}$ とに対し、

$$\Phi_g(x) = gx = (gx_1, gx_2, \dots, gx_n) \quad (2)$$

で $SO(3)$ の作用が定義される。念のために、 $\sum_{\alpha=1}^n m_\alpha x_\alpha = 0$ なら、 $\sum_{\alpha=1}^n m_\alpha gx_\alpha = 0$ でもあることを確認しておく。 $\dim F_x \geq 2$ の仮定のもとで、 Φ_g は固定点をもたない。したがって、商空間 $M := \dot{X}/SO(3)$ は多様体となる。これを内部空間または形状空間と称する。こうして、 \dot{X} は M を底空間、 $SO(3)$ を構造群とする主バンドルとなる。

$$\pi : \dot{X} \longrightarrow M = \dot{X}/SO(3)$$

形状空間 M がどのような多様体か一般的にはよく分かっていない。しかし、空間 3 体系では次のように形状空間が明らかになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &:= \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ \mathbf{s} &:= \sqrt{\frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}} \left(\mathbf{x}_3 - \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \right) \end{aligned}$$

を Jacobi ベクトルという。これらは平行移動で不変だから、重心系 $X \cong \mathbf{R}^6$ の点を指定する、つまり $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \in X$ と考えてよい。 \mathbf{r} と \mathbf{s} とが 1 次独立ということと $\dim F_x \geq 2$ とは同値だから、 $\mathbf{r} \times \mathbf{s} \neq 0$ のもとで、 $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \in \dot{X}$ である。このとき、重心系 \dot{X} から \mathbf{R}^3 の上半空間への写像 $\dot{X} \rightarrow \mathbf{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z > 0\}$ を

$$(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \mapsto (|\mathbf{r}|^2 - |\mathbf{s}|^2, 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}, 2|\mathbf{r} \times \mathbf{s}|)$$

で定義する。この写像は、射影 $\pi : \dot{X} \rightarrow M$ を実現していて、形状空間 M は上半空間 \mathbf{R}_+^3 に同相であることが分かる。 \dot{X} ではなくて、 X そのものをとれば、商空間 $X/SO(3)$ は境界をもつ多様体となる。つまり、 \mathbf{R}_+^3 にその境界である平面 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3\}$ を付け加えたものになる。

3 振動の微分方程式

多粒子系の振動運動を、その全角運動量がゼロであるような運動と定義するのは自然である。主バンドル \dot{X} に定義される“接続”を用いて振動運動を定義するのが、微分幾

何学的取扱いの正当な流儀^{2),6),7)}なのであるが、実質的には同じことだから、全角運動量ゼロの条件 $\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \times d\mathbf{x}_{\alpha} = 0$ をいきなり考察する。

主バンドル $\pi: \dot{X} \rightarrow M$ は局所的には積空間の構造をもつ。このことは、多粒子系ではもっと具体的な意味をもつ。 U を形状空間 M の開集合とする。形状空間の定義から、 $q \in U$ を任意に固定すれば、多体系の形が決まる。その決まった形をもった多粒子系を空間 \mathbf{R}^3 の中におく手続きがある。たとえば、第1番目の粒子を \mathbf{e}_1 軸の正の側におき、第2番目の粒子を \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 平面の $+\mathbf{e}_2$ の側におき、第3番目の粒子を空間 \mathbf{R}^3 の上半空間 ($+\mathbf{e}_3$ の側) におくといった手続きである。このような手続きで空間内に粒子を配置すると、 $q \in U$ ごとに一つの配位

$$\sigma(q) = (\sigma_1(q), \sigma_2(q), \dots, \sigma_n(q))$$

ができる。 σ は U から重心系 \dot{X} への写像である。一旦 \mathbf{R}^3 内におかれた多粒子系 $\sigma(q)$ を回転させて、いろんな配位が得られる。逆に、空間内のいろんな配位は、形の近いものなら (U が適当な“小ささ”なら) すべてこのようにして表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= g\sigma(q), \quad g \in SO(3), \quad q \in U, \\ \text{i.e. } (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= (g\sigma_1(q), \dots, g\sigma_n(q)) \end{aligned} \quad (3)$$

これが局所的積構造

$$\pi^{-1}(U) \cong U \times SO(3)$$

の多体系における内容である。 U の局所座標を (q^i) , $i = 1, \dots, 3n-6$ とする。たとえば、3体系なら、3体の作る3角形の2辺の長さとしてそれらの挟む角 (r_1, r_2, θ) である。 $SO(3)$ の局所座標は、たとえば、オイラー角を採用すればよい。こうして、空間内の配位を表す局所座標系が $\pi^{-1}(U)$ において得られる。

これらを用いて、全角運動量がゼロという条件を書き表してみよう。 $\mathbf{x}_{\alpha} = g\sigma_{\alpha}$ の微分を計算して

$$d\mathbf{x}_{\alpha} = dg\sigma_{\alpha} + g d\sigma_{\alpha} = gg^{-1}dg\sigma_{\alpha} + g \sum_i \frac{\partial \sigma_{\alpha}}{\partial q^i} dq^i$$

