数理解析研究所講究録
1125巻 2000年 93-114

証明力を拡張した適切さの論理 ER

Relevant Logic ER with Extended Provability

吉浦紀晃　　米崎直樹
Noriaki Yoshiura　　Naoki Yonezaki

東京工業大学情報理工学研究科計算工学専攻
Department of Computer Science, Tokyo Institute of Technology

概要

適切さの論理は、古典論理における含意の違和感の除去を目的として研究されている。この違和感は、関連性、恒真性、偶然性の3つに分類されており、特に、前者の2つは強い違和感とみなされ、ほとんどの体系で除去されている。適切さの論理の体系では、違和感の除去に伴い、古典論理の定理であり違和感を含んでいない式のいくつかが定理ではないという問題、つまり、必要以上に体系が弱くなるという問題がある。そこで、本研究では、推論規則において式の属性を用いた自然演繹の体系 ER を提案し、関連性と恒真性の違和感が除去されていることを示す。さらに、これらの違和感が除去されている代表的な体系Rよりも、ER が真に強い体系であることを証明し、ER が必要以上に弱い体系ではないことを示す。

1 はじめに

人間の行なう演繹的な推論を形式化することは、人工知能の研究にとって重要な問題であり、論理はその形式化の有効な候補の1つである。しかし、古典論理においては、結合子の意味が、人間がそれに対して持つ直観的な意味に完全に合致していない場合が多く、特に、含意「ならば」は人間が日常利用する意味からみると違和感を含んでいる [沢村 89]。例えば、古典論理では B から $A \to B$ を推論することができ、A は任意の式でよく、B との関連性は必要とされない。しかし、日常言語の「ならば」の意味からみた場合、この推論を行なうためには、A と B に関連が必要であり、この推論は正しいとはいえない。

適切さの論理は、このような含意の違和感を取り除くことを目的として研究されている。[Anderson75] では、含意の適切さの必要条件として、$A \to B$ が定理ならば、A と B には共通の原子命題が存在するという Variable-sharing とよばれる特徴が提案されており、また、$A \to B$ はその構成要素である A, B の真偽値に言及しないとみなされている。[杉原 75, Anderson75] では、違和感が関連性・恒真性・偶然性の3つに分類されている。これらの違和感のなかで、関連性・恒真性の違和感は強い違和感であり、ほとんどの適切さの論理の体系で除去されている。

人間の推論の形式化の手段としてみた場合、含意の違和感が除去されているという点においては、古典論理よりも適切さの論理は有効である [Cheng96, 沢村 89]。しかし、違和感を除去するために、その副作用として、必ずしも違和感が感じられない式までもが定理から除去されるという問題がある。例えば、$A \to (B \to A \wedge B)$ や $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$ には違和感があるとはいえないが、適切さの論理では定理とはならない。また、多くの体系で成り立ち、人間の推論において自然であると考えられる推論規則 Disjunctive Syllogism が成り立たない [Anderson75]。このように、従来の適切さの論理の体系では、違和感を除去することに伴い、必要以上に体系が弱くなっていると考えられる。

一方、含意の意味を自然言語から見た場合、「雨が降るならば、遠足は中止。」や「太郎は人を殺したので、警察に逮捕された。」などのように、前件が後件の成立に何らかの役割を果たしている場合に正しい命題とみなされ、「雨が降るならば、$1+1=2$ である。」などのように、前件が後件の成立に何らの役割を果たしていないような命題は誤りとみなされる [Anderson75]。よって、適切さの論理では、含意 $A \to B$ の意味が「A の成立を利用して、B が成立を導くことができる」となることが望まれるが、従来の体系ではこのようにはなっていない。例えば、古典論理の自然演繹では、$A \to (B \to A \wedge B)$ が次のように証明可能であり、$A \wedge B$ を推論するために A や B が利用されており、A や B は $A \wedge B$ の成立に何らかの役割を果たしている。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \quad [B]}{A \wedge B}\wedge I}{B \to A \wedge B}\to I}{A \to (B \to A \wedge B)}\to I$$

よって、$A \to (B \to A \wedge B)$ は適切さの論理の体系に

おいて証明されるべき命題であるが、従来の適切さの論理の体系では証明不能であり、よって、適切さの論理の体系での含意の意味は自然なものではないと考えられる。

そこで、本稿では、関連性・恒真性の違和感が除去されている代表的な体系 R において証明不能な $A \to (B \to A \wedge B)$ や $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$ などの式を証明することができ、これらの違和感が除去されている体系 ER (Extended R) を提案する。さらに、ER が R より真に強い体系であることを証明する。ER では、人間の推論において自然であると考えられる推論規則 Disjunctive Syllogism が成り立つ。

ER は自然演繹の体系として定義され、各推論規則では式の属性が利用される。この属性は、証明を制御するために利用され、違和感を含む式の推論を防ぐ。また、ER は [Dummett77] などに示されている sequent による自然演繹の体系として与えられる。これは、適切さの論理では矛盾記号を用いないのに対して、ER では矛盾を示す記号が必要があり、sequent の右辺が空白であることを矛盾として利用するためである。

ER が関連性や恒真性の違和感を含まないことは、ER の証明図に関する特徴を証明することにより示される。ER が R より真に強い体系であることは、R の自然演繹の体系 FR と ER の比較により行う。しかしながら、R の自然演繹の体系 FR と ER では推論規則の適用に対して異なる制限を加えているため、また、推論規則の対応を簡単に取ることができないため、FR と ER の強さを容易に比較することはできない。そこで、本稿では、自然演繹の体系 FR', ER' を用意し、FR' が FR よりも強く、ER' が FR' が強く、ER と ER' が強いことを証明図の標準化を利用することにより証明する。これにより、ER が R よりも真に強い体系であることが証明される。

以下では、2 章では、適切さの論理の導入とその問題点を述べ、3 章では、論理体系 ER の構築の方法とその定義を与える。4 章では、ER では関連性・恒真性の違和感が除去されており、R では証明不能であるが、ER では証明可能である式が存在することを述べる。5 章では、ER が R より真に強い体系であることを証明する。6 章で、本稿のまとめを述べる。

2　適切さの論理とその問題点

2.1　適切さの論理

適切さの論理における含意の違和感とは、次の 3 つのものである [杉原 75]。なお、以下では、結合子の結合の強さは、$\to, \vee, \wedge, \neg$ の順で強くなるものとする。

1. 関連性の違和感
   これは、含意の前件と後件の間に内容的な関連がないことによる違和感である。その典型例が以下の式である。
   $A \to (B \to A)$
   この式は、A が真であれば、$B \to A$ は真であることを示す。しかし、B は任意の式でよいので、内容的に A と無関係な式である場合、$A \to (B \to A)$ が成り立つことは不自然である。
2. 恒真性の違和感
   古典論理の含意は、後件が真ならば、前件がいかなる式であっても真である。また、前件が偽ならば、後件がいかなる式であっても真である。以下の 2 つの式は、その典型例である。
   $A \to (B \vee \neg B)$　　$(A \wedge \neg A) \to B$
   これらの式では、前件と後件とに全く関連がなく、成り立つことが不自然である。
3. 偶然性の違和感
   $A \to ((A \to B) \to B)$ は古典論理では真である。よって、A が真ならば、任意の式 B に対して、$(A \to B) \to B$ が真となる。このとき、A と B の関連性は必要ではなく、この意味において、$A \to ((A \to B) \to B)$ は違和感を含む。 ■

また、適切さの論理は、Variable-sharing が成り立つ必要がある。これは、適切さの論理の重要な特徴の一つである。

適切さの論理の研究は、Lewis による厳密含意の提案に始まる [Lewis32]。この含意からは、関連性の違和感だけが取り除かれている [Hallden48, 三浦 81]。その後、Church[Church51] と Moh[Moh50] はそれぞれ独立に、関連性・恒真性の違和感が除かれており、含意だけからなる体系 $R_{\to}$ を提案した。また、Ackermann は [Ackermann56] において厳格含意 (Entailment) を提案した。Anderson と Belnap は、$R_{\to}$ を含む体系 R と厳格含意を含む体系 E を提案した [Anderson75]。E では、前述したすべての違和感が取り除かれている。そのほかにも、多くの適切さの論理の体系が提案されている [Ross96]。また、違和感のなかでも、関連性・恒真性の違和感は強い違和感とされており、ほとんどの体系で除去されている。体系 R は、これら 2 つの違和感が除去された代表的な体系である [Anderson75]。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge\neg A]}{A}\wedge E \qquad \dfrac{\dfrac{[A\wedge\neg A]}{\neg A}\wedge E}{\neg A\vee B}\vee I}{B}DS}{A\wedge\neg A\to B}\to I$$

図 1: DS による $A\wedge\neg A\to B$ の証明

2.2 適切さの論理の問題点

このように、適切さの論理では、すでに多くの体系が提案されているが、体系として弱いという問題がある。例えば、以下の式は、適切さの論理においては定理ではない [Anderson75]。

1. $A\to(B\to A\wedge B)$
2. $A\to A\wedge(B\vee\neg B)$

適切さの論理では、$A\wedge B\to A$ が定理であり、また 3 段論法が成り立つので、1. が定理である場合、関連性の違和感を含む式 $A\to(B\to A)$ が定理となる。また、2. が定理である場合、恒真性の違和感を含む式 $A\to(B\vee\neg B)$ が定理となる。このため、(1), (2) の式は定理とはならない。しかし、これらの式自体は、違和感を含んでいないので、定理とみなすことは自然である。

また、適切さの論理では、自然演繹における次の推論規則 Disjunctive syllogism(DS) が許されない。

$$\dfrac{A \quad \neg A\vee B}{B}DS \qquad \dfrac{\neg A \quad A\vee B}{B}DS$$

これは、$A\wedge\neg A\to B$ が図 1 のように証明されるためである [Lewis32]。この証明で利用されているものは、Implication Introduction($\to I$), Or Introduction($\vee I$), And Elimination ($\wedge E$), そして、DS である。[Lewis32] では、DS が問題のある規則とされ、適切さの論理では、この推論規則は除去されている。よって、DS を利用して推論されかつ違和感を含まない式も定理とはならない。

このように、適切さの論理では違和感を除去するために、必要以上に体系が弱くなるという問題がある。

3 論理体系 ER

本章では、前述の問題を解決した適切さの論理 ER を提案する。ER は、古典論理の自然演繹の体系に変更を加え、さらに、式に対して属性を与え、各推論規則に属性に対する規則を加えることで構築される。属性を利用することにより、違和感を含む式を推論する

$$\dfrac{\dfrac{[A]}{B\to A}\to I}{A\to(B\to A)}\to I$$

図 2: $\to I$ による関連性の違和感を含む式の証明

ことを防ぎ、違和感を含まない古典論理の定理を、ER の定理とすることが可能となる。以下では、推論規則の変更と属性について説明し、次に ER を定義する。

3.1 ER 構築の方法

ここでは、違和感を除去するために問題となる推論規則について述べ、その対策を示す。

3.1.1 $\to I$ に対する問題

古典論理では、図 2 の証明によって、$A\to(B\to A)$ が定理となる。この式は、関連性の違和感を含んでいる。違和感を導出する原因は、A から $B\to A$ の証明において、導入された式 B が仮定として利用されていないことにある。適切さの論理では、$\to I$ に対しては、discharge [1] される仮定が存在する必要があるという制限により、このような証明は行なわれない。この制限は ER においても必要となる。

3.1.2 $\bot E$ と DS に関する問題

恒真性の違和感を除去するため、$A\wedge\neg A\to B$ を証明可能とする推論規則 $\bot E$ が ER では成り立たない。

$$\dfrac{\bot}{A}\bot E$$

一方、古典論理では、この推論規則や Implication Elimination($\to E$) や Or Elimination($\vee E$) により、以下のように Disjunctive syllogism が成り立つ。

$$\dfrac{\neg A\vee B \qquad \dfrac{\dfrac{A \quad [\neg A]^{2}}{\bot}\to E}{B}\bot E \qquad [B]}{B}\vee E$$

よって、ER に DS 自体を推論規則として導入する必要があり、図 1 の証明における DS 以外の推論規則から違和感の原因となる規則を見つける必要がある。本稿では、図 1 の証明で問題となる推論を $\neg A$ から $\neg A\vee B$ の推論にあると考える。なぜならば、この推論

[1] discharge とは、証明において導入された仮定を取り除く操作である。

[2] $\neg A$ は $A\to\bot$ の略記である。

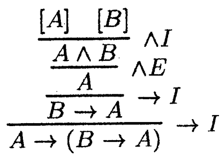

図 3: 冗長な証明

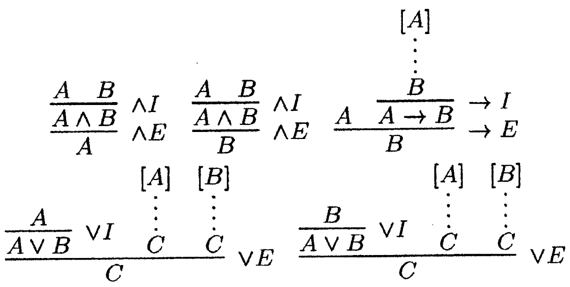

図 4: 冗長な推論

により、仮定 $A\wedge\neg A$ に対して、無関係な式である B が導入されるからである。しかし、$\vee I$ 自体は正しい推論規則であるので、「$\vee I$ の結論は、DS の major premise [3]とはならない。」という制限を用いて $A\wedge\neg A\to B$ を証明不能とする。

3.1.3 冗長な推論を防ぐための推論規則に対する制限

図 3 では、$\to I$ に対する前述した制限が守られているにも関わらず、違和感を含む式が推論されている。この原因は、A と B から $A\wedge B$ を推論して、さらに $A\wedge B$ から A を推論するという、冗長な推論を行ない、実際には必要ではない仮定 B が A の証明に利用されていることにある。図 4 に示される冗長な推論は、結合子を導入する推論規則の結論に対して、結合子を除去する推論規則を適用することによって生じる。これらの推論では、実際には必要でない仮定が導入されており、このような推論を禁止する必要がある。

R では、A と B から $A\wedge B$ を推論する場合、A の証明と B の証明で利用された仮定が同一である必要がある。この $\wedge I$ に対する制限のもとでは、図 3 の証明は R では成立しない。しかし、同時に $A\to(B\to A\wedge B)$ も定理とはならない。それに対して、本稿で用いる制限は $A\to(B\to A\wedge B)$ を推論可能にしたまま、図 3 の証明を禁止することができ、また、証明の冗長さを禁止しているので自然な制限である。

