数理解析研究所講究録
1131 巻 2000 年 40-44

A Rohlin property for one-parameter automorphism groups of the hyperfinite II_1 factor

川室 圭子
Keiko Kawamuro
Department of Mathematical Sciences
Unicersity of Tokyo

1 Introduction

Hyperfinite II_1 factor (以降、R と書く) への群作用の分類は、Connes [2] が 70 年代に aperiodic automorphism (free $\mathbf{Z}$-action) が outer conjugacy で一意であることを示したことにより大きく発展した。 ここで $\mathbf{Z}$-action $\alpha:\mathbf{Z}\ni n\mapsto\alpha^{n}\in \mathrm{Aut}(R)$ の freeness は、$\forall n\in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ $\alpha^{n}\notin \mathrm{Int}(R)$ である。次いで Jones と Ocneanu がそれぞれ有限群と discrete amenable 群の hyperfinite II_1 factor への free ではない場合も含めた作用の分類をした。ところが実数群 $\mathbf{R}$ の作用は、Kawahigashi により Connes spectrum $\Gamma(\alpha)\neq \mathbf{R}$ のとき unitary cocycle conjugacy で分類されてはいるが、"free" な作用の分類は完了していない。実は "free" のしかるべき定義はまだされていないので、ここではそれにふさわしそうな仮定:

$$\Gamma(\alpha)=\mathbf{R}, \quad \text{任意の} t\neq 0 \text{に対して} \quad \alpha_{t}\notin \mathrm{Int}(R)$$

をする。

そもそも Connes の single automorphism の研究は hyperfinite III_{λ} factor, $\lambda\in(0,1)$ の一意性を証明する過程で生じた。つまり、hyperfinite III_{λ} factor M を hyperfinite II_{∞} factor N と $\mathbf{Z}$ の接合積に分解して $M=N\rtimes_{\beta}\mathbf{Z}$ と思い、N の一意性の証明と、作用 β $(\mathrm{tr}\cdot\beta=k\cdot\alpha,\ k\neq 1)$ の一意性の証明に分け、後者はさらに hyperfinite II_1 factor への free な $\mathbf{Z}$-action の一意性を示すことに帰着される。

Hyperfinite III_1 factor の一意性は Haagerup により証明されているが [3]、もし hyperfinite II_1 factor への "free" な $\mathbf{R}$-action の一意性が証明されると、hyperfinite III_{λ} factor のときの類似で hyperfinite III_1 factor の一意性の別証明をあたえることが期待される。ところで、上に述べた "free" の定義で二つの条件 (Connes spectrum に関するものと outer 性) は、III 型 factor においては、$S(M)=[0,\infty)$ は $T(M)=\{0\}$ を導くので [1]、モジュラー automorphism group に関しては前者から後者が導かれるが、hyperfinite II_1 factor では前者は後者を導かない (例えば後述する Example 2.2) ので、両者を仮定することにした。

"Free" one-parameter automorphism groups の分類の方法として、Connes の free single automorphism のときのをマネすることにし、まず "free" $\mathbf{R}$-action がある種の Rohlin property を持つことを示し、次に Rohlin property をもつ作用はある種の ultraproduct algebra の中で cohomology 消滅する、最後にそのような作用は unitary cocycle conjugacy で一意である、という風に示したい。今回はその二つ目にあたる定理を証明する。

2 Rohlin property

まずエルゴード理論における Rohlin の lemma を以下に述べる。『$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を確率測度空間、$T : X \to X$ を測度を保つエルゴード変換とすると、任意の $\varepsilon > 0$ と $n \in \mathbf{N}$ に対して可測集合 $E \subset X$ が存在して、

(1) $E, T^{-1}(E), T^{-2}(E), \cdots, T^{-(n-1)}(E)$ は互いに disjoint,

(2) $\mu(\cup_{j=0}^{n-1} T^{-j}E) > 1 - \varepsilon$ である。』

Connes の single automorphism の分類に大きな役割を果たした非可換 Rohlin lemma は、Rohlin の lemma の可測集合を projection に置き換えたもので、『hyperfinite II_1 factor R の free automorphism α は、任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して projection $e_1, \cdots, e_k \in R_\omega$ が存在して、