と書く。ここで、ベクトル空間としての同型写像 $R: \mathbf{R}^3 \rightarrow so(3)$ を

$$R(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$$

と書くことにして、

$$g^{-1}dg = R(\Theta) \quad (4)$$

で1次微分形式を成分とするベクトル Θ を導入する。すると、 $R(\mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ を用いて、 $d\mathbf{x}_\alpha$ は次のように表される。

$$d\mathbf{x}_\alpha = g(\Theta \times \sigma_\alpha) + g \sum_i \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial q^i} dq^i \quad (5)$$

これより、全角運動量ゼロの条件は

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \mathbf{x}_\alpha \times d\mathbf{x}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha g \sigma_\alpha \times g(\Theta \times \sigma_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^n \sum_i m_\alpha g \sigma_\alpha \times g \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial q^i} dq^i \\ &= g A_{\sigma(q)}(\Theta) + g \sum_i \mathbf{m}_i dq^i = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

と表される。ただし、 $A_{\sigma(q)}$ は慣性作用素であり、一般に

$$A_x(\mathbf{a}) = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \mathbf{x}_\alpha \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}_\alpha), \quad x \in X, \mathbf{a} \in \mathbf{R}^3 \quad (7)$$

で定義され、(1) の条件のもとで対称正値である。また、

$$\mathbf{m}_i = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \sigma_\alpha \times \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial q^i} \quad (8)$$

とおいた。(6) の最後の等式に g^{-1} , $A_{\sigma(q)}^{-1}$ を順に左からかければ、

$$\Theta + \sum_i A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_i) dq^i = 0 \quad (9)$$

を得る。さらに、 R を作用させると、全角運動量ゼロの条件は結局

$$g^{-1} dg + \sum_i R(A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_i)) dq^i = 0 \quad (10)$$

と書くことができる。

したがって、多粒子系の変形を $dq^i/dt = u^i(t)$ というように制御できると仮定すれば、多粒子系を全角運動量ゼロで振動させるには、

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= u^i \\ \frac{dg}{dt} &= -g \sum_i R(A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_i)) u^i \end{aligned} \quad (11)$$

に従って $(q(t), g(t))$ を決めればよい。

$q(t)$ があらかじめ与えられるなら、つまり、 M 内の曲線があらかじめ与えられれば、任意の初期値 $g(0)$ に対して、(11) の第2式から $g(t)$ が決まり、初期点 $g(0)\sigma(q(0))$ を通る

\dot{X} 内の振動曲線 $x(t) = g(t)\sigma(q(t))$ が得られる。いま、 M 内の曲線 $C: q(t), 0 \leq t \leq L$ が閉曲線 ($q(0) = q(L)$) だとするとき、振動曲線も閉曲線になるだろうか。答えは一般には否である。つまり、一般的には $g(0) \neq g(L)$ だから、 $x(0) \neq x(L)$ なのである。 $g(L) = hg(0)$ となる $h \in SO(3)$ が振動の起こす回転である。つまり、多粒子系はその形を変えながら ($q(t)$)、振動運動をし ($x(t) = g(t)\sigma(q(t))$)、時間 L の後もとの形にもどったとき ($q(L) = q(0)$)、回転 h を実現している ($x(L) = hx(0)$) のである。 h を閉曲線 C に関するホロノミーと呼ぶ。これが本稿の冒頭で触れた猫の宙返りの幾何学的内容である。

全角運動量ゼロの拘束条件 (10) が非ホロミック拘束条件であるというのは、全微分方程式として (10) が完全可積分ではないという意味である。(10) は3個の全微分方程式を含んでいるので、もし完全可積分だとすると、たとえば、 g の3個のオイラー角が q^i の関数として決まり、その結果、 $g = g(q)$ が得られる。そのとき、(11) の解は $g(t) = g(q(t))$ の形に表されることになり、形状空間の閉曲線 $q(t)$ に対して、重心系の振動曲線 $x(t) = g(q(t))\sigma(q(t))$ も閉曲線となり、つまり、 $x(0) = x(L)$ となり、回転が起こされない。具体的にどのような回転が実現するのか、平面多粒子系の場合についてはあるが、実例をお見せする。

接続形式自身は $so(3)$ に値をもつ1次微分形式として、

$$\omega = R(A_x^{-1} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} \times dx_{\alpha}) \quad (12)$$

