数理解析研究所講究録
1131巻 2000年 53-57

Some classes of q-deformed operators

九州芸工大　太田昇一(Schôichi Ôta)

1. 量子群の理論において、異なった状況で形式的な関係 $xx^*=qx^*x$（ただし、$q>0$, $q\neq1$）に支配された要素 x がしばしば現れます。例えば、1次元 q-deformed quantum plane $\mathbb{C}_q^1$ は上の関係式に支配された1つの生成要素から作られる $*$-代数です。また1992年に Schwenk と Wess によって導入された q-deformed Heisenberg代数は生成元の1つに上に述べた要素 x を含みます。もっと一般に多くの量子群や量子空間は、対応する代数の生成元 x, y に対する定義関係式として等式 $xy=qyx$ を含みます。

上の関係式を満たすヒルベルト空間上の作用素は q-正規と呼ばれ、その作用素からなるクラスは重要であり、それ自身作用素として興味深い性質を持っています。実際、この様な自明でない作用素が非有界でしか存在しえないことは、10年ほど前から知られていました。又、等式 $xy=qyx$ を満たす対

x, yにおいてxが自己共役でyがユニタリーの時は、この様な対の研究はq-正規作用素のそれに帰着します。

一方、量子群の理論において、様々なq-oscillatorが現れます。その1つとして、関係式$xx^*-qx^*x=1$で述べられるものがあります。この式をある条件のもとで満たす既約な閉作用素は、重みを持つ逆シフトになります。明らかに、この様な作用素はq-正規ではありませんから、もっと広いクラスの作用素を考える必要があります。上記の事を念頭において、上に述べたq-正規作用素、更にそれに関連してq-クエイサイ正規作用素とq-ハイポ正規作用素の概念を導入して、それらをヒルベルト空間上の作用素論の範疇において系統的に解析します。ここでは、q-正規を中心に得られた結果を報告します。

2. 定義

イ) Tを稠密な定義域を持つ閉作用素とする。もしも、Tが

$$TT^*=qT^*T$$

を満たす時、Tはq-正規と呼ばれる：

ロ) 上と同じ条件をもつTの極分解を$T=U|T|$とする。このとき、Tが　$U|T|\subset\sqrt{q}|T|U$　を満たすならば、Tはq-クエイサイ正規と呼ばれる；

ハ) 稠密な定義域を持つ作用素が、

$$\mathcal{D}(T)\subseteq\mathcal{D}(T^*),\qquad \|T^*\eta\|\leqq\sqrt{q}\,\|T\eta\|\quad(\eta\in\mathcal{D}(T))$$

を満たすとき、Tを q-ハイポ正規と呼ぶことにする。

このとき，

q-正規 ⇒ q-クエイサイ正規 ⇒ q-ハイポ正規

である。

3．S_uを可分なヒルベルト空間$\mathcal{H}$で稠密な定義域をもつ閉作用素とする。もし、適当な基底$\{e_n\}_{n\geq 0}$と数列$\{w_n\}$ ($w_n\neq 0$, $w_n\in\mathbb{C}$, $n\geq 0$)があって、

$$\mathcal{D}(S_u)=\left\{\sum_{n\geq 0}\alpha_n e_n\in\mathcal{H} : \sum_{n\geq 0}|\alpha_n|^2|w_n|^2<+\infty\right\} \quad \text{かつ}$$

$$S_u e_n = w_n e_{n+1} \quad (n\geq 0)$$

を満たすとき、S_uを weighted shift (unilateral) with weights $\{w_n\}$ という。同様にして両側(bilateral) shift S_bも定義される。

イ) S_uがq-クエイサイ正規のとき，

	σ_p	σ_c	σ_r	σ
$0<q<1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
$q>1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{0\}$

ロ) S_bがq-正規のとき，

	σ_p	σ_c	σ_r	σ
$0<q<1$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$	$\mathbb{C}$
$q>1$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\mathbb{C}$

4.

定理．Tをq-クエイサイ正規とする。その時、ある等距離

作用素Kで　$K^*TK = q^{-1}T$を満たすものが存在する。

<u>系</u>　もしTがq-正規ならば

$$T \cong qT$$（ユニタリー同値）である。

5.

<u>定理</u> (1). Tがq-クエイサイ正規ならば$\sigma(T) \supset \{0\}$。

(2). $T (\neq 0)$がq-正規ならば、$|\sigma(T)|_2 = +\infty$。ただし、$|\cdot|_2$は2次元ルベーグ測度。

6. 稠密な定義域をもち、$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$を満たす作用素Tは、

$T = T_1 + iT_2$,　$\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$,　$T_i \subseteq T_i^*$　$(i = 1, 2)$　なる分解をもつ（一意に決まる）。これをCartesian分解と呼ぶことにする。

<u>定理</u>　Tをq-正規とする。そのとき、以下が成り立つ：

(1) T_1, T_2は閉，

(2) $\sigma(T_1) \cap \sigma(T_2) \ni 0$，

(3) $\ker(T_1) = \ker(T_2) = \ker(T_1^*) = \ker(T_2^*) = \ker T$。

7.

<u>定理</u>　Tをq-正規作用素とする。そのとき、T^n $(n \in \mathbb{N})$はq^{n^2}-正規である。

定理. Tをq-正規とする。そのとき、T_1^n, T_2^n $(n \in \mathbb{N})$ は閉対称作用素で、

$$\mathcal{A}(T_1) = \mathcal{A}(T_2) = \begin{cases} \mathcal{A}(T) & \text{if } 0<q<1 \\ \mathcal{A}(T^*) & \text{if } q>1 \end{cases},$$

ここに $\mathcal{A}(T)$ は T の解析的ベクトル全体からなる集合を示す。

系. (1) $q>1$ かつ T が q-クエイサイ正規ならば、$\mathcal{A}(T)$ は T の核(コア)である。

(2) $0<q<1$ ならば、$\mathcal{A}(T)$ が稠密でない q-正規作用素が存在する。

以上.