[3] $\frac{A\vee B \quad \neg A}{B}$ における $A\vee B$ のことである。

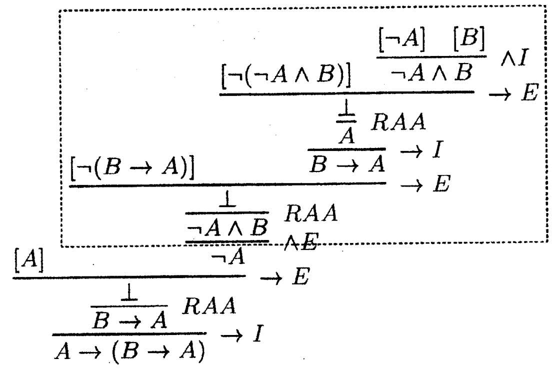

図 5: 背理法による関連性の違和感の導出

3.1.4 背理法について

背理法は、次の推論規則である。

$$\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots\\ \dfrac{\perp}{A}\ RAA\end{array}$$

この推論規則を利用すると、これまで述べてきた推論規則の制限のもとであっても、関連性の違和感を含む式 $A\to(B\to A)$ が図 5 のように証明可能である。

違和感を含む式が推論される原因は、図 5 の点線部分の証明にあると考えられる。適切さの論理では、含意がその構成要素の真偽値について言及するとはみなされないため、$\neg(B\to A)$ から B や $\neg A$ は論理的帰結として導出されない。実際、R では、$\neg(B\to A)\to B\wedge\neg A$ が定理とはならない。

以上のことより、$\neg(B\to A)\to B\wedge\neg A$ が定理となることを禁止する必要がある。R では、前述した $\wedge I$ に対する制限により、$\neg(B\to A)\to B\wedge\neg A$ が定理とはならない。

R と同様の制限を利用すれば、$\neg(B\to A)\to B\wedge\neg A$ は証明されないが、$A\to(B\to A\wedge B)$ が定理とはならなくなる。よって、ここでは、次のような制限を用いる。つまり、RAA において discharge される仮定 $\neg A$ が $\to E$ の major premise [4]として利用される場合、その minor premise [5]が I-rule [6]の結論ではないという制限である。この制限は、$\neg A$ の証明と B の証明で利用された仮定に不自然な関連を持たせることを禁止するように働く。この制限のもとでは、$\neg(B\to A)\to B\wedge\neg A$ は証明不能であるが、$A\to(B\to A\wedge B)$ は証明可能となる。

[4] $\frac{A\to B \quad A}{B}$ における $A\to B$ のことである。

[5] $\frac{A\to B \quad A}{B}$ における A のことである。

[6] 自然演繹における Introduction 規則を表す。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]}{A\vee\neg A}\vee I \quad [\neg(A\vee\neg A)]}{\bot}\to E}{\neg A}\to I}{A\vee\neg A}\vee I \quad [\neg(A\vee\neg A)]}{\bot}\to E}{A\vee\neg A}RAA$$

図 6:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\vee B}EM1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg B]\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{A\vee B}EM2$$

図 7:

3.1.5 排中律について

一般に、背理法が成り立てば、図 6 のように排中律が成り立つ。

しかし、前述の ER における RAA に対する制限のもとでは、この証明の最後の推論である RAA を利用することはできない。そこで、排中律を証明可能とするために、図 7 に示す推論規則を導入する。

この推論規則から排中律が証明可能である。

3.2 属性の利用

前述した 5 つの問題のうち、$\to I$ に関する問題と排中律に関する問題には、推論規則の制限・追加によって対処することができる。他の問題に対しては、複数の推論規則にわたる制限を設ける必要がある。

DS の問題と冗長な推論に関する問題を解決するためには、I-rule の結論を E-rule [7] の major premise [8] として利用することを禁止する必要がある。そのためには、証明に現れる式を、E-rule の major premise として利用可能であるかによって分類する必要がある。また、背理法に関する問題を解決するためには、仮定として、背理法によって discharge 可能であるものとそうではないものの 2 種類を用意する必要がある。

DS と冗長な推論に関する議論から、すべての仮定は E-rule の major premise として利用可能である。また、E-rule の major premise となり得る式を、仮定とそれ以外に分類し、仮定をさらに背理法によって discharge 可能である仮定とそれ以外の仮定に分類した場合、背理法によって discharge 可能ではない仮定と、仮定ではない E-rule の major premise として利用可能な式に対する推論規則の適用の制限は同じであるから、これらを区別する必要はない。よって、E-rule の major premise となり得る式は、背理法によって discharge 可能な仮定とそれ以外の 2 種類に分類可能である。以上より、証明に出現する式を次のように分類できる。

1. E-rule の major premise とはなれない式 $\cdots(A)$
2. E-rule の major premise となれる式
   この種類の式は、さらに次のように分類される。
   (1) RAA で discharge 可能な仮定 $\cdots(B)$
   (2) それ以外 $\cdots(C)$

本稿で提案する ER では、式の分類を属性によって行なう。つまり、証明において式がどの種類であるかを、属性値として示すこととし、上の分類に対応して、(A) の種類の式には属性値 i、(B) の種類の式には属性値 r、(C) の種類の式には属性値 e を用いる。証明に対する制限は、この属性計算を推論規則に付随させ、属性値を推論規則の適用可能性に反映させることによって実現される。なお、以下では、$\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\phi,\phi_1,\phi_2,\cdots$ を属性値に対するメタ変数として用いる。

3.3 論理体系 ER

定義 3.1 (ER の式) 原子命題は ER の式である。また、A,B が ER の式ならば、$\neg A, A\wedge B, A\vee B, A\to B$ も ER の式である。 ■

A を式、φ を属性値としたときに $A:\varphi$ を属性式と呼ぶ。

定義 3.2 $\Gamma\vdash A$ を *sequent* と呼ぶ。ただし、Γ は属性式の *multiset* [9] であり、A は属性式であるか空白である。ER における証明とは、*sequent* の有限列 $F_1,\cdots,F_n$ であり、F_i $(1\le i\le n)$ は、次の条件のいずれかを満たす必要がある。

1. F_i は公理である。
2. $F_1,\cdots F_{i-1}$ のいずれかを前提とし、図 8 の推論規則を利用して、F_i を推論できる。 ■

定義 3.3 (定理) $F_1,\cdots,F_n$ が証明であり、F_n が $\vdash A:\varphi$ である場合、A を ER の定理と呼ぶ。 ■

図 8 の推論規則では、I-rule の結論の sequent の右辺の属性値はすべて i となっており、また、この属性値を右辺に持つ sequent は E-rule の major premise とはな

[7] 自然演繹における Elmination 規則や DS を表す。

[8] 前提が 1 つだけの E-rule の major premise は、その前提である。また、$\vee E$ の major premise とは、$\frac{A\vee B\ \ C\ \ C}{C}$ における $A\vee B$ のことである。

[9] multiset とは要素の重複を認める集合である。

らない。また、右辺の属性値が r である sequent が E-rule の major premise ときには、その minor premise の属性値は e となっている。

4 ER の特徴

ここでは、ER では、Variable-sharing が成り立ち、関連性・恒真性の違和感が除去されていることを証明する。さらに、R で証明不能な式のうちのいくつかが ER において証明可能であることを示す。はじめに、これらの証明に必要な補題を証明する。なお、以下で利用する集合に関する記号[10]は multiset に関する演算を表すものとし、各補題・定理の証明は付録に示す。

定義 4.1 (部分式) 式 A の部分式とは、A に現れる式のことである。 ■

A が B の部分式であり、B が $\neg A$ ではないことを、$A \sqsubseteq B$ と書く。また、A が B の部分式であり、B が $A, \neg A$ ではないことを、$A \sqsubset B$ と書く。

定義 4.2 A と B に共通の原子命題が含まれていることを $A \sim B$ と記述する。さらに、式の *multiset* Γ に A, B が含まれ、$A \sim C_1, C_1 \sim C_2, \cdots, C_n \sim B$ となる $C_1, \cdots, C_n$ が Γ に含まれるならば、Γ において $A \sim^* B$ であると記述する。 ■

定義 4.3 式の *multiset* Γ の任意の要素 A, B が、$A \sim^* B$ となる場合、Γ は連結しているという。 ■

補題 4.1

1. $\Gamma \vdash A : e$ が証明される場合、次のことが成り立つ。
 (1) $\neg B : r \in \Gamma$ ならば、$B \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在する。
 (2) $A \sqsubset P$ となる $P : e$ が Γ に存在するか、$\Gamma = \{A : e\}$ である。
2. $\Gamma \vdash A : i$ が証明される場合、$\neg B : r \in \Gamma$ ならば、次のいずれかが成り立つ。
 (1) $B \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在する。
 (2) $B \sqsubset A$ である。
 (3) A が $\neg B$ である。
3. $\Gamma \vdash A : r$ が証明される場合、$\Gamma = \{A : r\}$ である。
4. $\Gamma \vdash$ が証明される場合、$\neg B : r \in \Gamma$ ならば、次のいずれかが成り立つ。
 (1) $B \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在する。
 (2) $\Gamma = \{B : e, \neg B : r\}$ である。 ■

[10] $\in, \subseteq$ など

属性式の multiset Γ において、属性値が e となる属性式 $A : e$ の式 A からなる multiset を Γ^e と書く。

補題 4.1 から次の 2 つの補題が導かれる。

補題 4.2 $\Gamma \vdash A : e$ が証明されるならば、Γ^e や $\Gamma^e \cup \{A\}$ は連結している。また、$\Gamma \vdash A : i$ が証明されるならば、$\Gamma^e \cup \{A\}$ は連結している。また、$\Gamma \vdash$ が証明されるならば、Γ^e は連結している。 ■

補題 4.3 ER の定理 P の証明の結論は $\vdash P : i$ である。 ■

補題 4.3 より、次の補題が導かれる。

補題 4.4 公理, $\wedge E1$, $\wedge E2$, $\vee E1$, $\vee E2$, $\vee E3$, $\vee E4$, $\to E$, $\neg E1$, $\neg E2$, RAA, $DS1$, $DS2$, $C1$, $C2$, $C3$ は、定理の証明の最終推論規則とはならない。 ■

また、補題 4.1 より、次の補題が導かれる。

補題 4.5 $\Gamma \vdash A \to B : i$ が証明可能で、Γ が原始命題からなる属性式の *multiset* ならば、$\Gamma', A \vdash B : \varphi$ も証明可能である。ただし、Γ' は、$\Gamma \subseteq \Gamma'$ であり、$C : \phi \in \Gamma' - \Gamma$ ならば $C : \phi \in \Gamma$ となる *multiset* である。 ■

これらの補題から、以下の定理を示すことができる。

定理 4.6 (Variable-sharing) $A \to B$ が定理ならば、A と B に共通の原子命題が存在する。 ■

定理 4.7 (関連性の違和感の除去) A を原子命題とし、$B_1, B_2, \cdots B_n$ $(n \geq 1)$ を A と異なる原子命題とする。このとき、$A \to (B_1 \to (B_2 \to \cdots (B_n \to A) \cdots)$ は定理とはならない。 ■

定理 4.8 (恒真性の違和感の除去) A と B を異なる原子命題とすると、$A \to (B \vee \neg B)$,$(A \wedge \neg A) \to B$ は定理とはならない。 ■

また、ER では以下の式が定理となる。

1. $A \to (B \to (A \wedge B))$
2. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$
3. $(A \wedge (\neg A \vee B)) \to B$
4. $(A \vee (B \wedge \neg B)) \to A$
5. $A \to A \wedge (B \vee \neg B)$

これらは、R の定理ではない [Anderson75]。よって、ER は R より弱くない体系であることがいえる。

[11] 前提部の右の sequent が公理 $\neg A : r \vdash \neg A : r$ となっているが、推論規則の中で結論の sequent の右辺の属性値が r となるものが公理だけであるためである。

$$A:e \vdash A:e \text{ 公理} \qquad \neg A:r \vdash \neg A:r \text{ 公理} \qquad \frac{\Gamma, \neg A:r \vdash}{\Gamma \vdash A:e}\ RAA \qquad \frac{\Gamma \vdash A:\varphi_1 \quad \Delta \vdash B:\varphi_2}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B:i}\ \wedge I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B:e}{\Gamma \vdash A:e}\ \wedge E1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B:e}{\Gamma \vdash B:e}\ \wedge E2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A:\varphi}{\Gamma \vdash A \vee B:i}\ \vee I1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B:\varphi}{\Gamma \vdash A \vee B:i}\ \vee I2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B:e \quad \Delta_1, A:e \vdash C:e \quad \Delta_2, B:e \vdash C:e}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \vdash C:e}\ \vee E1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B:e \quad \Delta_1, A:e \vdash C:i \quad \Delta_2, B:e \vdash C:\varphi}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \vdash C:i}\ \vee E2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B:e \quad \Delta_1, A:e \vdash C:\varphi \quad \Delta_2, B:e \vdash C:i}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \vdash C:i}\ \vee E3 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B:e \quad \Delta_1, A:e \vdash \quad \Delta_2, B:e \vdash}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \vdash}\ \vee E4$$

$$\frac{\Gamma, A:e \vdash B:\varphi}{\Gamma \vdash A \to B:i} \to I \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B:e \quad \Delta \vdash A:\varphi}{\Gamma, \Delta \vdash B:e} \to E \qquad \frac{\Gamma \vdash A:\varphi \quad \Delta \vdash \neg A:e}{\Gamma, \Delta \vdash}\ \neg E1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A:e \quad \neg A:r \vdash \neg A:r}{\Gamma, \neg A:r \vdash}\ \neg E2$$ [11]

$$\frac{\Gamma, A:e \vdash}{\Gamma \vdash \neg A:i}\ \neg I \qquad \frac{\Gamma, A:\varphi, A:\varphi \vdash}{\Gamma, A:\varphi \vdash}\ C1 \qquad \frac{\Gamma, A:\varphi, A:\varphi \vdash B:\phi}{\Gamma, A:\varphi \vdash B:\phi}\ C2 \qquad \frac{\Gamma, \neg A:e, \neg A:r \vdash}{\Gamma, \neg A:r \vdash}\ C3$$

$$\frac{\Gamma, \neg A:e \vdash B:\varphi}{\Gamma \vdash A \vee B:i}\ EM1 \qquad \frac{\Gamma, \neg B:e \vdash A:\varphi}{\Gamma \vdash A \vee B:i}\ EM2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B:e \quad \Delta, A:e \vdash}{\Gamma, \Delta \vdash B:e}\ DS1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B:e \quad \Delta, B:e \vdash}{\Gamma, \Delta \vdash A:e}\ DS2$$

図 8: ER の推論規則

5　ER と FR の比較

本章では、ER が FR よりも真に強い体系であることを示す。しかし、ER と FR の推論規則の単純な比較からこの証明を行うことは容易ではない。なぜならば、ER は sequent 型の自然演繹の体系であるのに対して、FR は Fitch 型の自然演繹の体系であり、さらに、双方の体系では推論規則の適用に対して制限が加わるが、ER では I-rule の結論に E-rule を適用できないという制限であるのに対して、FR では式の導出に利用された仮定が同じでなければ、$\wedge I$ や $\vee E$ が適用できないという制限であり、これらの違いから、FR と ER の 2 つの体系に直ちに同一性を見いだすことは困難だからである。