で定義される。 $x = g\sigma(q)$ として、 $R(ga) = gR(a)g^{-1}$, $A_{g\sigma(q)} = gA_{\sigma(q)}g^{-1}$ などと (6) を利用すれば

$$\omega = dgg^{-1} + \sum_i R(A_{g\sigma(q)}^{-1}(gm_i))dq^i \quad (13)$$

が得られる。明らかに、 $\omega = 0$ は全角運動量ゼロの条件 (10) と同値である。

4 最大値原理と Hamiltonian

(11) において、もし $u^i(t)$ を人為的に選ぶことができるとすれば、(11) は多粒子系を制御して振動運動させるための方程式となる。どのように u^i を選べばよいかは、制御理論の問題である。ここでは、評価規範として多粒子系の振動エネルギーを採用する。振動エネルギーを定義するには、多少技巧的にはなるが、次のように考える。まず、重心系 \dot{X} に運動エネルギーに由来する計量

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} dx_{\alpha} \cdot dx_{\alpha} \quad (14)$$

を定義する。次に、(9) の左辺を参照して、(5) を次のように書きかえる。

$$dx_{\alpha} = g((\Theta + \sum_i A_{\sigma(q)}^{-1}(m_i) dq^i) \times \sigma_{\alpha}) + g \sum_i \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha}}{\partial q^i} - A_{\sigma(q)}^{-1}(m_i) \times \sigma_{\alpha} \right) dq^i \quad (15)$$

(15) の右辺第 1 項は回転に関わる変位であり、第 2 項は振動に関わる変位である。実際、 $\mathbf{m}_i, A_{\sigma(q)}$ の定義を用いて

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} g \sigma_{\alpha} \times g \sum_i \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha}}{\partial q^i} - A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_i) \times \sigma_{\alpha} \right) dq^i = 0$$

を示すことができるので、(12) の右辺の第 2 項は、全角運動量がゼロという意味で、回転ではなく、振動を表している。そして、多粒子系の振動変位 ((15) の右辺第 1 項) と回転変位 ((15) の右辺第 2 項) とは計量 ds^2 に関して直交する。

$$\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} g \left(\Theta + \sum_i A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_i) dq^i \right) \times \sigma_{\alpha} \cdot g \sum_i \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha}}{\partial q^i} - A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_i) \times \sigma_{\alpha} \right) dq^i = 0 \quad (16)$$

これを示すには、 ds^2 の回転不変性と $A_{\sigma(q)}, \mathbf{m}_i$ の定義とを用いて丹念に計算すればよい。(15), (16) を用いると、計量 ds^2 は次のように計算される。

$$ds^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot A_{\sigma(q)}(\boldsymbol{\omega}) + \sum_{i,j} a_{ij} dq^i dq^j \quad (17)$$

ただし、 $\boldsymbol{\omega}, a_{ij}$ は以下のように定義される。

$$\boldsymbol{\omega} = \Theta + \sum_i A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_i) dq^i \quad (18)$$

$$a_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha}}{\partial q^i} - A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_i) \times \sigma_{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha}}{\partial q^j} - A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_j) \times \sigma_{\alpha} \right) \quad (19)$$

(17) の右辺第 2 項を振動的計量と呼ぶ。これを用いて、評価規範を

$$\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i,j} a_{ij} u^i(t) u^j(t) dt \quad (20)$$

で定義する。これは質点系の振動エネルギーを表している。実際、拘束条件 (9) のもとでは、(11), (17) により、運動エネルギー $\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\alpha}$ は (20) の被積分関数に等しい。すると問題は、「 \dot{X} の 2 点を結ぶ可能な振動曲線のうちで上の評価規範を最小にするようなものを探せ。」ということになる。

最大値原理を用いてこれを解くために、余接バンドル $T^* \dot{X}$ の上で問題を定式化する。さて、 $T^* \dot{X}$ 上の標準的な 1 次微分形式は

$$\theta = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{p}_{\alpha} \cdot d\mathbf{x}_{\alpha}, \quad (\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha}) \in T^* \dot{X} \quad (21)$$

で与えられる。これを利用して、振動変位に対応する“補助変数”を

$$P_i = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{p}_{\alpha} \cdot g \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha}}{\partial q^i} - A_{\sigma(q)}^{-1}(\mathbf{m}_i) \times \sigma_{\alpha} \right) \quad (22)$$

で定義する。すると、最大化すべきハミルトン関数は

$$\mathcal{H} = \sum_i P_i u^i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} u^i u^j$$

で表される。 $\partial \mathcal{H} / \partial u^i = 0$ より、最適制御 $u^i = \sum_j a^{ij} P_j$ が求まり、その結果、最適ハミルトン関数

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a^{ij} P_i P_j, \quad (a^{ij}) = (a_{ij})^{-1} \quad (23)$$

が得られる。こうして、 $T^* \dot{X}$ 上に最適制御のハミルトン力学系 $(T^* \dot{X}, d\theta, H)$ が得られた。ハミルトン方程式は、ハミルトン力学の通常の手法で、すなわち、 $\iota(X_H) d\theta = -dH$ をみたすハミルトンベクトル場 X_H から得られる。 X_H の定義する $T^* \dot{X}$ 上の流れを \dot{X} 上に射影したものが最適軌道である。(ここでは $\mathcal{H} = \sum_i P_i u^i$ の場合は取扱わない。)

