数理解析研究所講究録
1137 巻 2000 年 19-25

A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon for a Zalcman domain (I)

北大 理学研究科　林 実樹廣 (Mikihiro HAYASHI)
北大 理学研究科　小林 保幸 (Yasuyuki KOBAYASHI)
名工大 (名誉教授)　中井 三留 (Mitsuru NAKAI)

$\Delta_0 : 0 < |z| < 1$ を穴あき単位円板とし, その中に数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $1 > c_n \searrow 0$ となるようにとる. $(\tilde{\Delta}_0, \Delta_0, \varphi)$ を限界のない 2 葉被覆面で分岐点が $\{\varphi^{-1}(c_n)\}_{n=1}^{\infty}$ であるものとする. このとき $H^\infty(\tilde{\Delta}_0) = H^\infty(\Delta_0) \circ \varphi$ となることが Myrberg によって示された. これはつまり $z \in \Delta_0 \setminus \{c_n\}$ に対し $\varphi^{-1}(z) = \{z^+, z^-\}$ と表すと, 任意の $f \in H^\infty(\tilde{\Delta}_0)$ に対し $f(z^+) = f(z^-)$ が成り立つということである. 次に Δ_0 内に小閉円板 $\Delta_n = \bar{\Delta}(c_n, r_n)$ を互いに交わらないようにとる. 但し, $\bar{\Delta}(c_n, r_n) = \{z : |z - c_n| \leq r_n\}$. 領域 $R = R(c_n, r_n) = \Delta_0 \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ を Zalcman 領域と呼ぶ. $\tilde{R} = \varphi^{-1}(R)$ とおくと, $(\tilde{R}, R, \varphi)$ は分岐点をもたない 2 葉被覆面である. $H^\infty(\tilde{R}) = H^\infty(R) \circ \varphi$ が成り立っているとき被覆面 $(\tilde{R}, R, \varphi)$ に対して Myrberg 現象が成り立つという.

[1] では, $H^\infty(R)$ に関する次の性質が Myrberg 現象の必要条件となることが示された.

$$f \in H^\infty(R), \lim_{z<0, z\to 0} f^{(m)}(z) = 0 \ (m = 0, 1, 2, \cdots) \implies f \equiv 0 . \tag{1}$$

$H^\infty(R)$ が上の性質 (1) をもつとき, $z = 0$ において一致の定理が成り立つという. 特に $c_n = 2^{-n}$ とし, $r_n = 2^{-nN(n)}$ で正数列 $\{N(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を定めたとき, 一致の定理に関して次の定理 A,B が成り立つことが分かっている ([1]).

定理 A $R = R(2^{-n}, 2^{-nN(n)})$ とすると

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z - 2^{-n}} \in H^\infty(R) \iff \sup_{n \in \mathbf{N}} n\left(N(n) - \frac{n+1}{2}\right) < \infty .$$

定理 B $R = R(2^{-n}, 2^{-nN(n)})$ とする. $H^\infty(R)$ に対し $z = 0$ において一致の定理が成り立つならば, $\lim_{n\to\infty} N(n) = \infty$.

この 2 つの形の定理を用いることで, 一致の定理と Myrberg 現象の関係を調べることができる. これらの結果をより一般の点列 $c_n = 2^{-\nu_n}$ の場合に一般化できることが分かっ

た ([2]). ここでは定理 A, B の一般化について報告し, 一致の定理と Myrberg 現象の関係については引続き同題名 (II) で報告する.

以下 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は条件

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \tag{2}$$

を満たすもを考える. 一致の定理の十分条件を考える上で (1) を満たさない関数を構成したい. その候補が $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z-c_n}$ である. 条件 (2) から, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ がいえるので $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z-c_n}$ は R 上収束していることが分かる. 次の補題は [2] で述べたものより仮定を弱くし, 証明も簡略化してある.