そこで、ここでは、ER が FR よりも真に強いことを証明するために、この 2 つの体系の中間の強さをもつ自然演繹の体系 FR' を用いる。まず、FR で証明可能な式は FR' において証明可能であることを示す。次に、FR' のすべての証明が特定の形に変換可能であり、FR' のその特定の形の証明には、対応する ER の証明が必ず存在することを示し、FR' で証明可能な式は ER でも証明可能であることを示す。以上のことから FR で証明可能な式は、ER でも証明可能であることがいえ、さらに、$A \to (B \to A \wedge B)$ などの ER で証明可能な式で FR で証明不能な式が存在するので、FR より ER が真に強い体系であることが証明される。

5.1　論理体系 FR

適切さの論理 R の自然演繹の体系 FR[Anderson75] を示す。FR は、Fitch 型の自然演繹の体系であり、式に自然数の集合を付加し、これを推論規則の適用可能性に反映させることで、違和感を含む式が定理となることを防いでいる。自然数の集合は、その式の導出において利用されている仮定を示す。以下では Fitch 型の自然演繹の体系を示す [Anderson75]。なお、以下では、$a \uplus b$ を $a \cap b = \emptyset$ である集合 a, b の和集合とする。

定義 5.1 A を式、a を自然数の集合としたとき、A_a を *Rank* 式と呼ぶ。■

定義 5.2 体系 FR における証明とは、*Rank* 式の有限列 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ であり、F_i $(1 \leq i \leq n)$ は、F_1, F_2, $\cdots$, F_{i-1} を前提とし、以下の推論規則を利用して推論されるものである。また、証明の各 *Rank* 式 F_i $(1 \leq i \leq n)$ には、ランクと呼ばれる自然数が付加される。

推論規則

各推論規則の前提となる *Rank* 式のランクは、その規則によって導出される *Rank* 式の直前の *Rank* 式のランクと同じでなければならない。なお、以下では、証明 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ において、F_n の直前とは F_{n-1} を意味する。

- *Hyp*

  式 $A_{\{k\}}$ を導入する。この *Rank* 式のランクは、証明の始めならば 1 であり、そうでなければ、この推論規則によって導入される *Rank* 式の直前の *Rank* 式のランクに *1* を加えたものである。また、k をこの *Rank* 式のランクとする。

- *Rep*

  直前の *Rank* 式よりも、ランクが大きくない *Rank* 式がすでに証明に出現しているならば、その *Rank* 式を導入してもよい。この *Rank* 式のランクは、直前の *Rank* 式と同じである。

- $\to I$

  $B_{a\uplus\{k\}}$ を前提として、$A \to B_a$ を推論する。ただし、k は $B_{a\uplus\{k\}}$ のランクと同じであり、推論規則 *Hyp* で導入され、ランクが k である *Rank* 式のうち、$B_{a\uplus\{k\}}$ の前方にある最も近いものが $A_{\{k\}}$ である。$A \to B_a$ のランクは、$B_{a\uplus\{k\}}$ から *1* 引いたものである。

- $\to E$

  A_a と $A \to B_b$ を前提として、$B_{a\cup b}$ を推論する。$B_{a\cup b}$ のランクは A_a と同じである。

- $\neg I$

  $A \to \neg A_a$ を前提として、$\neg A_a$ を推論する。$\neg A_a$ のランクは $A \to \neg A_a$ と同じである。

- $\neg E$

  $\neg A_a$ と $B \to A_b$ を前提として、$\neg B_{a\cup b}$ を推論する。$\neg B_{a\cup b}$ のランクは $\neg A_a$ と同じである。

- $\neg\neg I$

  $\neg\neg A_a$ を前提として、A_a を推論する。A_a のランクは $\neg\neg A_a$ と同じである。

- $\neg\neg E$

  A_a を前提として、$\neg\neg A_a$ を推論する。$\neg\neg A_a$ のランクは A_a と同じである。

- $\wedge I$

  A_a と B_a を前提として、$A \wedge B_a$ を推論する。$A \wedge B_a$ のランクは $A \wedge B_a$ と同じである。

- $\wedge E$

  $A \wedge B_a$ を前提として、A_a や B_a を推論する。A_a や B_a のランクは A_a と同じである。

- $\vee I$

  A_a または B_a を前提として、$A \vee B_a$ を推論する。$A \vee B_a$ のランクは A_a や B_a と同じである。

- $\vee E$

  $A \vee B_a$ と $A \to C_b$ と $B \to C_b$ を前提として、$C_{a\cup b}$ を推論する。$C_{a\cup b}$ のランクは $A \to C_a$ や $B \to C_a$ と同じである。

- $\wedge\vee$

  $A \wedge (B \vee C)_a$ を前提として、$(A \wedge B) \vee C_a$ を推論する。$(A \wedge B) \vee C_a$ のランクは $A \wedge (B \vee C)_a$ と同じである。

定義 5.3 (定理) $A_\emptyset$ が証明されるならば、A を FR の定理と呼ぶ。 ■

$FR(R)$ では、関連性・恒真性の違和感が除去され、また、Variable-sharing も成り立つ [Anderson75]。

5.2 FR'

ここでは、FR' を示す。FR' は、以下に定義するメタ Rank 式を用いた sequent 型の自然演繹の体系である。

定義 5.4 (メタ Rank 式) メタ *Rank* 式を次のように帰納的に定義する。

1. *Rank* 式 A_a はメタ *Rank* 式である。
2. δ をメタ *Rank* 式の *multiset*、a を自然数の集合とする。δ_a はメタ *Rank* 式である。
3. δ, π をメタ *Rank* 式の *mutiset*、A_a を *Rank* 式とする。$\langle\delta|\pi\rangle_1$, $\langle\delta|\pi\rangle_2$, $\langle\delta|\pi|A_a\rangle_4$ はメタ *Rank* 式である。

また、メタ *Rank* 式とメタ *Rank* 式の *multiset* の *Rank* 集合を次のように定義する。

1. *Rank* 式 A_a の *Rank* 集合は a である。
2. メタ *Rank* 式の *multiset* γ の *Rank* 集合は、γ の各要素の *Rank* 集合の和集合である。
3. メタ *Rank* 式 δ_a の *Rank* 集合は a である。
4. $\langle\delta|\pi\rangle_1$, $\langle\delta|\pi\rangle_2$, $\langle\delta|\pi|A_a\rangle_4$ の *Rank* 集合は、δ の *Rank* 集合である。 ■

定義 5.5 FR' において、$\gamma \vdash A_a$ や $\gamma \vdash_b$ を *sequent* と呼ぶ。ただし、A_a は *Rank* 式、b は自然数の集合、γ はメタ *Rank* 式の *multiset* である。FR' における *sequent* F_n の証明とは、以下の条件を満たす *sequent* の有限列 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ である。

1. F_i $(1 \le i \le n)$ は、F_i は公理であるか、F_1, F_2, $\cdots$, F_{i-1} のいずれかを前提とし、図 *9* の推論規則により導出され、$F_1, F_2, \cdots, F_{n-1}$ は、F_n の導出に利用されている。なお、図 *9* においては、$A, B, \cdots$ は式を、$\mathcal{A}$ は式または空、$\gamma, \delta, \pi, \cdots$ はメタ *Rank* 式の *multiset* を表す。
2. F_i が $\to I$ や $\neg I$ や *RAA* によって導出された *sequent* である場合、これらの推論規則によって *discharge* される *Rank* 式[12]の *Rank* 集合に現れる自然数は、F_k $(i \le k \le n)$ に出現しない。
3. *sequent* の左辺に *Rank* 集合が同じである *Rank* 式が存在するならば、その式は同一でなければなら

[12] $\to I$ や $\neg I$ における $A_{\{k\}}$、*RAA* における $\neg A_{\{k\}}$ のこと。

$$A_{\{k\}} \vdash A_{\{k\}} \quad \text{(公理)} \qquad \frac{\gamma, \neg A_{\{k\}} \vdash_{b \uplus \{k\}}}{\gamma \vdash A_b}\, RAA \qquad \frac{\gamma, A_{\{k\}} \vdash B_{b \uplus \{k\}}}{\gamma \vdash A \to B_b} \to I \qquad \frac{\gamma \vdash A \to B_a \quad \delta \vdash A_b}{\gamma, \delta \vdash B_{a \cup b}} \to E$$

$$\frac{\gamma \vdash A \wedge B_a}{\gamma \vdash A_a} \wedge E1 \quad \frac{\gamma \vdash A \wedge B_a}{\gamma \vdash B_a} \wedge E2 \quad \frac{\pi^1 \vdash A_a \quad \pi^2 \vdash B_a}{\pi^1, \pi^2 \vdash A \wedge B_a} \wedge I \quad \frac{\gamma \vdash \neg A_a \quad \delta \vdash A_b}{\gamma, \delta \vdash_{a \cup b}} \neg E \quad \frac{\gamma, A_{\{k\}} \vdash_{b \uplus \{k\}}}{\gamma \vdash \neg A_b} \neg I$$

$$\frac{\gamma \vdash A_a}{\gamma \vdash A \vee B_a} \vee I1 \quad \frac{\gamma \vdash B_a}{\gamma \vdash A \vee B_a} \vee I2 \quad \frac{\gamma \vdash A \vee B_a \quad \pi^1 \vdash \neg A_b \quad \pi^2 \vdash \neg B_b}{\gamma, \pi^1, \pi^2 \vdash_{a \cup b}} \vee E$$

$$\frac{\gamma, \delta^1, \delta^2 \vdash_{a \uplus \{k\}}}{\delta^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash_{a \uplus \{k\}}} \vee D1 \quad \frac{\pi^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash_{a \cup c}}{\delta^2, \langle \gamma | \pi^1 \rangle_2 \vdash_{a \uplus b}} \vee D2 \quad \frac{\pi^2, \langle \gamma | \pi^1 \rangle_2 \vdash_a}{\gamma, \pi^1, \pi^2 \vdash_a} \vee D3 \quad \frac{\pi^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash A_{a \cup c}}{\delta^2, \langle \gamma | \pi^1 | A_{a \cup c} \rangle_4 \vdash_{a \uplus b}} \vee D4$$

$$\frac{\pi^2, \langle \gamma | \pi^1 | A_a \rangle_4 \vdash B_a}{\gamma, \pi^1, \pi^2 \vdash A \vee B_a} \vee D5 \quad \frac{\gamma, \delta \vdash \mathcal{A}_{a \uplus b}}{\gamma, \delta_{\{k\}} \vdash \mathcal{A}_{a \cup \{k\}}}\, P \quad \frac{\gamma, \delta_{\{k\}} \vdash \mathcal{A}_{a \uplus \{k\}}}{\gamma, \delta \vdash \mathcal{A}_{a \cup b}}\, O \quad \frac{\delta \vdash \mathcal{A}_a}{\delta' \vdash \mathcal{A}_a}\, C$$

- $\vee D1$ において、γ の Rank 集合は a、δ^1 と δ^2 の Rank 集合は $\{k\}$ である。
- $\vee D3, \vee D5$ において、$\gamma \cup \pi^1$ と $\gamma \cup \pi^2$ の Rank 集合は同じである。
- P や O において、γ の Rank 集合は a、δ の Rank 集合は b である。
- C において、δ' は δ に出現するメタ Rank 式の multiset λ の要素に次のいずれか操作を行ったものである。
  1. $C_c, C_c \in \lambda$ である C_c, C_c を C_c に置換する。
  2. $\gamma^1_b, \gamma^2_b \in \lambda$ である γ^1_b と γ^2_b を $(\gamma^1 \cup \gamma^2)_b$ に置換する。ただし、γ^1 と γ^2 は Rank 集合が同じであるメタ Rank 式の multiset である。

図 9: FR' の推論規則

ない。

F_n の証明 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ に対して、$F_l, F_{l+1}, \cdots, F_m$ $(1 \leq l \leq m \leq n)$ を $F_1, F_2, \cdots, F_n$ の部分証明と呼ぶ。ただし、$F_l, \cdots F_{m-1}$ は、F_m の導出に利用されている。 ■

FR' の証明の定義において、Rank 集合に関して制限が加えられているが、これは、後述する証明の標準化の複雑さを減少させるために必要である。また、FR' では、$\vee D1, \vee D2, \cdots, \vee D5, P, O, C$ などの、他の論理体系では利用されない推論規則があるが、これは、Rank 集合による推論規則の適用に対する制限の下で、証明の標準化を行うために導入されたものである。

定義 5.6 (FR' の定理) FR' の証明 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ において、F_n が $\vdash A_\emptyset$ である場合、A を FR' の定理と呼ぶ。 ■

次に、FR の定理が FR' の定理であることを証明する。初めに、FR の証明の仮定を定義する。

定義 5.7 (FR の証明の仮定) FR の証明 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ における仮定とは、推論規則 *Hyp* によって推論された *Rank* 式であり、ランクが F_n より小さいものである。ただし、推論規則 *Hyp* によって導入された同じランクの *Rank* 式が複数存在する場合には、F_n に最も近いものだけを仮定とする。 ■

補題 5.1 FR において A_a が証明可能であり、そのときの仮定の集合を γ とする。このとき、FR' において、$\gamma \vdash A_a$ が証明可能である。 ■

補題 5.1 より、次の補題が成り立つ。

補題 5.2 FR の定理となる式は、FR' でも定理である。 ■

5.3 FR' の証明の標準化

この節では、FR' のすべての証明がある特定の形に変換可能、つまり、標準化可能であることを示す。FR' の証明では、自然数の集合が利用されるため、また、$\vee D1$ などの FR' 独自の推論規則があるため、古典論理などの標準化の手続きだけでは標準化を行うことはできない。また、FR' の標準化された証明は、ER の証明との間に対応をとる必要があるため、ER における背理法に対する制限を反映したものとなる必要がある。よって、ここで示す標準化の手続きは、背理法に関する標準化の手続きと、[Troelstra88] の直観主義論理の標準化の手続きに FR' 独自の推論規則に関する標準化の手続きを加えた手続きからなる。以下では、

証明の標準形を定義し、任意の定理の証明が標準形に変換できることを示す。まず、FR' の証明の標準形を定義するために、いくつかの定義を与える。

定義 5.8 (式の複雑さ) 式または空 $\mathcal{A}$ の複雑さを $\mathcal{A}$ が空ならば0、$\mathcal{A}$ が式ならば $\mathcal{A}$ に出現する原子命題と結合子の延べ総数と定義する。 ■

定義 5.9 (I-rule chain) FR' の証明における *I-rule chain* とは、*sequent* の有限列 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ $(n \geq 1)$ の出現であり、次のように定義される。

1. F_1 は、*I-rule* [13]の結論である。
2. F_i $(2 \leq i \leq n)$ は、前提が F_{i-1} である推論規則 P, O, C いずれかの結論である。

定義 5.10 (cut) FR' の証明の *cut* とは、*I-rule chain* $F_1, F_2, \cdots, F_n$ $(n \geq 1)$ の最後の *sequent* が *E-rule*[14]の *major premise* [15]となるものである。

cut の定義から、*cut* を構成する *sequent* の左辺の式はすべて同じ式である。この式の複雑さをその *cut* の複雑さと呼ぶ。 ■

次に証明の標準形を定義する。

定義 5.11 (標準形証明) RAA で *discharge* される式[16]が否定リテラル[17]のみであり、*cut* を含まない証明を標準形証明と呼ぶ。 ■