(5) を (21) に代入して

$$\theta = \gamma \cdot \Theta + \sum_i p_i dq^i, \quad (24)$$

を得る。ただし、

$$\gamma = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_\alpha \times g^{-1} p_\alpha, \quad (25)$$

$$p_i = \sum_{\alpha=1}^n g^{-1} p_\alpha \cdot \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial q^i} \quad (26)$$

(22) で定義した変数 P_i と (25), (26) との間には次の関係がある。

$$P_i = p_i - A_{\sigma(q)}^{-1}(m_i) \cdot \gamma$$

ハミルトンベクトル場 X_H の計算の結果、ハミルトンの運動方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \\ \Theta_t^a &= \frac{\partial H}{\partial \gamma_a}, & \frac{d\gamma_a}{dt} &= \sum_{b,c} \varepsilon_{cba} \gamma^c \frac{\partial H}{\partial \gamma_b}, \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、 γ^a, Θ^a はそれぞれ γ, Θ の成分を表し、また、

$$\Theta_t^a = \Theta^a(d/dt)$$

とおいた。つまり、軌道に沿っての微分形式 Θ^a の値である。(27) の 1 行目、2 行目それぞれの左の式は (11) において最適制御 $u^i = \sum_j a^{ij} P_j$ を代入したものになっている。

5 Lagrange equations

\mathbb{R}^N の開集合 W における座標系を (ξ^i) とする。 $(\xi^i, \dot{\xi}^j)$ を TW の局所座標系として、Lagrange の微分方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{\partial L}{\partial \xi^i} = f_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (28)$$

を考える。ただし、 (f_i) は外力である。いわゆる擬座標の考え方でこれを書きかえる。

$$X_j = \sum_{i=1}^N A_j^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \quad \theta^i = \sum_{j=1}^N B_j^i d\xi^j, \quad \sum_{k=1}^N A_k^i B_j^k = \delta_{ij} \quad (29)$$

を W における、ベクトル場、1次微分形式の互いに双対的な局所基底とする。また、

$$\gamma_{jk}^i = d\theta^i(X_j, X_k) \quad (30)$$

とおくと

$$\gamma_{jk}^i = \sum_{\ell, h} \left(\frac{\partial B_h^i}{\partial \xi^\ell} - \frac{\partial B_\ell^i}{\partial \xi^h} \right) A_j^\ell A_k^h$$

が得られる。また、あきらかに

$$[X_i, X_j] = - \sum_{k=1}^N \gamma_{ij}^k X_k \quad (31)$$

が成り立つ。いま、

$$v^i = \sum_{j=1}^N B_j^i \dot{\xi}^j \quad (32)$$

とおいて、 TW の局所座標を $(\xi^i, \dot{\xi}^j)$ から (ξ^i, v^j) に取り替える。 $(v^i = \pi^i$ などと書いて、 π^i を擬座標と呼ぶ習慣があった。) そして、 $L(\xi^i, \dot{\xi}^j) = L^*(\xi^i, v^j)$ において、新しい座標系での Lagrangian を記号の上で区別する。このとき、(28) は次のように書きかえられる。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial v^i} - X_i L^* - \sum_{k,j} \gamma_{ij}^k v^j \frac{\partial L^*}{\partial v^k} = F_i, \quad F_i := \sum_{k=1}^N A_i^k f_k \quad (33)$$

ここで、 r 個の拘束条件が

$$v^{m+a} = \sum_{j=1}^N B_j^{m+a} \dot{\xi}^j = 0, \quad a = 1, \dots, r, \quad N = m + r \quad (34)$$

で与えられる場合を考える。全微分方程式

$$\theta^{m+a} = 0, \quad a = 1, \dots, r$$

が可積分でないとき、この拘束条件は非ホロノームであるという。ここで、外力を真の拘束力（つまり、拘束のためにだけ必要な力） R_i とそれ以外の外力 \bar{f}_i とに分解する。

$$f_i = \bar{f}_i + R_i$$

すると、真の拘束力は仕事をしないので、 $\sum_i R_i d\xi^i = 0$ のはずだから、 λ_a を未定乗数として

$$\sum_{i=1}^N R_i d\xi^i = \sum_{a=1}^r \lambda_a \theta^{m+a} = \sum_{a=1}^r \sum_{j=1}^N \lambda_a B_j^{m+a} d\xi^j$$

が成り立つ。こうして、(33) の右辺は次のように分解される。

$$F_i = \sum_{k=1}^N A_i^k (\bar{f}_k + \sum_{a=1}^r \lambda_a B_k^{m+a}) = \bar{F}_i + \sum_{a=1}^r \lambda_a \delta_i^{m+a}, \quad \bar{F}_i := \sum_{k=1}^N A_i^k \bar{f}_k \quad (35)$$