(1) $\alpha_\omega(e_l) = e_{l+1}$ (ただし $e_{k+1} = e_1$ とおいた)、

(2) $e_1 + \cdots + e_k = 1$ をみたす』

というものである。ただし、R_ω は $\mathbf{N}$ 上の free ultrafilter ω による ω-central sequence algebra である。

これを基に one-parameter automorphism group α_t に Rohlin property を定義する。

Definition 2.1 任意の $p \in \mathbf{R}$ に対して、*unitary* $v = \{v_n\} \in R_{\omega,\mathrm{eq}}$ が存在して $\alpha_t(v) = e^{ipt}v$ をみたすとき、α_t は *Rohlin property* をもつという。ただし、

$$R_{\omega,\mathrm{eq}} = \left\{ x = \{x_n\} \in R_\omega \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \\ \{n \in \mathbf{N} \mid \forall|t| < \delta \quad \|\alpha_t(x_n) - x_n\|_2 < \varepsilon\} \in \omega \end{array} \right\}$$

である。

この定義は Kishimoto [5] が unital simple C* 環に対して定義したものを von Neumann 環に合うように ultrafilter ω に関する条件 "eq" (equicontinuous with respect to α の頭文字) を加えて修正したものである。C* 環では (ω のつかない) ただの central sequence algebra で考えているので、$t \mapsto \alpha_t(x)$ の連続性を仮定するだけで、"eq" に対応する

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \exists n_0\ \forall|t| < \delta \quad n > n_0 \Rightarrow \|\alpha_t(x_n) - x_n\| < \varepsilon$$

という条件が導かれる。つまり強い条件 "eq" を von Neumann 環のときには仮定するわけだが、単に α_t をほどこすことが一様連続であることを主張しているだけで、環 $R_{\omega,\mathrm{eq}}$ はそれほど不自然な人工的なものではない。

この Rohlin property の定義が Connes [2] の single automorphism のときの類似であることは次のようにしてわかる。定義にでてきた unitary $v \in R_{\omega,\mathrm{eq}}$ のスペクトル分

解を $\int e^{i\lambda}dE_{[0,\lambda)}$ とすると、スペクトル分解の一意性より、$\alpha_t(E_{[0,\lambda)}) = E_{[-pt,\lambda-pt)}$ である。これは projection $e_1, \cdots, e_k \in R_\omega$ が automorphism α で隣に移る $(\alpha_\omega(e_l) = e_{l+1})$ ことに対応している。さらに $\int dE_{[0,\lambda)} = 1$ は二つ目の条件 $e_1 + \cdots + e_k = 1$ に対応している。

それから one-parameter automorphism group がこの Rohlin property をみたすときに、"free" の条件をみたすことにも注意しておく。条件 $\forall t \neq 0\ \alpha_t \notin \mathrm{Int}(R)$ はあきらかである。条件 $\Gamma(\alpha) = \mathbf{R}$ は、Connes spectrum の定義:

$$\Gamma(\alpha) = \bigcap_e \{\mathrm{Sp}(\alpha^e) | e \text{ は } R^\alpha \text{ の中心射影}\}$$

と Arveson spectrum の性質:

$$p \in \mathrm{Sp}(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \{x_i\}_{i\in I} \subset R: \quad \text{norm} = 1 \text{ の有向系} \\ \qquad \forall K \subset \mathbf{R}: \text{コンパクト集合} \\ K \text{ 上で } \lim_i \|\alpha_t(x_i) - e^{ipt}x_i\| = 0 \text{ は一様収束} \end{cases}$$