以下では、FR' のすべての定理は標準形証明で証明可能であることを示す。はじめに、これを証明するために必要な補題をいくつか証明する。

補題 5.3 FR' において、*sequent* F が証明可能ならば、RAA によって *discharge* される式が否定リテラルのみである *sequent* F の証明が存在する。 ■

次に、FR' において、RAA によって discharge される式が否定リテラルのみである証明が存在する場合、この性質を満たし、cut が存在しない同じ結論を持つ証明が存在することを示す。そのために、定義と補題を与える。

定義 5.12 (標準化数) x を証明に含まれる *cut* の複雑さの最大値、y を複雑さ最大の *cut* の個数とする。このとき、$x \cdot \omega + y$ をその証明の標準化数と呼ぶ。ここで、ω は超限数である。 ■

[13] $\wedge I$, $\vee I1$, $\vee I2$, $\rightarrow I$, $\neg I$, $\vee D5$ のこと。
[14] $\wedge E1$, $\wedge E2$, $\rightarrow E$, $\vee E$, $\neg E$ のこと。
[15] $\wedge E1$ や $\wedge E2$ の $\gamma \vdash A \wedge B_a$、$\rightarrow E$ の $\gamma \vdash A \rightarrow B_a$、$\neg E$ の $\gamma \vdash \neg A_a$、$\vee E$ の $\gamma \vdash A \vee B_a$ のこと。
[16] $\rightarrow I$, $\neg I$, RAA で discharge される Rank 式が $A_{\{k\}}$ であるときの A のこと。
[17] 原子命題に否定が付いている式

補題 5.4 $\psi \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までに利用される推論規則が k 個である部分証明が存在し、π^1, π^2 を *Rank* 集合が同じであるメタ *Rank* 式の *multiset* とする。$\pi^1 \cup \pi^2$ が ψ に出現するならば、ψ から π^2 を除去したものを $\psi^\dagger$ とすると、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が k 個以下である部分証明が存在し、この部分証明の標準化数は、$\psi \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ の部分証明よりも多くなることはない。ここで、$\mathcal{A}$ は式または空を示す。 ■

以上のことより、次の補題が証明される。

補題 5.5 FR' の定理は標準形証明で証明可能である。 ■

5.4 FR' と ER の対応

ここでは、FR' のすべての標準形証明には、対応する ER の証明が存在することを示し、FR の定理が ER の定理でもあることを証明する。これより、FR の定理が ER の定理であることがいえる。さらに ER の定理となるが FR の定理ではない式の存在を示し、ER が FR より真に強い体系であることを示す。

はじめに、FR' との比較のため、ER から $\vee E1$, $\vee E2$, $\vee E3$ を取り除き、次の推論規則 $C4$ を追加した体系を ER' とする。

$$\frac{\gamma, \neg A : r, \neg A : e \vdash B : \varphi}{\gamma, \neg A : r \vdash B : \varphi}\ C4$$

ここで、次の補題が成り立つ。

補題 5.6 ER' で証明可能な式は、ER において証明可能である。 ■

以下では、FR' で証明可能な sequent に対応する ER の sequent が ER' で証明可能であることを示す。

定義 5.13 メタ *Rank* 式の *multiset* γ に対して、γ^* を以下のように帰納的に定義される属性式の *multiset* とする。

1. $\{A_a\}^* = \{A : e\}$ 　　(A_a は *Rank* 式)
2. $\{\delta_a\}^* = \delta^*$ 　　(δ_a はメタ *Rank* 式)
3. $\{\langle \pi^1 | \pi^2 \rangle_1\}^* = \{\langle \pi^1 | \pi^2 \rangle_2\}^* = \pi^{1*} \cup \pi^{2*}$
4. $\{\langle \pi^1 | \pi^2 | A_a \rangle_4\}^* = \pi^{1*} \cup \pi^{2*} \cup \{\neg A : e\}$
5. $(\delta^1 \cup \delta^2)^* = \delta^{1*} \cup \delta^{2*}$ ■

補題 5.7 FR' で $\gamma \vdash A_a$ が標準形証明が存在するならば、ER' で $\gamma^* \vdash A : \varphi$ が証明可能となる属性値 φ が存在し、$\gamma \vdash A_a$ が *I-rule chain* の構成要素でなければ、φ は i ではない。また、FR' で $\gamma \vdash_a$ の標準形証明が存在するならば、ER' で $\gamma^* \vdash$ が証明可能となる。■

以上より、次の補題がいえる。

補題 5.8 FR の定理は ER の定理である。 ■

また、ER において $A \to (B \to (A \wedge B))$ は定理であるが、FR の定理ではない [Anderson75]。よって、次の定理が成り立つ。

定理 5.9 ER は FR より真に強い体系である。 ■

6 おわりに

本稿では、適切さの論理 ER を提案し、この体系では、関連性・恒真性の違和感が除去されていることを示した。また、適切さの論理 ER が同程度に違和感が除去されている代表的な体系 R よりも真に強い体系であることを示した。

適切さの論理では、違和感を除去するために、$A \to (B \to A \wedge B)$ などの違和感を含まずかつ古典論理において定理となる式のいくつかが定理とはならず、必要以上に体系が弱くなることが多い。しかし、ER が R よりも真に強い体系であることから、ER は R よりも必要以上に弱い体系ではなく、違和感を含まないと考えられる式を極力定理としている。また、違和感を含む式は定理とならないことから、人間の演繹的な推論の形式化の手段として、有効であると考えられる。

今後の課題としては、ER の意味論の構築などがあげられる。

参考文献

[Ackermann56] Ackermann W.:Begründung einer strenger Implikation, Journal of symbolic logic, Vol.21, pp.113–128 (1956).

[Anderson75] Anderson and Belnap:Entailment. The logic of relecance and necessity, Princeton University Press (1975).

[Cheng96] Jingde Cheng:The Fundamental Role of Entailment in Knowledge Representation and Reasoning, Journal of Computing and Information, Vol.2, No.1, pp.853–873 (1996).

[Church51] Church, A.:The weak theory of implication (1951).

[Dummett77] Dummett, M:Elements of Intuitionism, Oxford U.P. (1977).

[Hallden48] S. Hallden:A note concerning the paradoxes of strict implication and Lewis's system S1, Journal of Symbolic Logic, Vol.13, pp.138–139 (1948).

[Lewis32] Lewis, C.I. and Langford, C.M.:Symbolic Logic, The Century Co. (1932).

[三浦 81] 三浦聡，大浜茂生，春藤修二訳:様相論理入門, 恒星社厚生閣 (1981).

[Moh50] Moh, Shaw Kwei:The deduction theorems and two new logical systems, Methodos, Vol.2, pp.56–75 (1950).

[Ross96] Ross T. Brady:Relevant Implication and the Case for a Weaker Logic, Journal of philosophical logic, Vol.25, pp.151–183 (1996).

[沢村 89] 沢村 一:適切さの論理, 情報処理, Vol.30, pp.665–673 (1989).

[杉原 75] 杉原 丈夫:非古典論理学, 槇書店 (1975).

[Troelstra88] A.S. Troelstra and D. van Dalen, Constructivism in mathematics An Introduction Vol.2, 1988

[Gabbay96] Dov M.Gabbay, Labelled Deductive Systems, Vol 1, Oxford Logic Guides 33, Oxford U.P., 1996

[Gabbay86] D.Gabbay and F.Guenthner (eds.), Handbook of philosophical logic, Vol.3, pp.150-180, 1986

[McRobbie79] McRobbie, M.A. and Belnap, N. D., Jr. Relevant analytic tableaux, Studia logic, vol.38, pp.188-200, 1979

[Ross91] Ross T. Brady, Gentzenization and Decidability of Some Contraction-Less Relevant Logic, Journal of Philosophical Logic, Vol. 20, page 97-118, 1991

[Smullyan68] Smullyan, R.M. First-order logic, Berlin (Springer-Verlag), 1968

[Urquhart84] Urquhart, A., The Undecidability of Entailment and Relevant Implication, Journal of Philosophical Logic, Vol 49, page 1059-1073, 1984

付 録

補題 4.1 の証明: 証明の構造に関する帰納法で証明を行う。

1. 公理
   明らかに成り立つ。
2. RAA
   (1) 題意の (1) の (a) が成り立つことを証明する。
   $\neg P : r \in \Gamma$ とする。帰納法の仮定より、次のいずれかが成り立つ。
   i. $P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が $\Gamma \cup \{\neg A : r\}$ に存在する。
   ii. $\Gamma \cup \{\neg A : r\} = \{P : e, \neg P : r\}$ となる。
   ここで、$\neg P : r \in \Gamma$ であるから、$\Gamma \cup \{\neg A : r\}$ には、属性値が r であるものが 2 つ以上含まれるので、ii. は成り立たない。よって、$P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在する。
   (2) 題意の (1) の (b) が成り立つことを証明する。
   帰納法の仮定より、$A \sqsubset P$ となる $P : e$ が $\Gamma \cup \{\neg A : r\}$ に存在するか、$\Gamma \cup \{\neg A : r\} = \{A : e, \neg A : r\}$ となる。前者の場合には、$P : e$ が Γ に存在する。後者の場合には、この推論規則の結論が $A : e \vdash A : e$ となるので、題意の (1) の (b) が成り立つ。

3. $\wedge I, \vee I1, \vee I2, \wedge E1, \wedge E2$
帰納法の仮定より明らか。
4. $\vee E1, \vee E2, \vee E3, \vee E4$
$\vee E1$ について証明を行う。他の規則に付いても同様に証明可能である。
(1) 題意の (1) の (a) が成り立つことを証明する。
$\neg P : r \in \Gamma \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ とする。帰納法の仮定より、$P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が $\Gamma \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ に存在し、題意の (1) の (a) が成り立つ。
(2) 題意の (1) の (b) が成り立つことを証明する。
帰納法の仮定より、次のいずれかが成り立つ。
i. $C \sqsubset P$ となる $P : e$ が $\Delta_1 \cup \{A : e\}$ に存在する。
ii. $\Delta_1 \cup \{A : e\} = \{C : e\}$ である。
i. の場合、$P : e$ が $A : e$ でなければ、$P : e$ は $\Gamma \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ に存在する。また、$P : e$ が $A : e$ ならば、帰納法の仮定より、$A \vee B \sqsubseteq Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在し、$C \sqsubset Q$ となる。よって、題意の (1) の (b) が成り立つ。ii. の場合、$\Delta \vdash C : e$ は $A : e \vdash A : e$ である。帰納法の仮定より、$A \vee B \sqsubseteq Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在し、$A \sqsubset Q$ となり、題意の (1) の (b) が成り立つ。
5. $\to I$
$\neg P : r \in \Gamma$ とする。帰納法の仮定より、次のいずれかが成り立つ。
(1) $P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が $\Gamma \cup \{A : e\}$ に存在する。
(2) $P \sqsubset B$ となる。
(3) B が $\neg P$ である。
(a) の場合、Q が A ならば、$P \sqsubset A \to B$ であり、題意の (2) の (b) が成り立ち、Q が A でなければ、$Q : e$ が Γ に存在し、題意の (2) の (a) が成り立つ。(b) や (c) の場合、$P \sqsubset A \to B$ となり、題意の (2) の (b) が成り立つ。
6. $\to E$
(1) 題意の (1) の (a) が成り立つことを証明する。
$\neg P : r \in \Gamma \cup \Delta$ とする。$\neg P : r \in \Gamma$ ならば、帰納法の仮定より、$P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在し、題意の (1) の (a) が成り立つ。
$\neg P : r \in \Delta$ ならば、φ が e, i である場合、帰納法の仮定より、次のいずれかが成り立つ。
i. $P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Δ に存在する。
ii. $P \sqsubset A$ となる。
iii. A が $\neg P$ となる。
i. の場合、題意の (1) の (a) が成り立つ。それ以外の場合、帰納法の仮定より、$A \to B \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Γ に存在し、$P \sqsubset R$ であるから、題意の (1) の (a) が成り立つ。
φ が r である場合、帰納法の仮定より、$\Delta \vdash A : \varphi$ は、$\neg P : r \vdash \neg P : r$ であり、A は $\neg P$ である。また、帰納法の仮定より、$\neg P \to B \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Γ に存在し、$P \sqsubset R$ となるので、題意の (1) の (a) が成り立つ。
(2) 題意の (1) の (b) が成り立つことを証明する。
帰納法の仮定より、$A \to B \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Γ に存在する。よって、$B \sqsubset R$ となり、題意の (1) の (b) が成り立つ。
7. $\neg E1$
$\neg P : r \in \Gamma \cup \Delta$ とする。$\neg P : r \in \Gamma$ である場合、φ が e, i ならば、帰納法の仮定より、次のいずれかが成り立つ。
(1) $P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在する。
(2) $P \sqsubset A$ となる。
(3) A が $\neg P$ となる。
(a) の場合、題意の (4) が成り立つ。それ以外の場合、帰納法の仮定より、$\neg A \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Δ に存在し、$P \sqsubset R$ となるので、題意の (4) が成り立つ。
φ が r ならば、$\Gamma \vdash A : \varphi$ は、$\neg P : r \vdash \neg P : r$ となり、A は $\neg P$ である。ここで、帰納法の仮定より、$\neg A \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Δ に存在する。よって、$\neg\neg P \sqsubseteq R$ であり、$P \sqsubset R$ となる $R : e$ が $\Gamma \cup \Delta$ に存在し、題意の (4) が成り立つ。
$\neg P : r \in \Delta$ である場合、帰納法の仮定より、$\neg P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Δ に存在する。よって、$Q : e$ は $\Gamma \cup \Delta$ にも存在し、題意の (4) が成り立つ。
8. $\neg E2$
$\neg P : r \in \Gamma \cup \{\neg A : r\}$ とする。$\neg P : r \in \Gamma$ である場合、帰納法の仮定より、$P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在し、題意の (4) が成り立つ。$\neg P : r$ が $\neg A : r$ である場合、帰納法の仮定より、$A \sqsubset R$ となる $R : e$ が Γ に存在するか、$\Gamma = \{A : e\}$ である。$R : e$ が存在するならば、$P \sqsubset R$ となる $R : e$ が Γ に存在し、$\Gamma = \{A : e\}$ ならば、$\Gamma, \Delta \vdash$ は、$A : e, \neg A : r \vdash$ であるから、いずれの場合も題意の (4) が成り立つ。
9. $\neg I$
$\neg P : r \in \Gamma$ とする。帰納法の仮定より、次のいずれかが成り立つ。
(1) $P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が $\Gamma \cup \{A : e\}$ に存在する。
(2) $\Gamma \cup \{A : e\} = \{\neg P : r, P : e\}$ である。
(a) の場合、Q が A でなければ、$Q : e$ が Γ に存在し、題意の (2) の (a) が成り立つ。Q が A なら