したがって、拘束条件のもとで Lagrange の運動方程式は次のように書ける。

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial v^i} - X_i L^* - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \gamma_{ij}^k v^j \frac{\partial L^*}{\partial v^k} - \bar{F}_i \right]_{v^{m+1}=\dots=v^N=0} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (36)$$

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial v^{m+a}} - X_{m+a} L^* - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \gamma_{m+a,j}^k v^j \frac{\partial L^*}{\partial v^k} - \bar{F}_{m+a} \right]_{v^{m+1}=\dots=v^N=0} = \lambda_a, \quad a = 1, \dots, r, \quad (37)$$

次に、構造群を G 、底空間を M とする主バンドル P の接バンドル TP 上の Lagrange 力学を上述の方法で書き表す。多粒子の重心系では $P = \dot{X}$, $G = SO(3)$ であった。 P の局所積構造を $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$ として、局所座標系を $(q, g) \in U \times G$ とする。ただし、 U は M の開部分集合。 G の Lie 代数を \mathfrak{g} とし、その基底を E_a , $a = 1, \dots, r = \dim \mathfrak{g}$ 構造定数を C_{bc}^a で表す。

$$[E_a, E_b] = \sum_{c=1}^r C_{ab}^c E_c \quad (38)$$

P に定義される接続形式は (13) と同様にして、その成分が

$$\omega^a = \Phi^a + \sum_i \beta_i^a (g\sigma(q)) dq^i \quad (39)$$

のように表される。ただし、 $dg g^{-1} = \sum \Phi^a E_a$ 。このとき、曲率テンソルを

$$F_{ij}^c = \frac{\partial \beta_j^c}{\partial q^i} - \frac{\partial \beta_i^c}{\partial q^j} - \sum_{a,b=1}^r C_{ab}^c \beta_i^a \beta_j^b \quad (40)$$

で導入すると、

$$d\omega^c = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^r C_{ab}^c \omega^a \wedge \omega^b + \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{ij}^c dq^i \wedge dq^j \quad (41)$$

が成り立つ。

$U \times G$ における 1 次微分形式の局所基底を

$$\theta^i = dq^i, \quad \theta^{m+a} = \omega^a, \quad i = 1, \dots, m = \dim M, \quad a = 1, \dots, r = \dim G \quad (42)$$

にとる。このとき、双対基底は

$$X_i = \partial_i^* := \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_{a=1}^r \beta_j^a J_a, \quad X_{m+a} = J_a := \left. \frac{d}{dt} \exp(tE_a)x \right|_{t=0}, \quad x \in P \quad (43)$$

で与えられる。また、(30) で定義される γ_{jk}^i はこの場合、(41) より

$$\gamma_{ij}^{m+a} = F_{ij}^a, \quad \gamma_{m+b, m+c}^{m+a} = C_{bc}^a, \quad \text{その他の } \gamma_{jk}^i = 0$$

となる。いま、多粒子系のとくと同様、拘束条件として、

$$\omega^a = 0, \quad a = 1, \dots, r \quad (44)$$

を課すると、(36), (37) はそれぞれ次のように表される。

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial v^i} - \partial_i^* L^* - \sum_{a=1}^r \sum_{j=1}^m F_{ij}^a v^j \frac{\partial L^*}{\partial v^{m+a}} - \bar{F}_i \right]_{v^{m+1}=\dots=v^{m+r}=0} = 0, \quad (45)$$

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial v^{m+a}} - J_a L^* - \bar{F}_{m+a} \right]_{v^{m+1}=\dots=v^{m+r}=0} = \lambda_a. \quad (46)$$

6 剛体系

質点系で展開した制御系の議論は剛体系の場合に拡張することができる。紙幅が尽きてきたので、質点系での議論との類似性をたどって、簡単に結果を述べるにとどめる。全く同じ 2 つの軸対称な円柱が、対称軸に沿って特別なジョイントで結合されていて、結合されているという以外の拘束は受けないとする。したがって、非現実的ではあるが、2 つの円柱は衝突しない (互いに他をすり抜ける) と仮定していることになる。この剛体系の配位空間は、それぞれの剛体の姿勢を指示する 2 つの回転行列 (g_1, g_2) からなる積空間 $SO(3) \times SO(3)$ である。この剛体系を全体として回転させるという仕方で回転群 $SO(3)$ が作用する。

$$(g_1, g_2) \mapsto (kg_1, kg_2), \quad k \in SO(3)$$

この系の形状空間は $SO(3)$ となり、射影は

$$\pi : (g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2$$

で与えられる。ここで $g_1^{-1}g_2 \in SO(3)$ を次のように表す。

$$g_1^{-1}g_2 = e^{-\theta_1 \hat{e}_2} e^{2\phi \hat{e}_1} e^{\theta_2 \hat{e}_2},$$

$$0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq 2\phi \leq \pi, 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$$

ただし、簡単のため $\hat{e}_j = R(e_j)$, $j = 1, 2, 3$ とおいた。これより、(3) に対応して次の式が得られる。

$$(g_1, g_2) = (h\sigma_1(\theta_1, \theta_2, \phi), h\sigma_2(\theta_1, \theta_2, \phi)), \quad h \in SO(3)$$