から導かれる。つまり、fixed point algebra の中心射影 $e \in R^\alpha$ に対して、定義 2.1 の $v \in R_{\omega,\mathrm{eq}}$ は、

$$\alpha_t^e(eve) = e\alpha_t(v)e = e^{itp}eve$$

をみたす。ただし α^e は α を縮小環 R_e に制限した $\mathbf{R}$-action である。従って任意の t に対して、$\lim_{n\to\omega} \|\alpha_t^e(ev_ne) - e^{itp}ev_ne\|_2 = 0$ であるが、これが任意のコンパクト集合上で一様収束することは次のようにしてわかる。"eq" の定義より、任意の e に対して $\delta_0 > 0$ が存在して、

$$A := \{\ n \ \mid \ \forall |t| < \delta_0 \quad \|\alpha_t^e(ev_ne) - ev_ne\|_2 < \varepsilon\ \} \in \omega.$$

この δ_0 は

$$\forall |t| < \delta_0 \qquad \|(e^{itp} - 1)ev_ne\|_2 \leq |e^{itp} - 1| < \varepsilon$$

となるように小さくとっておく。任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}$ を幅 δ_0 で刻んだ点の集合を K_0 とすると、K_0 は有限集合なので

$$B := \{\ n \ \mid \ \forall t \in K_0 \quad \|\alpha_t^e(ev_ne) - e^{itp}ev_ne\|_2 < \varepsilon\ \} \in \omega$$

である。よって $n \in A \cap B \in \omega$ に対し、K_0 以外の点でも

$$\forall t \in K \qquad \|\alpha_t^e(ev_ne) - e^{itp}ev_ne\|_2 < 3\varepsilon$$

が成り立つ。

Rohlin property をみたす作用の例として次のものがある。

Example 2.2 [5, Proposition 2.5], [4] 関係式 $uv = e^{i\theta}vu, \theta \notin \mathbf{Q}$ をみたす二つの unitary u, v から生成される irrational rotation C* 環 A_θ の unique な trace で弱閉包をとってつくった hyperfinite II_1 factor に $\alpha_t(u) = e^{i\lambda t}u, \alpha_t(v) = e^{i\mu t}v, \frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbf{Q}$、$\frac{\mu}{\lambda}$ は $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Q})$ の θ による orbit にはいらない、という one-parameter automorphism group α_t は上で定義した Rohlin property をもつ。

Introduction のところでも述べたが、この $\mathbf{R}$-action α は "free" であるが、Connes spectrum の条件 $\Gamma(\alpha) = \mathbf{R}$ は $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbf{Q}$ から導かれ、outer 性の条件 $\forall t \neq 0, \alpha_t \notin \mathrm{Int}(R)$ は $\frac{\mu}{\lambda} \notin$ ($\mathrm{GL}(2,\mathbf{Q})$ のθによる orbit) から導かれ、"free" の二つの条件は独立であることが分かる。

また [4, Theorem 16] より example 2.2 の α は full Connes spectrum $\mathbf{R}$ をもつ無限テンソル積型の $\mathbf{R}$-action と cocycle conjugate であるから、無限テンソル積型の one-parameter automorphism group ときは，Connes spectrum が $\mathbf{R}$ 全体であることと、この Rohlin property を満たすことは同値であることが分かる。尚、これは UHF C*-環ではなりたたず [5]、von Neumann 環だけでなりたつことである。

3 Cohomology vanishing

以下では、次の定理について概説をする。

Theorem 3.1 (1) *One-parameter automorphism group* α_t が *Rohlin property* をみたすことと、(2) 任意の *α-unitary cocycle* $u(t) \in R_{\omega,\mathrm{eq}}$ に対して、*unitary* $w \in R_{\omega,\mathrm{eq}}$ が存在して、$u(t) = w\alpha_t(w^*)$ をみた すこと，は同値である。