ば、$P \sqsubset \neg A$ であり、題意の (2) の (b) が成り立つ。(b) の場合、P は A であり、この推論規則の結論は、結論は、$\neg A : r \vdash \neg A : i$ となり、題意の (2) の (c) が成り立つ。

10. $EM1, EM2$
   $EM1$ について証明を行う。$EM2$ についても同様に証明可能である。
   φ は r であると仮定すると、$\Gamma, \neg A : e \vdash B : \varphi$ は、帰納法の仮定より、$B : r \vdash B : r$ となるが、これはあり得ないので、φ は e または i である。ここで、$\neg P : r \in \Gamma$ とすると、次のいずれかが成り立つ。
   (1) $P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が $\Gamma \cup \{\neg A : e\}$ に存在する。
   (2) $P \sqsubset B$ となる。
   (3) B が $\neg P$ となる。
   (a) の場合、$Q : e$ が $\neg A : e$ でなければ、$Q : e$ は Γ に存在し、題意の (2) の (a) が成り立つ。$Q : e$ が $\neg A : e$ ならば、$P \sqsubset \neg A$ であり、$P \sqsubset A \vee B$ となるから、題意の (2) の (b) が成り立つ。また、(b) や (c) の場合、$P \sqsubset A \vee B$ であり、題意の (2) の (b) が成り立つ。

11. $DS1, DS2$
   $DS1$ について証明を行う。$DS2$ についても同様に証明可能である。
   (1) 題意の (1) の (a) が成り立つことを証明する。
      $\neg P : r \in \Gamma \cup \Delta$ とする。$\neg P : r \in \Gamma$ ならば、帰納法の仮定より、$P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が Γ に存在し、題意の (1) の (a) が成り立つ。
      $\neg P : r \in \Delta$ ならば、帰納法の仮定より、次のいずれかが成り立つ。
      i. $P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が $\Delta \cup \{A : e\}$ に存在する。
      ii. $\Delta \cup \{A : e\} = \{P : e, \neg P : r\}$ である。
      i. の場合、$Q : e$ が $A : e$ でなければ、$Q : e$ は Δ に存在し、題意の (1) の (a) が成り立つ。$Q : e$ が $A : e$ ならば、帰納法の仮定より $A \vee B \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Γ に存在し、$P \sqsubset R$ となるので、題意の (1) の (a) が成り立つ。ii. の場合、P は A であり、また、帰納法の仮定より、$A \vee B \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Γ に存在するので、$P \sqsubset R$ となる $R : e$ が $\Gamma \cup \Delta$ に存在し、題意の (1) の (a) が成り立つ。
   (2) 題意の (1) の (b) が成り立つことを証明する。
      帰納法の仮定より、$A \vee B \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Γ に存在する。よって、$B \sqsubset R$ となる $R : e$ が $\Gamma \cup \Delta$ に存在する。

12. $C1, C2, C3$
   $C3$ について証明を行う。他の推論規則についても同様に証明可能である。$\Gamma, \neg A : e, \neg A : r \vdash$ において、帰納法の仮定より、$A \sqsubset S$ となる $S : e$ が $\Gamma \cup \{\neg A : e, \neg A : r\}$ に存在するか、$\Gamma \cup \{\neg A : e, \neg A : r\} = \{A : e, \neg A : r\}$ となる。後者はありえないので、$S : e$ が $\Gamma \cup \{\neg A : e, \neg A : r\}$ に存在する。ここで、S は $\neg A$ ではないので、$S : e$ は Γ に存在する。
   $\neg P : r \in \Gamma \cup \{\neg A : r\}$ とする。帰納法の仮定から次のいずれかが成り立つ。
   (1) $P \sqsubset Q$ となる $Q : e$ が $\Gamma \cup \{\neg A : e, \neg A : r\}$ に存在する。
   (2) $\Gamma \cup \{\neg A : e, \neg A : r\} = \{\neg P : r, P : e\}$ となる。
   $\Gamma \cup \{\neg A : e, \neg A : r\}$ には $S : e$ が存在するので、要素数は 3 以上であり、(b) が成り立つことはない。よって、(a) が成り立ち、$Q : e$ が $\Gamma \cup \{\neg A : e, \neg A : r\}$ に存在する。Q が $\neg A$ ではない場合、$Q : e$ は $\Gamma \cup \{\neg A : r\}$ に存在するので、題意の (4) が成り立つ。Q が $\neg A$ である場合、$P \sqsubset A$ であり、また、$A \sqsubset S$ であるから、$P \sqsubset S$ となる $S : e$ が $\Gamma \cup \{\neg A : r\}$ に存在する。 ■

補題 4.2 の証明: 証明の構造に関する帰納法で証明を行う。

1. 公理
   明らかに成り立つ。
2. $\wedge I$, $\wedge E1$, $\wedge E2$, $\vee I1$, $\vee I2$, $\to I$, $\neg I$, RAA, $\neg E2$, $EM1$, $EM2$
   帰納法の仮定より、明らかに成り立つ。
3. $\vee E1, \vee E2, \vee E3, \vee E4$
   $\vee E1$ について証明を行う。他の規則についても同様に証明可能である。帰納法の仮定より、Γ^e,$\Delta_1^e \cup \{A\}$,$\Delta_2^e \cup \{B\}$ はそれぞれ連結している。ここで、補題 4.1 より、$A \vee B \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Γ に存在するので、$(\Gamma \cup \Delta_1 \cup \Delta_2)^e$ は連結している。また、補題 4.1 より、$C \sqsubseteq S$ となる S が $\Delta_1^e \cup \{A\}$ に存在するから、$(\Gamma \cup \Delta_1 \cup \Delta_2)^e \cup \{C\}$ は連結している。
4. $\to E$
   φ が e, i である場合、帰納法の仮定より、$\Delta^e \cup \{A\}$ は連結している。また、Γ^e も連結しており、さらに補題 4.1 より、$A \to B \sqsubseteq R$ となる $R : e$ が Γ に存在する。よって、$(\Gamma \cup \Delta)^e$ と $(\Gamma \cup \Delta)^e \cup \{B\}$ は連結している。また、φ が r である場合、補題 4.1 より、$\Delta \vdash A : \varphi$ は、$\neg A : r \vdash \neg A : r$ となる。

このとき、$(\Gamma\cup\Delta)^e, (\Gamma\cup\Delta)^e\cup\{B\}$ は連結している。

5. $\neg E1$
φ が e, i ならば、帰納法の仮定より、$\Gamma^e\cup\{A\}$ が連結している。また、補題4.1より $\neg A\sqsubseteq R$ となる $R:e$ が Δ に存在し、帰納法の仮定より Δ^e が連結している。以上のことより、$(\Gamma\cup\Delta)^e$ は連結している。
また、φ が r ならば、補題4.1より、$\Gamma\vdash A:\varphi$ は、$A:r\vdash A:r$ であり、$\Gamma=\{A:r\}$ である。帰納法の仮定から Δ^e は連結しているので、$(\Gamma\cup\Delta)^e$ は連結している。

6. $DS1, DS2$
$DS1$ について証明を行う。$DS2$ についても同様に証明可能である。
帰納法の仮定より、$\Gamma^e, \Delta^e\cup\{A\}$ は連結している。また、補題4.1より、$A\vee B\sqsubseteq R$ となる $R:e$ が Γ に存在する。よって、$(\Gamma\cup\Delta)^e$ と $(\Gamma\cup\Delta)^e\cup\{B\}$ は連結している。

7. $C1, C2, C3$
$C2$ について証明を行う。他の規則についても同様に証明可能である。
ϕ について場合わけを行う。
(1) ϕ が e である場合
帰納法の仮定より、$(\Gamma\cup\{A:\varphi, A:\varphi\})^e$ と $(\Gamma\cup\{A:\varphi, A:\varphi\})^e\cup\{B\}$ は連結している。よって、$(\Gamma\cup\{A:\varphi\})^e$ と $(\Gamma\cup\{A:\varphi\})^e\cup\{B\}$ は連結している。
(2) ϕ が i である場合
帰納法の仮定より、$(\Gamma\cup\{A:\varphi, A:\varphi\})^e\cup\{B\}$ は連結している。よって、$(\Gamma\cup\{A:\varphi\})^e\cup\{B\}$ は連結している。
(3) ϕ が r である場合
補題4.1より、ϕ が r ならば、左辺は単一の属性式からなる。よって、この場合はあり得ない。

補題 4.3 の証明: P を ER の定理とする。P の証明の結論が $\vdash P:e$ であると仮定すると、補題4.1より、$P\sqsubseteq Q$ となる $Q:e$ がこの sequent の左辺に存在する必要がある。しかし、左辺は空であるから、これは矛盾する。よって、$\vdash P:e$ は結論ではない。

P の証明の結論が $\vdash P:r$ であると仮定すると、補題4.1より、この sequent の左辺には、$P:r$ が存在する必要があるが、左辺は空であるから、これは矛盾する。よって、$\vdash P:r$ が結論となることはあり得ない。

以上より、P が ER の定理ならば、その証明の結論は $\vdash A:i$ である。 ■

補題 4.4 の証明: 推論規則が定理の最終推論規則となるためには、その推論規則の結論の sequent の左辺が空となる必要がある。よって、公理や $C1, C2, C3$ は最終推論規則とはならない。また、補題4.3より、定理 P の証明の結論は $\vdash P:i$ なので、結論の sequent の右辺の属性値が i とならない推論規則 $\wedge E1, \wedge E2, \vee E1, \rightarrow E, RAA, DS1, DS2$ は、最終推論規則とはならない。また、右辺が空である推論規則 $\vee E4, \neg E1, \neg E2$ は最終推論規則とはならない。

$\vee E2$ が最終推論規則であると仮定した場合、証明は次のようになる。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdash A\vee B:e\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\\ A:e\vdash P:i\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\\ B:e\vdash P:\varphi\end{array}}{\vdash P:i}\ \vee E2$$

この証明の途中で、$\vdash A\vee B:e$ が証明されるが、補題4.3より、これは矛盾する。よって、$\vee E2$ は最終推論規則とはならない。同様に、$\vee E3$ も最終推論規則とはならない。 ■

補題 4.5 の証明: $\Gamma\vdash A\rightarrow B:i$ が証明可能である場合、最終推論規則は、右辺の属性式の形から $\rightarrow I, \vee E2, \vee E3, C2$ のいずれかである。よって、$\Gamma'\vdash A\rightarrow B:i$ の最終推論規則が $\rightarrow I, \vee E2, \vee E3$ のいずれかである次のような証明が存在する。

$$\begin{array}{l}\Gamma'\vdash A\rightarrow B:i\\ \quad\vdots\ C2\ \text{を 0 回以上利用して}\\ \Gamma\vdash A\rightarrow B:i\end{array}$$

ここで、$\vee E2, \vee E3$ が最終推論規則であると仮定すると、補題4.1より $C\vee D\sqsubseteq P$ となる $P:e$ が Γ' に存在するが、Γ' は原始命題からなる属性式しか含まないので、これは成り立たない。よって、$\vee E2, \vee E3$ は最終推論規則とはならない。

よって、$\rightarrow I$ が最終推論規則となり、次の証明が存在する。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma', A:e\vdash B:\varphi\end{array}}{\Gamma'\vdash A\rightarrow B:i}\rightarrow I$$

以上より、題意が成り立つことが証明された。 ■

定理 4.6 の証明: $A\rightarrow B$ の証明における最終推論規則は、補題4.4と式の形から、$\rightarrow I$ であり、証明は次のようになる。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A:e\vdash B:\varphi\end{array}}{\vdash A\rightarrow B:i}\rightarrow I$$

ここで、補題4.1より $A\sim B$ となる。 ■

定理 4.7 の証明: $\vdash A\rightarrow(B_1\rightarrow\cdots B_n\rightarrow A)\cdots):i$ が証明可能であると仮定する。補題4.5を繰り返し適

用することにより、$A:e, B_1:e, \cdots B_n:e \vdash A:\varphi$ が証明可能であることがいえる。ここで、A が原始命題であることより、φ は i ではなく、また、補題 4.1 より、φ は r ではない。よって φ は e であり、補題 4.2 から、$\{A, B_1, \cdots, B_n\}$ は連結している。しかし、A は $B_1, \cdots, B_n$ と異なる原始命題であるから、これはあり得ない。よって、$\vdash A \rightarrow (B_1 \rightarrow \cdots B_n \rightarrow A)\cdots) : i$ は証明不能であり、$A \rightarrow (B_1 \rightarrow \cdots B_n \rightarrow A)\cdots)$ は定理ではない。 ■