補題 1 $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z-c_n}$ が R 上収束しているとする. このとき,

$$\lim_{z<0, z\to 0} p^{(m)}(z) = 0 \ (m = 0, 1, 2, \cdots) .$$

証明 $g_k(z) := \prod_{n=k+1}^{\infty} \frac{z}{z-c_n}$, $f_k(z) := g_k(z) \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{z-c_n}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくと, 左半平面 Re $z < 0$ で $|z| < |z - c_n|$ より, g_k と f_k はともに Re $z < 0$ で有界である. また, $p(z) = z^k f_k(z)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ と表せる. 更に, ${}_mC_k$ を 2 項係数として

$$p^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m}\{z^{m+1} f_{m+1}(z)\} = \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \frac{(m+1)!}{(k+1)!} z^{k+1} f_{m+1}^{(k)}(z),$$

と表せる. このことから, 任意の $k, m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ に対して $f_k^{(m)}(z)$ が $[-1/2, 0)$ 上有界になることを示せば,

$$\lim_{z<0, z\to 0} p^{(m)}(z) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

がいえる. $z \in [-1/2)$ と $k, m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ に対し, $D = \{z : |z + 1/2| < 1/2\}$ とおくと

$$\begin{aligned} |f_k^{(m)}(z)| &= \left| \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\zeta^{m+1} f_{k+m+1}(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{m!}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial D} |f_{k+m+1}(\zeta)| \int_{\partial D} \left| \frac{\zeta}{\zeta - z} \right|^{m+1} |d\zeta| . \end{aligned}$$

ここで, 写像 $\varphi_z(\zeta) = \zeta/(\zeta - z)$ を考えると, $\varphi_z(\partial D)$ は, 中心 $1/2(1+z)$ 半径 $1/2(1+z)$ の円であることが分かる. よって,

$$\sup_{\zeta \in \partial D, z \in [-1/2, 0)} \left| \frac{\zeta}{\zeta - z} \right| = 2 .$$

従って、$f_k^{(m)}(z)$ は $[-1/2,0)$ 上有界である □

よって, あとは $p(z)$ が $R(c_n,r_n)$ 上有界であることがいえれば, (1) を満たさない関数が構成できたことになる. しかし, $p(z)$ の有界性は小閉円板の半径 r_n に依存するので, 次はこれを考察する. 数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対応して, 数列 $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}, \{N(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を $c_n = 2^{-\nu_n}, r_n = 2^{-\nu_n N(n)}$ で定義する. $\{c_n\}$ は狭義単調減少列で 0 に収束することから, $\{\nu_n\}$ は狭義単調増加列で $\lim_{n\to\infty}\nu_n = \infty$ となっている. また条件 (2) は次と同値である.

$$\liminf_{n\to\infty}(\nu_{n+1}-\nu_n) > 0\ . \tag{3}$$

前述の定理 A は次のように一般化される.

定理 1 $R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)})$ とする. このとき,

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{z}{z-2^{-\nu_n}} \in H^{\infty}(R) \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbf{N}}\nu_n(N(n)-\nu_n^*) < \infty\ .$$

ここで $\nu_n^* := n - \dfrac{\nu_1+\cdots+\nu_{n-1}}{\nu_n}$.

証明 十分性の証明の概略のみを記す. $M_n := \max_{z\in\partial\Delta_n}|p(z)|$ とおくと, $\sup_{z\in R}|p(z)| = \sup_n M_n$ である.