ただし、

$$\begin{cases} \sigma_1(\theta_1, \theta_2, \phi) = e^{-\phi \hat{e}_1} e^{\theta_1 \hat{e}_2}, \\ \sigma_2(\theta_1, \theta_2, \phi) = e^{\phi \hat{e}_1} e^{\theta_2 \hat{e}_2}, \end{cases} \quad \phi \neq 0, \pi/2$$

これは、円柱の姿勢を指示している。たとえば、円柱1の重心を一旦原点におき、その対称軸を e_2 軸にかさねる。(これを円柱1の基準位置と呼ぶことにする。)そして対称軸のまわりに θ_1 だけ回転させ、さらに e_1 軸まわりに $-\phi$ だけ回転させる。円柱2についても同様である。円柱をそれぞれの対称軸に沿って移動させて、結合手をつなぐ。一体となった2円柱系は h の回転をうける。これが、 $(g_1, g_2) = (h\sigma_1, h\sigma_2)$ の内容である。すると、たとえば、円柱1の各点は $\mathbf{x}_\alpha = g_1 \mathbf{X}_\alpha + \mathbf{r}_1$ と表される。ただし、 \mathbf{r}_1 は、全系の重心からみた円柱1の重心の位置を表し、 \mathbf{X}_α は基準位置におかれた円柱1の各点の位置ベクトルである。さらに、 \mathbf{r}_1 は結合点から円柱1の重心までの長さと g_1 とから決まる。円柱2についても同様である。

議論を簡単にするため、捻れ無しの条件を課す。つまり、連結された円柱はそれぞれの対称軸のまわりに同じ回転角だけ回転するという条件をつける。(雑巾を絞るような、互いに反対向きの回転はしない。)このとき、系全体の配位空間 Q_0 は $SO(3)$ に同相となり、剛体系全体の姿勢の変化を表すのは e_2 軸まわりの直交変換に限られ、形状空間 M は実射影空間 $\mathbf{R}P^2$ に同相であることが知られている⁹⁾。つまり、このモデルでは $O(2)$ を構造群とする主バンドル $SO(3) \rightarrow \mathbf{R}P^2$ が用いられる。このとき、剛体系の配位は

$$\begin{cases} g_1 = e^{\chi \hat{e}_2} e^{-\phi \hat{e}_1} e^{\theta \hat{e}_2}, \\ g_2 = e^{\chi \hat{e}_2} e^{\phi \hat{e}_1} e^{\theta \hat{e}_2}, \end{cases} \quad 0 \leq \chi \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (47)$$

で与えられる。

全角運動量ゼロの条件は、やはり $\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{x}_\alpha \times d\mathbf{x}_\alpha = 0$ であるが、和をとるのは、剛体ごとの和と剛体をわたる和とに分かれる。剛体ごとの和では、 α を連続パラメータとし、 \sum_α は当然積分と理解しなければならない。また、慣性作用素の定義における和についても同様の読み変えをする。同様に、接続形式も、(13) を拡張して定義できる。すると相当長い計算の結果、

$$\omega = \left(d\chi + \frac{\lambda \cos \phi d\theta}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} \right) \hat{e}_2 \quad (48)$$

が得られる。ここに、 λ は円柱の対称軸のまわりの慣性モーメントの、重心を通り対称軸に垂直な軸のまわりの慣性モーメントに対する比である。詳しくいうと、円柱の慣性モーメント I_1, I_2, I_3 を $I_3 = I_1$ となるようにとって、 $\lambda = I_2/I_1$ とおいた。(48) より、(11) に対応する振動の微分方程式が次のように求まる。

$$\begin{aligned}\frac{d\chi}{dt} &= -\frac{\lambda \cos \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} u_2, \\ \frac{d\phi}{dt} &= u_1, \\ \frac{d\theta}{dt} &= u_2.\end{aligned}\tag{49}$$

最適制御問題は、質点系の場合と同様である。振動的計量を求めて、評価規範を作り、最大値原理を適用するという方針で進む。計量も質点系の場合の定義を拡張して定義される。座標系 (47) を用いての計算の結果、

$$\begin{aligned}ds^2 &= 2I_1 \left[(1 + \kappa \sin^2 \phi) d\phi^2 + \frac{\lambda \sin^2 \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} d\theta^2 \right] \\ &+ 2I_1 \left[(\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi) \left(d\chi + \frac{\lambda \cos \phi d\theta}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} \right)^2 \right]\end{aligned}\tag{50}$$

であることが分かる。振動的計量はこのうちの

$$2I_1 \left[(1 + \kappa \sin^2 \phi) d\phi^2 + \frac{\lambda \sin^2 \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} d\theta^2 \right]\tag{51}$$