定理 4.8 の証明: 定理 4.6 より明らか。 ■

補題 5.1 の証明: 以下では、FR の証明の構造に関する帰納法によって証明を行う。

1. Hyp
   sequent 型の対応する証明として、$A_{\{k\}} \vdash A_{\{k\}}$ がある。
2. Rep, $\wedge E$, $\vee I$, $\rightarrow I$
   帰納法の仮定から明らか。
3. $\wedge I$
   FR において、A_a と B_a が証明可能とする。これらの証明の仮定の集合は、FR の証明の定義より同じであるから、これを γ とすると、帰納法の仮定より、FR' において $\gamma \vdash A_a$ と $\gamma \vdash B_a$ が証明可能である。ここで、$\gamma \vdash A_a$ の証明で $\rightarrow I$, $\neg I$, RAA で discharge される Rank 式に含まれる自然数 x が $\gamma \vdash B_a$ の証明に出現する場合、$\gamma \vdash A_a$ の証明における x の出現を、証明に現れない自然数で置換する。同様のことを、$\gamma \vdash B_a$ の証明に対しても行う。これより、以下に示す $\gamma \vdash A \wedge B_a$ の証明が得られる。
$$\begin{array}{c} \dfrac{\gamma \vdash A_a \quad \gamma \vdash B_a}{\gamma, \gamma \vdash A \wedge B_a}\,\wedge I \\ \vdots\ C\text{ を用いて} \\ \gamma \vdash A \wedge B_a \end{array}$$
4. $\rightarrow E$
   FR において、$A \rightarrow B_a$ と A_b が証明可能であり、これらの証明の仮定の集合を γ, δ とする。このとき、帰納法の仮定より、FR' において $\gamma \vdash A \rightarrow B_a$ と $\delta \vdash A_b$ が証明可能である。ここで、$\gamma \vdash A \rightarrow B_a$ の証明において $\rightarrow I$, $\neg I$, RAA で discharge される Rank 式に含まれる自然数 x が $\delta \vdash A_b$ の証明に出現する場合、$\gamma \vdash A \rightarrow B_a$ の証明における x の出現を、証明に現れない自然数で置換する。同様のことを、$\delta \vdash A_b$ の証明に対しても行う。これより、以下に示す $\gamma, \delta \vdash B_{a \cup b}$ の証明が得られる。
$$\dfrac{\gamma \vdash A \rightarrow B_a \quad \delta \vdash A_b}{\gamma, \delta \vdash B_{a \cup b}} \rightarrow E$$
5. $\neg E$
   FR において、$\neg A_a$ と $B \rightarrow A_b$ が証明可能であり、これらの証明の仮定の集合を γ, δ とする。このとき、帰納法の仮定より、FR' において $\gamma \vdash \neg A_a$ と $\delta \vdash A \rightarrow B_b$ が証明可能である。ここで、$\gamma \vdash \neg A_a$ の証明において $\rightarrow I$, $\neg I$, RAA で discharge される Rank 式に含まれる自然数 x が $\delta \vdash B \rightarrow A_b$ の証明に出現する場合、$\gamma \vdash \neg A_a$ の証明における x の出現を、証明に現れない自然数で置換する。同様のことを、$\delta \vdash B \rightarrow A_b$ の証明に対しても行う。これより、証明に出現していない自然数 k を用いて、以下に示す $\gamma, \delta \vdash \neg B_{a \cup b}$ の証明が得られる。
$$\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \neg A_a \quad \dfrac{\delta \vdash B \rightarrow A_b \quad B_{\{k\}} \vdash B_{\{k\}}}{\gamma, B_{\{k\}} \vdash A_{b \uplus \{k\}}} \rightarrow E}{\gamma, \delta, B_{\{k\}} \vdash_{(a \cup b) \uplus \{k\}}}\,\neg E}{\gamma, \delta \vdash \neg B_{a \cup b}}\,\neg I$$
6. $\neg I$
   FR において、$A \rightarrow \neg A_b$ が証明可能であり、このときの仮定の集合を γ とすると、帰納法の仮定より、FR' において $\gamma \vdash A \rightarrow \neg A_a$ が証明可能である。よって、証明に出現していない自然数 k を用いて、以下に示す $\gamma \vdash \neg A_a$ の証明が得られる。
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash A \rightarrow \neg A_a \quad A_{\{k\}} \vdash A_{\{k\}}}{\gamma, A_{\{k\}} \vdash \neg A_{a \uplus \{k\}}} \rightarrow E \quad A_{\{k\}} \vdash A_{\{k\}}}{\gamma, A_{\{k\}}, A_{\{k\}} \vdash_{a \uplus \{k\}}}\,\neg E}{\gamma, A_{\{k\}} \vdash_{a \uplus \{k\}}}\,C}{\gamma \vdash \neg A_a}\,\neg I$$
7. $\neg\neg I$
   FR において、A_a が証明可能であり、このときの証明の仮定の集合を γ とすると、帰納法の仮定より、FR' において $\gamma \vdash A_a$ が証明可能である。これより、証明に出現していない自然数 k を用いて、以下に示す $\gamma \vdash \neg\neg A_a$ の証明が得られる。
$$\dfrac{\dfrac{\neg A_{\{k\}} \vdash \neg A_{\{k\}} \quad \gamma \vdash A_a}{\gamma, \neg A_{\{k\}} \vdash_{a \uplus \{k\}}}\,\neg E}{\gamma \vdash \neg\neg A_a}\,\neg I$$
8. $\neg\neg E$
   FR において、$\neg\neg A_a$ か証明可能であり、このときの証明の仮定の集合を γ とすると、帰納法の仮定より、FR' において $\gamma \vdash \neg\neg A_a$ が証明可能である。これより、証明に出現していない自然数 k を用いて、以下に示す $\gamma \vdash A_a$ の証明が得られる。
$$\dfrac{\dfrac{\gamma \vdash \neg\neg A_a \quad \neg A_{\{k\}} \vdash \neg A_{\{k\}}}{\gamma, \neg A_{\{k\}} \vdash_{a \uplus \{k\}}}\,\neg E}{\gamma \vdash A_a}\,RAA$$
9. $\vee E$

FR において、$A \vee B_a$ と $A \to C_b$ と $B \to C_b$ が証明可能とする。FR の証明の定義から $A \to C_b$ と $B \to C_b$ の仮定の集合は同じである。$A \vee B_a$ の証明の仮定の集合を γ、$A \to C_b$ と $B \to C_b$ の証明の仮定の集合を δ とすると、帰納法の仮定より、FR' において、$\gamma \vdash A \vee B_a$、$\delta \vdash A \to C_b$、$\delta \vdash B \to C_b$ が証明可能である。ここで、$\gamma \vdash A \vee B_a$ の証明において $\to I, \neg I, RAA$ で discharge された Rank 式に含まれる自然数 x が $\delta \vdash A \to C_b$ や $\delta \vdash B \to C_b$ の証明に出現する場合、$\gamma \vdash A \vee B_a$ の証明における x の出現を、証明に現れない自然数で置き換える。同様のことを、$\delta \vdash A \to C_b$ や $\delta \vdash B \to C_b$ の証明に対しても行う。これにより、図 10 のように、証明に出現していない自然数 k, l, p, q を用いて、$\gamma, \delta \vdash C_{a \cup b}$ の証明が得られる。

10. $\wedge \vee$
    FR において $A \wedge (B \vee C)_a$ が証明可能であるとする。ここで、帰納法の仮定より、FR' において、$\gamma \vdash A \wedge (B \vee C)_a$ が証明可能である。これより、証明に出現していない自然数 k, p, q を用いて、図 11 のように $\gamma \vdash A \wedge B \vee C_a$ の証明が得られる。

補題 5.2 の証明: FR で A が定理ならば、$A_\emptyset$ が証明される。このとき、補題 5.1 より、$\vdash A_\emptyset$ が FR' において証明される。よって、A は FR' の定理である。■

補題 5.3 の証明: はじめに、否定リテラルではない式を discharge する RAA が、結論の導出だけで利用されている証明には、同じ結論を持ち、RAA で discharge される式が否定リテラルでのみである証明が存在することを、RAA で discharge される式の構造に関する帰納法によって証明する。

1. $\neg(F \wedge G)_{\{k\}}$ が discharge される場合
   このとき、公理により $\neg(F \wedge G)_{\{k\}} \vdash \neg(F \wedge G)_{\{k\}}$ が導入されている。その公理を、証明で出現していない自然数 p, l を用いた以下の証明で置き換える。なお、l は置き換えごとに、異なるものを利用する。

$$\dfrac{\dfrac{\neg F_{\{p\}} \vdash \neg F_{\{p\}} \qquad \dfrac{F \wedge G_{\{l\}} \vdash F \wedge G_{\{l\}}}{F \wedge G_{\{l\}} \vdash F_{\{l\}}}\,\wedge E1}{\neg F_{\{p\}}, F \wedge G_{\{l\}} \vdash_{\{p,l\}}}\,\neg E}{\neg F_{\{p\}} \vdash \neg(F \wedge G)_{\{p\}}}\,\neg I$$

   これにより、$\gamma, \neg(F \wedge G)_{\{k\}} \vdash_{c \uplus \{k\}}$ の証明から、$\gamma, \neg F_{\{p\}} \vdash_{c \uplus \{p\}}$ の証明が得られ、同様に $\gamma, \neg G_{\{q\}} \vdash_{c \uplus \{q\}}$ の証明も得られる。よって、これらの証明から次の証明を構成できる。

$$\dfrac{\dfrac{\gamma, \neg F_{\{p\}} \vdash_{c \uplus \{p\}}}{\gamma \vdash F_c}\,RAA \qquad \dfrac{\gamma, \neg G_{\{q\}} \vdash_{c \uplus \{q\}}}{\gamma \vdash G_c}\,RAA}{\gamma, \gamma \vdash F \wedge G_c}\,\wedge I$$
$$\vdots \ C \text{ を何回か用いて}$$
$$\gamma \vdash F \wedge G_c$$

   帰納法の仮定より、RAA で discharge される式が否定リテラルのみである $\gamma \vdash F_c$ と $\gamma \vdash G_c$ の証明が存在する。よって、$\gamma \vdash F \wedge G_c$ には、RAA で discharge される式が否定リテラルのみである証明が存在する。

2. $\neg(F \to G)_{\{k\}}$ が discharge される場合
   このとき、公理により $\neg(F \to G)_{\{k\}} \vdash \neg(F \to G)_{\{k\}}$ が導入されている。この公理を、証明で出現していない自然数 f, g, l を用いた以下の証明で置き換える。なお、l は置き換えごとに、異なるものを利用する。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg G_{\{g\}} \vdash \neg G_{\{g\}} \qquad \dfrac{F \to G_{\{l\}} \vdash F \to G_{\{l\}} \qquad F_{\{f\}} \vdash F_{\{f\}}}{F_{\{f\}}, F \to G_{\{l\}} \vdash G_{\{f,l\}}}\,\to E}{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}}, F \to G_{\{l\}} \vdash_{\{f,g,l\}}}\,\neg E}{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}} \vdash \neg(F \to G)_{\{f,g\}}}\,\neg I}{\{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash \neg(F \to G)_{\{k\}}}\,P$$

   これより、$\gamma, \neg(F \to G)_{\{k\}} \vdash_{e \uplus \{k\}}$ の証明から、$\gamma, \{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash_{e \uplus \{k\}}$ の証明が得られる。ただし、$\gamma, \neg(F \to G)_{\{k\}} \vdash_{e \uplus \{k\}}$ の証明において、推論規則 C により、$\neg(F \to G)_{\{k\}}, \neg(F \to G)_{\{k\}}$ が $\neg(F \to G)_{\{k\}}$ に置換される場合、
   $\gamma, \{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash_{e \uplus \{k\}}$ の証明では、推論規則 C を複数回利用することにより、
   $\{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}}, \{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}}$ を $\{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}}$ に置換する。
   $\gamma, \{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash_{e \uplus \{k\}}$ の証明から、以下のように $\gamma \vdash F \to G_e$ が証明可能である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma, \{F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash_{c \uplus \{k\}}}{\gamma, F_{\{f\}}, \neg G_{\{g\}} \vdash_{c \uplus \{f,g\}}}\,O}{\gamma, F_{\{f\}} \vdash G_{c \uplus \{f\}}}\,RAA}{\gamma \vdash F \to G_c}\,\to I$$

   帰納法の仮定より、RAA によって discharge される式が否定リテラルのみである $\gamma, F_{\{f\}} \vdash G_{e \uplus \{f\}}$ の証明が存在する。よって、$\gamma \vdash F \to G_e$ には、RAA で discharge される式が否定リテラルのみである証明が存在する。

3. $\neg(F \vee G)_{\{k\}}$ が discharge される場合
   このとき、公理により $\neg(F \vee G)_{\{k\}} \vdash \neg(F \vee G)_{\{k\}}$ が導入されている。ここで、その公理を、証明に出現していない自然数 f, g, l を用いた次の証明で置き換える。なお、l は置き換えごとに、異なるものを利用する。

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg C_{\{l\}} \vdash \neg C_{\{l\}}$}
\AxiomC{$\delta \vdash B \to C_b$}
\AxiomC{$\neg C_{\{l\}} \vdash \neg C_{\{l\}}$}
\AxiomC{$\delta \vdash A \to C_b$}
\AxiomC{$\gamma \vdash A \vee B_a$}
\AxiomC{$\neg A_{\{p\}} \vdash \neg A_{\{p\}}$}
\RightLabel{P}
\UnaryInfC{$\{\neg A_{\{p\}}\}_{\{k\}} \vdash \neg A_{\{k\}}$}
\AxiomC{$\neg B_{\{q\}} \vdash \neg B_{\{q\}}$}
\RightLabel{P}
\UnaryInfC{$\{\neg B_{\{q\}}\}_{\{k\}} \vdash \neg B_{\{k\}}$}
\RightLabel{$\vee E$}
\TrinaryInfC{$\gamma, \{\neg A_{\{p\}}\}_{\{k\}}, \{\neg B_{\{q\}}\}_{\{k\}} \vdash_{a \uplus \{k\}}$}
\RightLabel{$\vee D1$}
\UnaryInfC{$\{\neg A_{\{p\}}\}_{\{k\}}, \langle \gamma | \{\neg B_{\{q\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash_{a \uplus \{k\}}$}
\RightLabel{O}
\UnaryInfC{$\neg A_{\{p\}}, \langle \gamma | \{\neg B_{\{q\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash_{a \uplus \{p\}}$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{$\langle \gamma | \{\neg B_{\{q\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash A_a$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\delta, \langle \gamma | \{\neg B_{\{q\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash C_{a \cup b}$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\neg C_{\{l\}}, \delta, \langle \gamma | \{\neg B_{\{q\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash_{(a \cup b) \uplus \{l\}}$}
\RightLabel{$\vee D2$}
\UnaryInfC{$\{\neg B_{\{q\}}\}_{\{k\}}, \langle \gamma | \neg C_{\{l\}}, \delta \rangle_2 \vdash_{a \uplus \{k\}}$}
\RightLabel{O}
\UnaryInfC{$\neg B_{\{q\}}, \langle \gamma | \neg C_{\{l\}}, \delta \rangle_2 \vdash_{a \uplus \{q\}}$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{$\langle \gamma | \neg C_{\{l\}}, \delta \rangle_2 \vdash B_a$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\delta, \langle \gamma | \neg C_{\{l\}}, \delta \rangle_2 \vdash C_{a \cup b}$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\neg C_{\{l\}}, \delta, \langle \gamma | \neg C_{\{l\}}, \delta \rangle_2 \vdash_{(a \cup b) \uplus \{l\}}$}
\RightLabel{$\vee D3$}
\UnaryInfC{$\gamma, \neg C_{\{l\}}, \neg C_{\{l\}}, \delta, \delta \vdash_{(a \cup b) \uplus \{l\}}$}
\RightLabel{C}
\UnaryInfC{$\gamma, \neg C_{\{l\}}, \delta, \delta \vdash_{(a \cup b) \uplus \{l\}}$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{$\gamma, \delta, \delta \vdash C_{a \cup b}$}
\RightLabel{C を用いて}
\dottedLine
\UnaryInfC{$\gamma, \delta \vdash C_{a \cup b}$}
\end{prooftree}
$$

図 10:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$F \vee G_{\{l\}} \vdash F \vee G_{\{l\}}$}
\AxiomC{$\neg F_{\{f\}} \vdash \neg F_{\{f\}}$}
\RightLabel{P}
\UnaryInfC{$\{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}\} \vdash \neg F_{\{k\}}$}
\AxiomC{$\neg G_{\{g\}} \vdash \neg G_{\{g\}}$}
\RightLabel{P}
\UnaryInfC{$\{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash \neg F_{\{k\}}$}
\RightLabel{$\vee E$}
\TrinaryInfC{$F \vee G_{\{l\}}, \{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}, \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash_{\{l, k\}}$}
\RightLabel{$\neg I$}
\UnaryInfC{$\{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}, \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash \neg(F \vee G)_{\{k\}}$}
\end{prooftree}
$$