Kishimoto [5] はこれの unital simple C* 環版を証明している。この定理の証明も大筋は Kishimoto の方法と同じである。

まず、(2) $\Rightarrow$ (1) は $u(t) = e^{ipt}$ とおけばよい。

次に、(1) $\Rightarrow$ (2) だが、各 $k \in \mathbf{N}$ ごとに free ultrafilter の元 $\omega_k \in \omega$, $\cdots \omega_k \supset \omega_{k+1} \supset \omega_{k+2} \cdots$, $\omega_k \subset [k, \infty)$ を適当にとってきて、各 $n \in \omega_k \backslash \omega_{k+1}$ に対して有界区間 $[0, 2\pi k]$ で、誤差つきの coboundary w_n つまり

$$t \in [0, 2\pi k] \text{ ならば } \|u_n(t) - w_n \alpha_t(w_n^*)\|_2 < \frac{1}{k}(1+t)$$

を作る。実際は、区間 $[0, 2\pi k]$ を十分短い区間で区切って、その有限個の点 $0 < t_1 < \cdots < t_l < 2\pi k$ で近似的に coboundary になているものを作り、一般の $t \in [0, 2\pi k]$ は最寄りの t_k で近似できるため、連続パラメターの問題が有限個の議論で済み、Connes の single automorphism のときの cohomology vanishing の手法をまねることができる。この w_n から $w = \{w_n\}$ を得る。環 R は separable predual を持つので w は central sequence にとることができ、また $\omega_k \in \omega$ の取り方より $w \in R_{\omega,\mathrm{eq}}$ が分かる。パラメター t の動く区間と coboundary の誤差との関係により、$R_{\omega,\mathrm{eq}}$ において等式 $u(t) = w\alpha_t(w^*)$ が成り立つ。

もう少し詳しく説明すると、Connes は section 2 で述べた「非可換 Rohlin の定理」から得た projection $e_1, \cdots, e_j$ と、unitary u から作った α-cocycle $U_m := u\alpha(u)\alpha^2(u)\cdots\alpha^{m-1}(u)$ を用いて、

$$\text{coboundary} \qquad w := \sum_{m=1}^{j} U_m e_m$$

を構成した。

One-parameter automorphism group の場合も、Rohlin property により存在が保証されている unitary $v \in R_{\omega,\mathrm{eq}}$ (これが上の projection $e_1, \cdots, e_j$ に対応していることに注意) と α-cocycle $u(t) = \{u_n(t)\}$ (各 $u_n(t)$ も $t \in [0, 2\pi k]$ で近似的 α-cocycle にとることができることに注意する) を用いて

$$\text{coboundary} \qquad w := \Phi(u_n(2\pi ks)(\text{ゴミ})_s) \quad s \in \mathbf{T}$$

を得る。ただし Φ は $R \odot L^\infty(\mathbf{T}) \ni a \otimes f \mapsto af(v) \in R_{\omega,\mathrm{eq}}$ なる functional calculus であり、Φ をほどこすことは、single automorphism の時の projection e_m を掛けることに対応している。また "ゴミ" は、$u_n(0)(\text{ゴミ})_0 = u_n(2\pi k)(\text{ゴミ})_1$ となるようにできており、さらにこれを付けることによって coboundary の誤差評価に $\frac{1}{k} \cdot t$ という項を付け加えることになるが、それは最終的には悪い影響を与えないことは上に述べた通りである。今、w は $R_{\omega,\mathrm{eq}}$ の元なのでそれの一成分 w_n を適当にとってさらに極分解して新たに w_n とする。このようにして w_n を得る。

References

[1] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **6**, 133–252 (1973).

[2] A. Connes, *Outer conjugacy class of automorphism of factors*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **8**, 383–420 (1975).

[3] U. Haagerup, *Connes bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1*, Acta Math. **158**, 95–147 (1987).

[4] Y. Kawahigashi, *One-parameter automorphism groups of the injective II_1 factor arising from the irrational rotation C^*-algebra*, Amer. J. Math. **112**, 499–524 (1990).

[5] A. Kishimoto, *A Rohlin property for one-parameter automorphism groups*, Commun. Math. Phys. **179**, 599–622 (1996).