数理解析研究所講究録
1133 巻 2000 年 68-71

退化 Garnier 系の解の極集合について

慶応大 理工　下村 俊　(Shun Shimomura)

複素パラメーター t, λ, μ をふくむ線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x-\lambda}\frac{dy}{dx}-\left(4x^3+2tx+2H-\frac{\mu}{x-\lambda}\right)y=0, \tag{1}$$

$$H=\frac{1}{2}\mu^2-2\lambda^3-t\lambda$$

を考える．この方程式は $x=\infty$ において不確定特異点，$x=\lambda$ において指数が $(0,2)$ である対数項を含まない確定特異点をもつ．方程式 (1) がモノドロミーが不変であることは（つまりパラメター t によらない Stokes 係数をもつ解の基本系が存在することは）$\lambda(t), \mu(t)$ が Hamilton 系

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\mu},\qquad \frac{d\mu}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\lambda}$$

を満たすことと同値であり，この時，$\lambda(t)$ は Painlevé 方程式

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2}=6\lambda^2+t \tag{I}$$

を満たす ([2])．H. Kimura は [1] において次の方程式について同様の問題を扱った．

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\sum_{k=1,2}\frac{1}{x-\lambda_k}\right)\frac{dy}{dx} -\left(9x^5+9t_1x^3+3t_2x^2+3K_2x+3K_1-\sum_{k=1,2}\frac{\mu_k}{x-\lambda_k}\right)y=0. \tag{2}$$

ここで $x=\lambda_k\ (k=1,2)$ は $(0,2)$ を指数にもつ対数項を含まない確定特異点である．この対数項を含まないという条件により $K_j\ (j=1,2)$ は $t_k, \lambda_k, \mu_k\ (k=1,2)$ に関するある有理関数として決定される．この方程式についてのモノドロミー不変性は完全積分可能な Hamilton 系

$$\frac{\partial\lambda_k}{\partial t_j}=\frac{\partial K_j}{\partial\mu_k},\quad \frac{\partial\mu_k}{\partial t_j}=-\frac{\partial K_j}{\partial\lambda_k}\quad (j=1,2;k=1,2) \tag{3}$$

に同値である．そしてある適当な正準変換 $q_i = q_i(t, \lambda)$, $p_i = p_i(t, \lambda, \mu)$, $s_i = s_i(t)$ $(i = 1, 2)$, $t = (t_1, t_2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ により (3) は退化 Garnier 系

$$\text{(dG)} \qquad \frac{\partial q_k}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_k} \quad (j = 1, 2; k = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} 3H_1 =& \left(q_2^2 - q_1 - \frac{s_1}{3}\right)p_1^2 + 2q_2p_1p_2 + p_2^2 \\ & \qquad + 9\left(q_1 + \frac{s_1}{3}\right)q_2\left(q_2^2 - 2q_1 + \frac{s_1}{3}\right) - 3s_2q_1, \\ 3H_2 =& q_2p_1^2 + 2p_1p_2 + 9\left(q_2^4 - 3q_1q_2^2 + q_1^2 - \frac{s_1}{3}q_1 - \frac{s_2}{3}q_2\right) \end{aligned}$$

に変換される．系 (dG) は (I)-型の Painlevé 方程式の 2 変数版とみなすことができる．そして (dG) の任意の解は Painlevé property をもつ ([3])．

定理 A. (dG) の任意の解 $\Xi = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ において，各成分は $\mathbf{C}^2$ 上有理型関数である．

系 (dG) の解の各成分は $\mathbf{C}^2$ 内の analytic set に沿って極をもつ．この analytic set の (global な) 既約成分を pole divisor と呼ぶことにする．ここでは Garnier 系の解の pole divisor の形状に関するいくつかの結果を述べる．まず (dG) のすべての解は極をもつことがいえる．

定理 1. 系 (dG) の任意の解の各成分は少なくとも一つの pole divisor をもつ超越有理型関数である．

任意の解 $\Xi = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ に対して, 系 (dG) から得られる式

$$q_1 = -\frac{1}{4}\frac{\partial^2 q_2}{\partial s_2^2} + \frac{3}{2}q_2^2 + \frac{s_1}{6}, \quad p_1 = \frac{3}{2}\frac{\partial q_2}{\partial s_2}, \quad p_2 = -\frac{3}{8}\frac{\partial^3 q_2}{\partial s_2^3} + 3q_2\frac{\partial q_2}{\partial s_2}$$

より $q_2(s_1, s_2)$ についてのみ pole divisor を考えればよいことがわかる．

定理 2. (1) (dG) の任意の解 Ξ の各 pole divisor は次のように表される．

$$\{(s_1, s_2) = (\pi(s), f(s)) \mid s \in \mathcal{R}\} \subset \mathbf{C}^2.$$

ここで

(i) $f(s_1)$ は方程式

$$\text{(E)} \qquad y^{(4)} = -40(y')^3y'' - \frac{143}{9}s_1y'y'' - \frac{4}{3}yy'' - \frac{20}{3}(y')^2 - \frac{11}{6}s_1$$

$('= d/ds_1)$ の解である.