で与えられる。 I_1 は、円柱の重心を通り対称軸に垂直な軸のまわりの慣性モーメントである。 κ は、円柱の質量を m 、結合点から円柱の重心までの長さを l としたとき、 $\kappa = ml^2/I_1$ で与えられる。 Q_0 の余接バンドル T^*Q_0 には通常の標準的 1 次微分形式

$$p_\chi d\chi + p_\phi d\phi + p_\theta d\theta$$

が定義され ((21) に類似)、振動的変位に対応する補助変数が

$$P_1 = p_\phi, \quad P_2 = p_\theta - \frac{\lambda \cos \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} p_\chi$$

で定義される ((22) に類似)。最大値原理の適用の結果、最適ハミルトニアンが次のように得られる ((23) に類似)。

$$H = \frac{1}{4I_1} \left(\frac{1}{1 + \kappa \sin^2 \phi} p_\phi^2 + \frac{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi}{\lambda \sin^2 \phi} \left(p_\theta - \frac{\lambda \cos \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} p_\chi \right)^2 \right)\tag{52}$$

このハミルトニアンから運動方程式を導き、それを数値積分して、実際に連結 2 円柱系に宙返りをさせることができる。

ここで得られた運動方程式は (49) において u_1, u_2 を最大値原理で決めたものである。したがって、あくまで、速度が制御できるという観点にたっている。しかし、制御入力力は力であるべきだとの観点にたつと、この手法はとれない。第5節で述べた、制御入力を力として扱う手法を執る。配位空間は主バンドル $Q_0 \cong SO(3) \rightarrow \mathbf{R}P^2$ であり、用いる局所座標系は $(\xi^i) = (\phi, \theta, \chi)$ である。ベクトル場と1次微分形式の双対的局所基底はそれぞれ次のように与えられる。

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\lambda \cos \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (53)$$

$$\theta^1 = d\phi, \quad \theta^2 = d\theta, \quad \theta^3 = d\chi + \frac{\lambda \cos \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} d\theta \quad (54)$$

である。特に、 θ^3 は (48) で導入した接続形式の成分である。(50) から Lagrangian は

$$L = I_1 \left[(1 + \kappa \sin^2 \phi) \dot{\phi}^2 + \frac{\lambda \sin^2 \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} \dot{\theta}^2 \right] + I_1 \left[(\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi) \left(\dot{\chi} + \frac{\lambda \cos \phi \dot{\theta}}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} \right)^2 \right] \quad (55)$$

で与えられることが分かる。制御入力を

$$\bar{f} = u_1(t) d\phi + u_2(t) d\theta \quad (56)$$

の形で加える。これは、結合手で折り曲げるトルク u_1 と各円筒の対称軸周りに回すトルク u_2 で制御するという手法である。(32) にならって、変数

$$v^1 = \dot{\phi}, \quad v^2 = \dot{\theta}, \quad v^3 = \dot{\chi} + \frac{\lambda \cos \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} \dot{\theta} \quad (57)$$

を導入すると、Lagrangian は次のように表される。

$$L^* = I_1 \left[(1 + \kappa \sin^2 \phi) (v^1)^2 + \frac{\lambda \sin^2 \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} (v^2)^2 \right] + I_1 \left[(\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi) (v^3)^2 \right] \quad (58)$$

また、(35) で導入した変数 \bar{F}_i はこの場合 $\bar{F}_1 = u_1, \bar{F}_2 = u_2$ となる。また、 $d\theta^3$ の計算から、

$$F_{12} = -\frac{\lambda \sin \phi (1 + (1 - \lambda)) \cos^2 \phi}{(\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi)^2}$$

を得る。 $r=1, n=2$ だから F_{ij}^a のうち独立な成分は F_{12} だけである。ここで (45) を用いると、 v^1, v^2 についての微分方程式が得られる。計算の結果、

$$\frac{dv^1}{dt} = \frac{1}{2I_1(1 + \kappa \sin^2 \phi)} \left[-2I_1 \kappa \sin \phi \cos \phi (v^1)^2 + \frac{2I_1 \lambda^2 \sin \phi \cos \phi}{(\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi)^2} (v^2)^2 + u_1 \right]$$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi}{2I_1 \lambda \sin^2 \phi} \left[\frac{4I_1 \lambda^2 \sin \phi \cos \phi}{(\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi)^2} v^1 v^2 + u_2 \right]$$