これより、$\gamma, \neg(F \vee G)_{\{k\}} \vdash_{c \uplus \{k\}}$ の証明から $\gamma, \{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}, \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash_{c \uplus \{k\}}$ の証明が得られる。ただし、γ, $\neg(F \vee G)_{\{k\}} \vdash_{e \uplus \{k\}}$ の証明において、推論規則 C により、$\neg(F \vee G)_{\{k\}}, \neg(F \vee G)_{\{k\}}$ が $\neg(F \vee G)_{\{k\}}$ に置換されている場合、γ, $\{F_{\{f\}}\}_{\{k\}}$, $\{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash_{e \uplus \{k\}}$ の証明では、推論規則 C を複数回用いて、$\{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}, \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}}, \{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}, \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}}$ を、$\{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}, \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}}$ に置換する。$\gamma, \{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}$, $\{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash_{c \uplus \{k\}}$ から、以下のように $\gamma \vdash F \vee G_c$ が証明される。

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\gamma, \{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}, \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \vdash_{c \uplus \{k\}}$}
\RightLabel{$\vee D1$}
\UnaryInfC{$\{\neg F_{\{f\}}\}_{\{k\}}, \langle \gamma | \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash_{c \uplus \{k\}}$}
\RightLabel{O}
\UnaryInfC{$\neg F_{\{f\}}, \langle \gamma | \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash_{c \uplus \{f\}}$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{$\langle \gamma | \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash F_c$}
\RightLabel{$\vee D4$}
\UnaryInfC{$\{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}}, \langle \gamma | \emptyset | F_c \rangle_4 \vdash_{c \uplus \{k\}}$}
\RightLabel{O}
\UnaryInfC{$\neg G_{\{g\}}, \langle \gamma | \emptyset | F_c \rangle_4 \vdash_{c \uplus \{g\}}$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{$\langle \gamma | \emptyset | F_c \rangle_4 \vdash G_c$}
\RightLabel{$\vee D5$}
\UnaryInfC{$\gamma \vdash F \vee G_c$}
\end{prooftree}
$$

帰納法の仮定より、RAA で discharge される式が否定リテラルのみである $\langle \gamma | \{\neg G_{\{g\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash F_c$ の証明が存在する。よって、RAA で discharge される式が否定リテラルのみである $\gamma \vdash F \vee G_c$ の証明が存在する。

4. $\neg\neg F_{\{k\}}$ が discharge される場合

このとき、公理により $\neg\neg F_{\{k\}} \vdash \neg\neg F_{\{k\}}$ が導入されている。ここで、その公理を、証明に出現していない自然数 l を用いた次の証明で置き換える。なお、l は置き換えごとに、異なるものを利用する。

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg F_{\{l\}} \vdash \neg F_{\{l\}}$}
\AxiomC{$F_{\{k\}} \vdash F_{\{k\}}$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$F_{\{k\}}, \neg F_{\{l\}} \vdash_{\{k, l\}}$}
\RightLabel{$\neg I$}
\UnaryInfC{$F_{\{k\}} \vdash \neg\neg F_{\{k\}}$}
\end{prooftree}
$$

これにより、$\gamma, \neg\neg F_{\{k\}} \vdash_{c \uplus \{k\}}$ の証明から、$\gamma, F_{\{k\}} \vdash_{c \uplus \{k\}}$ の証明が得られる。よって、次のように RAA で discharge される式が否定リテラルのみである $\gamma \vdash \neg F_c$ の証明が得られる。

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\gamma, F_{\{k\}} \vdash_{c \uplus \{k\}}$}
\RightLabel{$\neg I$}
\UnaryInfC{$\gamma \vdash \neg F_c$}
\end{prooftree}
$$

以上により、否定リテラルではない式を discharge する RAA が、結論の導出だけで利用されている証明には、同じ結論を持ち、RAA で discharge される式が否定リテラルでのみである証明が存在する。これより、任意の証明に対して、同じ結論を持ち、RAA で discharge される式が否定リテラルのみである証明が存在する。

■

補題 5.4 の証明: $\psi \vdash A_a$ から $\vdash B_{\emptyset}$ までの間で利用される推論規則の個数に関する帰納法で証明を行う。個数が 1 つである場合、$\psi \vdash A_a$ に推論規則を適用して、$\vdash B_{\emptyset}$ が推論される。このとき、推論規則の定義より ψ には $\pi^1 \cup \pi^2$ が存在しない。

$$
\dfrac{
\dfrac{\gamma \vdash A \wedge (B \vee C)_a}{\gamma \vdash A_a}\ \wedge E1
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\gamma \vdash A \wedge (B \vee C)_a}{\gamma \vdash B \vee C_a}\ \wedge E
\quad
\dfrac{\neg B_{\{p\}} \vdash \neg B_{\{p\}}}{\{\neg B_{\{p\}}\}_{\{k\}} \vdash \neg B_{\{k\}}}\ P
\quad
\dfrac{\neg C_{\{q\}} \vdash \neg C_{\{q\}}}{\{\neg C_{\{q\}}\}_{\{k\}} \vdash \neg B_{\{k\}}}\ P
}{\gamma, \{\neg B_{\{p\}}\}_{\{k\}}, \{\neg C_{\{q\}}\}_{\{k\}} \vdash_{a \uplus \{k\}}}\ \vee E
}{\{\neg B_{\{p\}}\}_{\{k\}}, \langle \gamma | \{\neg C_{\{q\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash_{a \uplus \{k\}}}\ \vee D1
}{\neg B_{\{p\}}, \langle \gamma | \{\neg C_{\{q\}}\}_{\{p\}} \rangle_1 \vdash_{a \uplus \{p\}}}\ O
}{\langle \gamma | \{\neg C_{\{q\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash B_a}\ RAA
}{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\gamma, \langle \gamma | \{\neg C_{\{q\}}\}_{\{k\}} \rangle_1 \vdash A \wedge B_a}{\{\neg C_{\{q\}}\}_{\{k\}}, \langle \gamma | \gamma | A \wedge B_a \rangle_4 \vdash_{a \uplus \{k\}}}\ \vee D4
}{\neg C_{\{q\}}, \langle \gamma | \gamma | A \wedge B_a \rangle_4 \vdash_{a \uplus \{q\}}}\ O
}{\langle \gamma | \gamma | A \wedge B_a \rangle_4 \vdash C_a}\ RAA
}{\gamma, \gamma \vdash A \wedge B \vee C_a}\ \vee D5
}\ \wedge I
$$

$$
\begin{array}{c}
\gamma, \gamma \vdash A \wedge B \vee C_a \\
\vdots\ C\text{ を用いて} \\
\gamma \vdash A \wedge B \vee C_a
\end{array}
$$

図 11:

$\psi \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が $k+1$ 個の部分証明が存在するとする。

1. $\psi \vdash \mathcal{A}_a$ に適用されている推論規則が $\vee D1$ である場合
   推論規則の定義から、$\psi \vdash \mathcal{A}_a$ を $\gamma, \delta^1, \delta^2 \vdash_{b \uplus c}$ とみなすことができる。$\pi^1 \cup \pi^2$ が、γ または δ^1 または δ^2 の内部に出現する場合には、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ に対しても $\vee D1$ が適用可能であり、帰納法の仮定より $\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が $k+1$ 個以下の部分証明が存在する。
   $\pi^1 \cup \pi^2$ が γ, δ^1, δ^2 の内部に出現しない場合、$\pi^1 \cup \pi^2 \subseteq \gamma \cup \delta^1 \cup \delta^2$ である。ここで、$\gamma, \delta^1, \delta^2$ から、π^2 を除去したものを、$\gamma^\dagger, \delta^{1\dagger}, \delta^{2\dagger}$ とし、この構造に基づき場合わけを行う。

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\gamma, \delta^1, \delta^2 \vdash_{b \uplus c}}{\delta^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash_{b \uplus c}}\ \vee D1 \\
\vdots \\
\dfrac{\phi^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash_{b \cup d}}{\delta^2, \langle \gamma | \phi^1 \rangle_2 \vdash_{b \uplus c}}\ \vee D2 \\
\vdots \\
\dfrac{\phi^2, \langle \gamma | \phi^1 \rangle_2 \vdash_{b \cup d}}{\gamma, \phi^1, \phi^2 \vdash_{b \cup d}}\ \vee D3 \\
\vdots \\
\vdash B_\emptyset
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{\gamma, \delta^1, \delta^2 \vdash_{b \uplus c}}{\delta^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash_{b \uplus c}}\ \vee D1 \\
\vdots \\
\dfrac{\phi^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash P_{b \cup d}}{\delta^2, \langle \gamma | \phi^1 | P_{b \cup d} \rangle_4 \vdash_{b \uplus c}}\ \vee D4 \\
\vdots \\
\dfrac{\phi^2, \langle \gamma | \phi^1 | P_{b \cup d} \rangle_4 \vdash Q_{b \cup d}}{\gamma, \phi^1, \phi^2 \vdash P \vee Q_{b \cup d}}\ \vee D5 \\
\vdots \\
\vdash B_\emptyset
\end{array}
$$

図 12:

(1) $\delta^{1\dagger} = \emptyset$ である場合
   ここで、$\gamma, \delta^1, \delta^2 \vdash_{b \uplus c}$ からの証明は、図 12 のいずれかである。よって、$\gamma, \delta^2 \vdash_{b \uplus c}$ から、図 13 に

$$
\begin{array}{c}
\gamma, \delta^2 \vdash_{b \uplus c} \\
\vdots \\
\gamma, \phi^2 \vdash_{b \cup d}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\gamma, \delta^2 \vdash_{b \uplus c} \\
\vdots \\
\dfrac{\gamma, \phi^2 \vdash Q_{b \cup d}}{\gamma, \phi^2 \vdash P \vee Q_{b \cup d}}\ \vee I2
\end{array}
$$

図 13:

   示す証明を構成することができる。ここで、帰納法の仮定から、$\gamma, \phi^2 \vdash_{b \cup d}$ や $\gamma, \phi^2 \vdash P \vee Q_{b \cup d}$ から $\vdash B_\emptyset$ の証明が存在する。よって、$\gamma, \delta^2 \vdash_{b \uplus c}$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が k 個以下で証明可能であり、帰納法の仮定から、$\gamma^\dagger, \delta^{2\dagger} \vdash_{b \uplus c}$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が k 個以下の部分証明が存在する。

(2) $\delta^{2\dagger} = \emptyset$ である場合
   (a) の場合と同様に証明可能である。

(3) 上記以外の場合
   帰納法の仮定より、明らか。

2. $\psi \vdash \mathcal{A}_a$ に適用されている推論規則が C である場合
   C を適用して得られる sequent を $\psi' \vdash \mathcal{A}_a$ とする。$\pi^1 \cup \pi^2$ が ψ' にも出現する場合には、ψ' から π^2 を除去したものを ϕ とすると、帰納法の仮定より、$\phi \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が k 個以下の部分証明が存在する。一方、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ に推論規則 C を適用すると、$\phi \vdash \mathcal{A}_a$ が得られる。よって、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が $k+1$ 個以下の部分証明が存在する。
   $\pi^1 \cup \pi^2$ が ψ' に出現しない場合、次のいずれかが

考えられる。

(1) C_c, C_c または γ_b^1, γ_b^2 が、π^1 に出現する場合

(2) C_c, C_c または γ_b^1, γ_b^2 が、π^2 に出現する場合

(3) $C_c \in \pi^1, C_c \in \pi^2$ である場合

(4) $\gamma_b^1 \in \pi^1$, $\gamma_b^2 \in \pi^2$ である場合

(5) $\gamma_b^2 \in \pi^1$, $\gamma_b^1 \in \pi^2$ である場合

(a) の場合、π^1 において、C_c, C_c を C_c に、または、γ_b^1, γ_b^2 を $(\gamma^1 \cup \gamma^2)_b$ に置換したもの $\pi^{1\dagger}$ とすると、$\pi^{1\dagger}$ と π^2 は Rank 集合が同じであり、ψ' には、$\pi^{1\dagger} \cup \pi^2$ が存在する。ψ' から π^2 を除去したものを ϕ とすると、帰納法の仮定より、$\phi \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が k 個以下である部分証明が存在する。一方、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ に C を適用すると、$\phi \vdash \mathcal{A}_a$ が得られる。よって、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が $k+1$ 個以下の部分証明が存在する。

(b) の場合、(a) の場合と同様に証明可能である。

(c) の場合、$\phi^1 = \pi^1 - \{C_c\}$、$\phi^2 = \pi^2 - \{C_c\}$ とすると、ψ' には、ϕ^1, ϕ^2, C_c が出現する。ここで、ϕ^1 から C_c を全て取り除いたものを λ とすると、λ と ϕ^2、または、$\lambda \cup \{C_c\}$ と ϕ^2 の Rank 集合は同じである。また、ψ' から ϕ^2 を除去したものは $\psi^\dagger$ となる。よって、帰納法の仮定より、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が $k+1$ 個以下の部分証明が存在する。

(d) の場合、$\phi^1 = \pi^1 - \{\gamma_b^1\}$、$\phi^2 = \pi^2 - \{\gamma_b^2\}$ とすると、ψ' には、$\phi^1, \phi^2, (\gamma^1 \cup \gamma^2)_b$ が出現する。γ^1 と γ^2 の Rank 集合は同じであるので、ψ' から γ^2 を除去したものを ψ'' とすると、帰納法の仮定より、$\psi'' \vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が k 個以下である部分証明が存在する。ここで、ϕ^1 から Rank 集合 b を持つ要素を全て取り除いたものを λ とすると、λ と ϕ^2、または、$\lambda \cup \{\gamma_b^1\}$ と ϕ^2 の Rank 集合は同じである。また、ψ' から ϕ^2 を除去したものは $\psi^\dagger$ となる。よって、帰納法の仮定より、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が $k+1$ 個以下である部分証明が存在する。

(e) の場合、(d) の場合と同様に証明可能である。

3. その他の推論規則が $\psi \vdash \mathcal{A}_a$ に適用される場合
その結論を $\phi \vdash D_d$ とする。推論規則の定義より、$\pi^1 \cup \pi^2$ は ϕ にも出現する。ここで、$\phi \vdash D_d$ から $\vdash B_\emptyset$ が証明可能であり、その間で利用される推論規則は k 個以下である。よって、帰納法の仮定より、π_2 が除去された sequent $\phi^\dagger \vdash D_d$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が k 個以下の部分証明が存在する。一方、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ から $\phi^\dagger \vdash D_d$ が証明可能である。以上より、$\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ までの間で利用される推論規則が $k+1$ 個以下の部分証明が存在する。

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\gamma^1 \vdash A^1_a \quad \gamma^2 \vdash A^2_a}{\gamma^1, \gamma^2 \vdash A^1 \wedge A^2_a}\wedge I \\
\vdots\ P, O, C \\
\vdots\ \text{を用いて} \\
\dfrac{\delta \vdash A^1 \wedge A^2_b}{\delta \vdash A^x_a}\wedge Ex
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{array}{c}
\gamma_x \vdash A^x_a \\
\vdots\ P, O, C \\
\vdots\ \text{を用いて} \\
\delta' \vdash A^x_b
\end{array}
$$