(ii) $\pi : \mathcal{R} \to \mathbf{C}$, $\pi(s) = s_1$ は $f(s_1)$ の分岐 Riemann 面である.

（2） 逆に方程式 (E) の任意の解 $y = \phi(s_1)$ に対し，系 (dG) の解 Ξ_* で analytic set

$$\{(s_1, s_2) = (\pi_*(s), \phi(s)) \mid s \in \mathcal{R}_*\} \subset \mathbf{C}^2$$

をその一つの pole divisor とするようなものが存在する. ここで$\pi_* : \mathcal{R}_* \to \mathbf{C}$, $\pi_*(s) = s_1$ は $\phi(s_1)$ の分岐 Riemann 面である.

方程式 (E) の解については次の結果が成り立つ.

定理 3. （1） すべての $(a, B_0, B_1, B_2) \in \mathbf{C}^4$, に対し方程式 (E) は $s_1 = a$ のまわりで Puiseux 級数で表される解

$$\phi(s_1) = \Phi(B_0, B_1, B_2, 3^{1/3}(s_1 - a)^{1/3}),$$

$$\text{(4)} \qquad \Phi(B_0, B_1, B_2, \sigma) = C_0 - \sigma + \sum_{j \geq 5} C_j\sigma^j,$$

$$C_0 = B_0, \quad C_9 = B_1, \quad C_{11} = B_2$$

をもつ. ここで C_j $(j \geq 5, j \neq 9, 11)$ は a, B_0, B_1, B_2 に関する多項式で一意にきまる.

（2） 方程式 (E) の任意の解 $y = g(s_1)$ に対し，点 $s_1 = a^* \in \mathbf{C}$ の近くの点列 $\{\alpha_\nu \mid \nu \in \mathbf{N}\}$ でつぎのような性質をもつものが存在するとする:

(i) $\alpha_\nu \to a^*$ as $\nu \to \infty$.

(ii) $\{g(\alpha_\nu) \mid \nu \in \mathbf{N}\}$ は有界集合.

このとき $s_1 = a^*$, のまわりでは $g(s_1)$ は解析的であるかもしくは次のように表示される.

$$\text{(5)} \qquad g(s_1) = \Phi(B_0^*, B_1^*, B_2^*, 3^{1/3}(s_1 - a^*)^{1/3}).$$

ここで B_0^*, B_1^*, B_2^* はある複素積分定数である.

さらに pole divisor は局所的には次のような形状をもつ.

定理 4. $\Xi=(q_1,q_2,p_1,p_2)$ を系 (dG) の任意の解とする. Ξ の各 pole divisor 上の任意の点 $(s_1,s_2)=(a_1,a_2)$ の近くでは $q_2(s_1,s_2)$ は次のいずれかの表示式をもつ:

$$q_2(s_1,s_2)=\frac{1}{(s_2-f(s_1))^2}Y(s_1,s_2),$$
$$q_2(s_1,s_2)=\left(\frac{1}{(s_2-\Phi_0(s_1))^2}+\frac{1}{(s_2-\Phi_1(s_1))^2}+\frac{1}{(s_2-\Phi_2(s_1))^2}\right)Y_*(s_1,s_2),$$
$$\Phi_l(s_1)=\Phi(a_2,B,B',\omega^l 3^{1/3}(s_1-a_1)^{1/3}),\quad \omega=\exp(2\pi i/3),\quad l=0,1,2.$$

ここで

(i) $f(s_1)$ は $s_1=a_1$ で解析的な (E) の解で $f(a_1)=a_2$ を満たす.

(ii) $\Phi(\cdot,\cdot,\cdot,\sigma)$ は (4) の形の収束級数で, B,B' はある複素積分定数である.

(iii) $Y(s_1,s_2)$ と $Y_*(s_1,s_2)$ は $(s_1,s_2)=(a_1,a_2)$ で解析的であり $Y(a_1,a_2)=Y_*(a_1,a_2)=1$ を満たす.

この結果からわかるように, 各 pole divisor は他の pole divisor とも, また, 自分自身とも交わることはない.

参考文献

[1] H. Kimura, The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure, Ann. Mat. Pura Appl. **155** (1989), 25–74.

[2] K. Okamoto, Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **33** (1986), 575–618.

[3] S. Shimomura, Painlevé property of a degenerate Garnier system of (9/2)-type and of a certain fourth order non-linear ordinary differential equation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (to appear).