$$\begin{aligned}
M_n &= \max_{z\in\partial\Delta_n}|p(z)| \le \prod_{m=1}^{\infty}\max_{z\in\partial\Delta_n}\left|\frac{z}{z-c_m}\right| \\
&= \prod_{m=1}^{n-1}\max_{z\in\partial\Delta_n}\left|\frac{z}{z-c_m}\right|\cdot\frac{c_n+r_n}{r_n}\cdot\prod_{m=n+1}^{\infty}\max_{z\in\partial\Delta_n}\left|\frac{z}{z-c_m}\right| \\
&= \left(\prod_{m=1}^{n-1}\frac{c_n+r_n}{c_m-(c_n+r_n)}\right)\cdot\frac{c_n+r_n}{r_n}\cdot\prod_{m=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{c_m}{c_n-r_n-c_m}\right) \\
&= \frac{(c_n+r_n)^n}{r_n}\prod_{m=1}^{n-1}\left(\frac{1}{c_m}\cdot\frac{1}{1-(1+r_nc_n^{-1})c_nc_m^{-1}}\right)\prod_{m=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{c_mc_n^{-1}}{(1-r_nc_n^{-1})-c_mc_n^{-1}}\right) \\
&= (1+r_nc_n^{-1})^n\cdot\frac{c_n{}^n}{r_nc_1\cdots c_{n-1}}\prod_{m=1}^{n-1}\frac{1}{1-(1+r_nc_n^{-1})c_nc_m^{-1}} \\
&\qquad\qquad\times\prod_{m=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{c_mc_n^{-1}}{(1-r_nc_n^{-1})-c_mc_n^{-1}}\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで条件 (2) より $0<\delta<1$ と $n_0\in\mathbf{N}$ が存在し, $n_0<k<\ell$ ならば $c_{k+1}c_k^{-1}<\delta$ 更に, $c_\ell c_k^{-1}<\delta^{\ell-k}$ となる. このことを用いて次の 3 式を得る.

$$\sup_n(1+r_nc_n^{-1})^n < \infty$$

$$\sup_n\prod_{m=1}^{n-1}\frac{1}{1-(1+r_nc_n^{-1})c_nc_m^{-1}} < \infty$$

$$\sup_n \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{c_m c_n^{-1}}{(1 - r_n c_n^{-1}) - c_m c_n^{-1}}\right) < \infty\ .$$

従って, $\sup_n M_n < \infty$ となるためには (4) において$\sup_n \dfrac{c_n{}^n}{r_n c_1 \cdots c_{n-1}} < \infty$ であれば十分であることが分かる. これをかきかえて$\sup_n \nu_n(N(n) - \nu_n^*) < \infty$ を得る. □

与えられた 中心列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $p(z) \in H^\infty(R(c_n, r_n))$ であるように小閉円板の半径 r_n をどれだけ小さく, 言い換えれば $N(n)$ をどれだけ大きくできるかという視点で考えたとき, 上の定理は $N(n)$ の大きさは中心列から決まる量 ν_n^* で近似されるということをいっている. そこで数列 $\{\nu_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ の増大度について調べてみると.

命題 1

(a) 任意の $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\{\nu_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ は狭義単調増加列であり, $\nu_n^* \le n$, $\lim_{n\to\infty} \nu_n^* = \infty$ を満たす.

(b) $0 < \sigma_n < 1$ なる任意の数列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\nu_n^* \ge \sigma_n \cdot n$ $(n \in \mathrm{N})$ を満たす $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ が自然数列としてとれる.

(c) $0 < \beta_n \nearrow \infty$ なる任意の数列 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{N}$ とその部分列 $\{\nu_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在し, $\nu_{n_k}^* < \beta_{n_k}$ $(k \in \mathrm{N})$ となる.

証明 (a) $\{\nu_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ が狭義単調増加であることは次の計算から分かる.

$$\begin{aligned} \nu_{n+1}^* - \nu_n^* &= n + 1 - \frac{\nu_1 + \cdots + \nu_n}{\nu_{n+1}} - n + \frac{\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1}}{\nu_n} \\ &= 1 - \frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} + (\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1})\left(\frac{1}{\nu_n} - \frac{1}{\nu_{n+1}}\right) \\ &> 0\ . \end{aligned}$$

また, 任意の $m \in \mathrm{N}$ に対して $n(m) \in \mathrm{N}$ が存在し, $n \ge n(m)$ ならば $\nu_n > 2\nu_{m-1}$ となる. 従って, $n \ge n(m)$ ならば $\nu_j/\nu_n < 1/2$ $(j = 1, \cdots, m-1)$. よって,

$$\begin{aligned} \nu_n^* &= 1 + \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu_n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{\nu_{m-1}}{\nu_n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n}\right) \\ &\ge \frac{1}{2}m\ . \end{aligned}$$

m は任意であったから, $\lim_{n\to\infty} \nu_n^* = \infty$.