図 14:

$$
\begin{array}{c}
A_{\{k\}} \vdash A_{\{k\}} \\
\vdots \\
\dfrac{\delta, A_{\{k\}} \vdash B_{b \uplus \{k\}}}{\delta \vdash A \to B_b} \to I \\
\vdots\ P, O, C \\
\vdots\ \text{を用いて} \\
\dfrac{\phi \vdash A \to B_d \qquad \gamma \vdash A_c}{\gamma, \phi \vdash B_{c \cup d}} \to E
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{array}{c}
\dfrac{\gamma \vdash A_c}{\gamma_{\{k\}} \vdash A_{\{k\}}}\ P \\
\vdots \\
\delta, \gamma_{\{k\}} \vdash B_{b \uplus \{k\}} \\
\vdots\ P, O, C \\
\vdots\ \text{を用いて} \\
\dfrac{\phi, \gamma_{\{k\}} \vdash B_{d \uplus \{k\}}}{\gamma, \phi \vdash B_{c \cup d}}\ O
\end{array}
$$

図 15:

また、$\psi \vdash \mathcal{A}_a$ の $\vdash B_\emptyset$ までの部分証明から得られる $\psi^\dagger \vdash \mathcal{A}_a$ から $\vdash B_\emptyset$ の部分証明では、標準化数は増加していないことは明らかである。 ■

補題 5.5 の証明: 補題 5.3 より、FR' の定理には、RAA で discharge される式が否定リテラルのみである証明が存在する。よって、このような証明に存在する cut の中で複雑さが最大の cut に対して、以下に示す変換規則を適用し、cut が存在しなくなるまで続ける。尚、以下に示す変換規則うち、(1) 〜 (4) は、[Troelstra88] にある変換規則をベースとしたものである。

1. $\wedge I$ の結論から始まる cut に、図 14 に示す変換を行う。なお、補題 5.4 より、$\gamma_x \vdash A_a^x$ から結論までの証明が存在する。
2. $\to I$ の結論から始まる cut に、図 15 に示す変換を行う。
3. $\neg I$ の結論から始まる cut に、図 16 に示す変換を行う。
4. $\vee I1, \vee I2$ の結論から始まる cut に、図 17 に示す変換を行う。なお、補題 5.4 より、$\gamma \vdash A_a^x$ から結論までの証明が存在する。
5. $\vee D5$ の結論から始まる cut に、証明に利用されていない自然数 p を用いて、図 18 に示す変換を行う。

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\gamma \vdash A^x_a}{\gamma \vdash A^1 \vee A^2_a}\ \vee Ix \\
\vdots\ \text{P,O,C を用いて} \\
\dfrac{\phi \vdash A^1 \vee A^2_a \quad \delta^1 \vdash \neg A^1_b \quad \delta^2 \vdash \neg A^2_b}{\phi, \delta^1, \delta^2 \vdash_{a\cup b}}\ \vee E
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{c}
\gamma \vdash A^x_a \\
\vdots\ \text{P,O,C を用いて} \\
\dfrac{\delta_x \vdash \neg A^x_b \quad \gamma \vdash A^1_a}{\gamma, \delta_x \vdash_{a\cup b}}\ \neg E
\end{array}
$$

図 17:

$$
\begin{array}{c}
A_{\{k\}} \vdash A_{\{k\}} \\
\vdots \\
\dfrac{\delta, A_{\{k\}} \vdash_{b\uplus\{k\}}}{\delta \vdash \neg A_b}\ \neg I \\
\vdots\ \text{P,O,C を用いて} \\
\dfrac{\phi \vdash \neg A_d \qquad \gamma \vdash A_c}{\gamma, \phi \vdash_{c\cup d}}\ \neg E
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{c}
\dfrac{\gamma \vdash A_c}{\gamma_{\{k\}} \vdash A_{\{k\}}}\ P \\
\vdots \\
\delta, \gamma_{\{k\}} \vdash_{b\uplus\{k\}} \\
\vdots\ \text{P,O,C を用いて} \\
\dfrac{\phi, \gamma_{\{k\}} \vdash_{d\uplus\{k\}}}{\gamma, \phi \vdash_{c\cup d}}\ O
\end{array}
$$

図 16:

定義より、cut は、$\wedge I, \vee I, \to I, \neg I, \vee D5$ のいずれかの結論からはじまるので、cut が存在するならば、上記の 5 つの変換規則のいずれかが適用可能である。また、各変換規則を適用すると、標準化数は必ず減少し、標準化数の最小値は 0 であるから、この手続きは停止する。また、RAA で discharge される式が否定リテラルのみである証明に対して、これらの変換規則を適用して得られる証明もまた RAA で discharge される式が否定リテラルのみである。

以上より、FR' の定理は標準形証明で証明可能である。 ■

補題 5.6 の証明: A を ER' の定理とする。このとき、$\vdash A:\varphi$ の証明が存在する。この証明において $C4$ が利用されていなければ、これは ER の証明でもあり、よって、A は ER の定理である。

一方、$\vdash A:\varphi$ の証明で、$C4$ が利用されている場合、証明は図 19 の左のようになっている。この証明から、図 19 の右にある $C4$ を用いない証明が得られる。

この変換を繰り返すことにより、$C4$ が利用されていない $\vdash A:\varphi$ の証明が得られ、この証明は ER の証明である。よって、A は ER の定理である。 ■

補題 5.7 の証明: FR' の標準形証明の構造に関する帰納法によって証明を行う。

1. 公理
   明らかに成り立つ。
2. $\vee D1, \vee D2, \vee D3, \wedge I, \vee I1, \vee I2, P, O, C$
   帰納法の仮定より明らかに成り立つ。
3. $\vee D4$
   FR' において $\pi^1, \langle\gamma|\delta^2\rangle_1 \vdash A_{a\cup c}$ が証明可能であるとする。このとき、帰納法の仮定より、ER' において、$\pi^{1*}, \gamma^*, \delta^{2*} \vdash A:\varphi$ が証明可能である。よって、次の推論が可能である。
   $$\dfrac{\neg A : e \vdash \neg A : e \quad \pi^{1*}, \gamma^*, \delta^{2*} \vdash A:\varphi}{\pi^{1*}, \gamma^*, \delta^{2*}, \neg A : e \vdash}\ \neg E$$
   よって、$\delta^2, \langle\gamma|\pi^1|A_{a\cup c}\rangle_4 \vdash_{a\uplus b}$ に対応する ER' の sequent が証明可能である。
4. $\vee D5$
   FR' において $\pi^2, \langle\gamma|\pi^1|A_a\rangle_4 \vdash B_a$ が証明可能であるとする。このとき、帰納法の仮定より、ER' において、$\pi^{2*}, \gamma^*, \pi^{1*}, \neg A : e \vdash B:\varphi$ が証明可能である。よって、次の推論が可能である。
   $$\dfrac{\pi^{2*}, \gamma^*, \pi^{1*}, \neg A : e \vdash B:\varphi}{\pi^{2*}, \gamma^*, \pi^{1*} \vdash A \vee B : i}\ EM1$$
   よって、$\gamma^*, \pi^{1*}, \pi^{2*} \vdash A \vee B_a$ に対応する ER' の sequent が証明可能である。
5. $\to I, \neg I$
   $\to I$ について証明を行う。$\neg I$ についても同様に証明可能である。FR' において、$\gamma, A_{\{k\}} \vdash B_{b\uplus\{k\}}$ が証明可能である。このとき、帰納法の仮定より、$\gamma^*, A : e \vdash B:\varphi$ が、ER' において証明可能である。よって、ER' において次の証明が可能である。
   $$\dfrac{\gamma^*, A : e \vdash B:\varphi}{\gamma^* \vdash A \to B : i}\ \to I$$
6. RAA
   FR' において、次の証明が存在するとする。
   $$\dfrac{\gamma, \neg A_{\{k\}} \vdash_{b\uplus\{k\}}}{\gamma \vdash A_b}\ RAA$$
   帰納法の仮定より、$\gamma^*, \neg A : e \vdash$ が ER' で証明可能である。また、FR' の標準形証明の定義より、A は原子命題である。よって、$\gamma^*, \neg A : e \vdash$ の証明で利用されている公理 $\neg A : e \vdash \neg A : e$ を $\neg A : r \vdash \neg A : r$ に置き換えると、$\gamma^*, \neg A : r \vdash$ の

$$\dfrac{\gamma, \delta^1, \delta^2 \vdash_{a \uplus b}}{\delta^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash_{a \uplus b}} \vee D1$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\pi^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash A_{a \cup c}}{\delta^2, \langle \gamma | \pi^1 | A_{a \cup c} \rangle_4 \vdash_{a \uplus b}} \vee D4$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\pi^2, \langle \gamma | \pi^1 | A_{a \cup c} \rangle_4 \vdash B_{a \cup c}}{\gamma, \pi^1, \pi^2 \vdash A \vee B_{a \cup c}} \vee D5$$

$$\vdots \; P, O, C \text{ を用いて}$$

$$\dfrac{\phi \vdash A \vee B_{a \cup c} \qquad \lambda^1 \vdash \neg A_d \quad \lambda^2 \vdash \neg B_d}{\phi, \lambda^1, \lambda^2 \vdash_{a \cup c \cup d}} \vee E$$

$$\Downarrow$$

$$\dfrac{\gamma, \delta^1, \delta^2 \vdash_{a \uplus b}}{\delta^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash_{a \uplus b}} \vee D1$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\lambda^1 \vdash \neg A_d}{\lambda^1_{\{p\}} \vdash \neg A_{\{p\}}} P \qquad \pi^1, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash A_{a \cup c}}{\dfrac{\pi^1, \lambda^1_{\{p\}}, \langle \gamma | \delta^2 \rangle_1 \vdash_{(a \cup c) \uplus \{p\}}}{\delta^2, \langle \gamma | \pi^1, \lambda^1_{\{p\}} \rangle_2 \vdash_{a \uplus b}} \vee D2} \neg E$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\lambda^2 \vdash \neg B_d}{\lambda^2_{\{p\}} \vdash \neg B_{\{p\}}} P \qquad \pi^2, \langle \gamma | \pi^1, \lambda^1_{\{p\}} \rangle_2 \vdash B_{a \cup c}}{\dfrac{\pi^2, \lambda^2_{\{p\}}, \langle \gamma | \pi^1, \lambda^1_{\{p\}} \rangle_2 \vdash_{(a \cup c) \uplus \{p\}}}{\gamma, \pi^1, \lambda^1_{\{p\}}, \pi^2, \lambda^2_{\{p\}} \vdash_{(a \cup c) \uplus \{p\}}} \vee D3} \neg E$$

$$\vdots \; P, O, C \text{ を用いて}$$

$$\dfrac{\dfrac{\phi, \lambda^1_{\{p\}}, \lambda^2_{\{p\}} \vdash_{(a \cup c) \uplus \{p\}}}{\phi, (\lambda^1 \cup \lambda^2)_{\{p\}} \vdash_{(a \cup c) \uplus \{p\}}} C}{\phi, \lambda^1, \lambda^2 \vdash_{a \cup c \cup d}} O$$

図 18:

証明が得られる。ゆえに、ER' において次の証明が可能である。

$$\dfrac{\gamma^*, \neg A : r \vdash}{\gamma^* \vdash A : e} RAA$$

7. $\wedge E1, \wedge E2$

$\wedge E1$ について証明を行う。$\wedge E2$ についても同様に証明可能である。FR' において、以下に示す左の証明が存在すると仮定する。ここで、FR' の標準形証明の定義より、$\gamma \vdash A \wedge B_a$ は I-rule chain の構成要素ではない。よって、帰納法の仮定より、ER' において $\gamma^* \vdash A \wedge B : e$ が証明可能であり、ゆえに、以下に示す右の証明が存在する。

$$\dfrac{\gamma \vdash A \wedge B_a}{\gamma \vdash A_a} \wedge E1 \qquad \dfrac{\gamma \vdash A \wedge B : e}{\gamma \vdash A : e} \wedge E1$$

$$\dfrac{\gamma, \neg B : r, \neg B : e \vdash C : \phi}{\gamma, \neg B : r \vdash C : \phi} C4$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\delta, \neg B : r \vdash}{\delta \vdash B : e} RAA$$

$$\vdots$$

$$\vdash A : \varphi$$

$$\gamma, \neg B : r, \neg B : e \vdash C : \phi$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\delta, \neg B : r, \neg B : e \vdash}{\delta, \neg B : r \vdash} C3}{\delta \vdash B : e} RAA$$

$$\vdots$$

$$\vdash A : \varphi$$

図 19:

8. $\to E, \neg E$

$\to E$ について証明を行う。$\neg E$ についても同様に証明可能である。FR' において、$\gamma \vdash A \to B_a$, $\delta \vdash A_b$ が証明可能であるとする。ここで、FR' の標準形証明の定義より、$\gamma \vdash A \to B_a$ は I-rule chain の構成要素ではない。よって、帰納法の仮定より、ER' において、$\gamma^* \vdash A \to B : e$ と $\delta^* \vdash A : \phi$ が証明可能である。よって、以下の証明が可能である。

$$\dfrac{\gamma^* \vdash A \to B : e \quad \delta^* \vdash A : \phi}{\gamma^*, \delta^* \vdash B : e} \to E$$

9. $\vee E$

FR' において、次の証明が存在するとする。

$$\dfrac{\gamma \vdash A \vee B_a \quad \delta^1 \vdash \neg A_b \quad \delta^2 \vdash \neg B_b}{\gamma, \delta^1, \delta^2 \vdash_{b \cup a}} \vee E1$$

FR' の標準形証明の定義より、$\gamma \vdash A \vee B_a$ は I-rule chain の構成要素ではない。よって、帰納法の仮定より、ER' において次の sequent が証明可能である。

$$\gamma^* \vdash A \vee B : e \quad \delta^{1*} \vdash \neg A : \varphi^1 \quad \delta^{2*} \vdash \neg B : \varphi^2$$

ここで、φ^1 が i である場合、$\delta^{1*} \vdash \neg A : \varphi^1$ は、次のように証明されている。

$$\dfrac{\delta^{1*}, A : e \vdash}{\delta^{1*} \vdash \neg A : i} \neg I$$

また、φ^1 が e または r ならば、次の証明が可能である。

$$\dfrac{\delta^{1*} \vdash \neg A : \varphi^1 \quad A : e \vdash A : e}{\delta^{1*}, A : e \vdash} \neg E$$

以上により、φ^1 の値に関わらず、$\delta^{1*}, A : e \vdash$ が証明可能である。同様に、$\delta^{2*}, B : e \vdash$ も証明可能であり、ゆえに、次の証明が可能である。 ■

$$\dfrac{\gamma \vdash A \vee B : e \quad \delta^{1*}, A : e \vdash \quad \delta^{2*}, B : e \vdash}{\gamma^*, \delta^{1*}, \delta^{2*} \vdash} \vee E4$$

補題 5.8 の証明: 補題 5.2,5.6,5.7 より明らか。 ■

定理 5.9 の証明: 補題 5.8 と、$A \to (B \to A \wedge B)$ が ER では証明できるが、R では証明できないことから明らか。 ■