を得る。これに、(57) から導かれる式

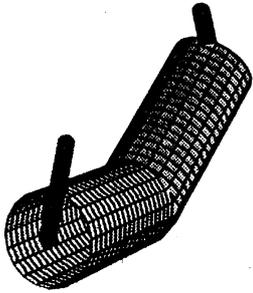
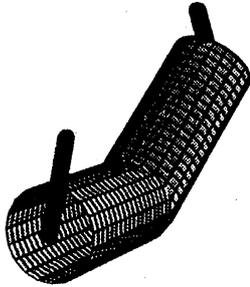
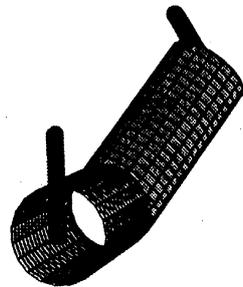
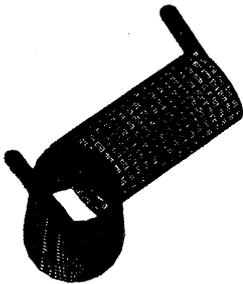
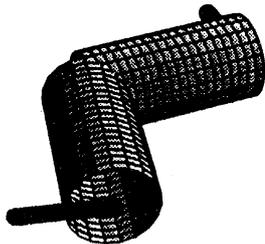
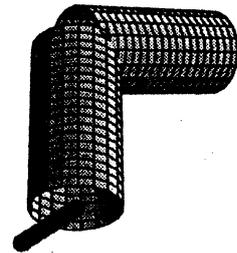
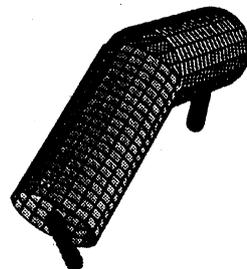
$$\frac{d\phi}{dt} = v^1, \quad \frac{d\theta}{dt} = v^2, \quad \frac{d\chi}{dt} = -\frac{\lambda \cos \phi}{\sin^2 \phi + \lambda \cos^2 \phi} v^2$$

をつけ加えて、運動方程式が完成する。 $v^3 = 0$ のとき、 $\partial L^*/\partial v^3 = 0$ であるから、 F_{12} を含む項は現れなかった。得られた運動方程式において、 $u_1(t), u_2(t)$ をうまく与えると宙返りが実現する。具体的に宙返りをする例を本稿の最後に添付する。

参考文献

- 1) M.V. Berry: Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. Lond., **A329**, 45/57 (1984)
- 2) A. Guichardet: On rotation and vibration motions of molecules, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor., **40**, 329/342 (1984)
- 3) R. Montgomery: Optimal control of deformable bodies and its relation to gauge theory, The Geometry of Hamiltonian Systems (T. Ratiu ed., Springer-Verlag), 403/438 (1991); Gauge theory of the falling cat, Dynamics and Control of Mechanical Systems (M.J. Enos ed., Amer. Math. Soc.), 193/218 (1993); W.S. Koon and J.E. Marsden: Optimal control for holonomic and non-holonomic mechanical systems with symmetry and Lagrangian reduction, SIAM J. Control Optim., **35**, 901/929 (1997); W.S. Koon and J.E. Marsden: The Hamiltonian and Lagrangian approaches to dynamics of nonholonomic systems, Rep. Math. Phys., **40**, 21/62 (1997)
- 4) V. Jurdjevic and R.W. Sharpe: Geometric control and non-holonomic mechanics, Conference Proceedings vol. **25**, Amer. Math. Soc., (1998)
- 5) A. Tachibana and T. Iwai: Complete molecular Hamiltonian based on the Born-Oppenheimer adiabatic approximation, Phys. Rev., **A33**, 2262/2269 (1986)
- 6) T. Iwai: A gauge theory for the quantum planar three-body problem, J. Math. Phys., **28** 964/974 (1987); A geometric setting for internal motions of the quantum three-body system, J. Math. Phys., **28**, 1315/1326 (1987); A geometric setting for classical molecular dynamics, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor., **47** 199/219 (1987); A geometric setting for the quantum planar n -body system, and a $U(n-1)$ basis for the internal states, J. Math. Phys., **29**, 1325/1337 (1988)

- 7) T. Iwai: The mechanics and control for multi-particle systems, J. Phys. A: Math. Gen., **31**, 3849/3865 (1998); T. Iwai and A. Tachibana: The geometry and mechanics of multi-particle systems, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor., **70**, 525/559 (1999)
- 8) R.G. Littlejohn and M. Reinsch: Gauge fields in the separation of rotations and internal motions in the n -body problem, Rev. Mod. Phys., **69**, 213/275 (1997)
- 9) T. Iwai: Classical and quantum mechanics of jointed rigid bodies with vanishing total angular momentum, J. Math. Phys., **40**, 2381/2399 (1999)
- 10) 岩井: 多体系の幾何学 - ネコの宙返り, システム/制御/情報, **37-9**, 539/546 (1993); 岩井: 猫だからする幾何学, Basic 数学, **30-12**, 56/59 (1997); 岩井: 微分幾何学的非ホロミック制御, 計測と制御, **37-5**, 349/353 (1998)

(a) $t = 0$ (b) $t = \frac{\pi}{4}$ (c) $t = \frac{\pi}{2}$ (d) $t = \frac{3\pi}{4}$ (e) $t = \pi$ (f) $t = \frac{5\pi}{4}$ (g) $t = \frac{3\pi}{2}$ (h) $t = \frac{7\pi}{4}$ (i) $t = 2\pi$

ねこの宙返り