(b) $\{\nu_\ell\}_{\ell=1}^{n}$ までとれたとする. ν_{n+1} を $\nu_n/\nu_{n+1} < 1-\sigma_{n+1}$ を満たすようにとれば,

$$\begin{aligned}
\nu_{n+1}^{*} &= 1+\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_{n+1}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}}\right) \\
&\geq (n+1)\left(1-\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}}\right) \\
&> (n+1)\sigma_{n+1}.
\end{aligned}$$

(c) $n_1 < \cdots < n_{\ell-1}$ と $\{\nu_n\}_{n=1}^{n_{\ell-1}}$ までとれたとして, 以下のように $n_\ell\,(> n_{\ell-1})$ と $\{\nu_n\}_{n=n_{\ell-1}+1}^{n_\ell}$ を定めればよい. $\varepsilon > 0$ を固定しておく. $\beta_n \nearrow \infty\ (n \to \infty)$ であるから

$$n_\ell > n_{\ell-1} \quad \text{かつ} \quad \beta_{n_\ell} > n_{\ell-1}+1+\varepsilon$$

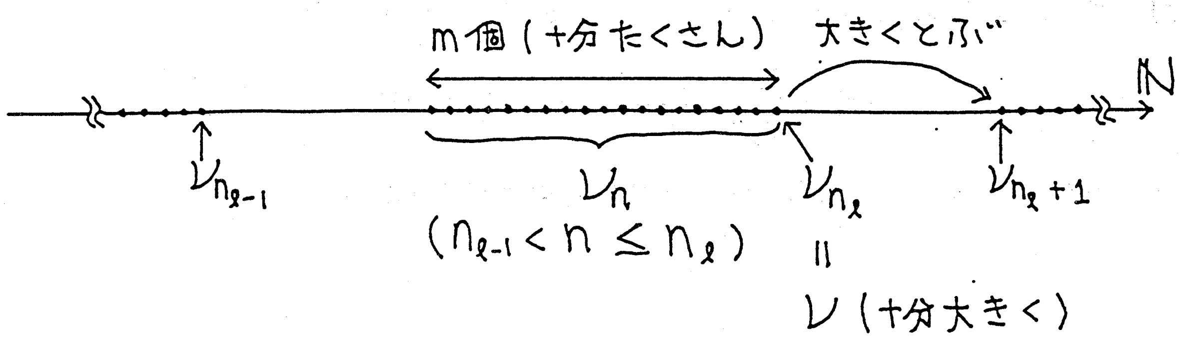
を満たすように $n_\ell \in \mathrm{N}$ がとれる. ここで, $m = n_\ell - n_{\ell-1} - 1$ に対し $\nu > \max\{m, m^2/\varepsilon\}$ を満たす $\nu \in \mathrm{N}$ をとると,

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{\nu-m}{\nu}\right)+\cdots+\left(1-\frac{\nu-2}{\nu}\right)+\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right) \\
&< m\left(1-\frac{\nu-m}{\nu}\right) = \frac{m^2}{\nu} < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

そこで $n_{\ell-1} < n \leq n_\ell$ なる n に対して ν_n を $\nu_n = \nu - (n_\ell - n)$ で定義すれば,

$$\begin{aligned}
\nu_{n_\ell}^{*} &= 1+\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_{n_\ell}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{\nu_{n_{\ell-1}}}{\nu_{n_\ell}}\right) \\
&\quad +\left(1-\frac{\nu_{n_{\ell-1}+1}}{\nu_{n_\ell}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{\nu_{n_\ell-1}}{\nu_{n_\ell}}\right) \\
&< n_{\ell-1}+1+\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

従って, $\nu_{n_\ell}^{*} \leq n_{\ell-1}+1+\varepsilon < \beta_{n_\ell}$. 数列 $\{\nu_n\}$ の模式図は下に示す. □



この命題により $N(n)$ について次のことが分かる. (a) $N(n)$ は常に $N(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ となるようにとれ, 最大の増大度は n である. (b) 適当な中心列に対しては $N(n)$ はいくらでも n に近くとれる. (c) 中心列によっては $N(n)$ は非常にゆっくりとしか増加できない. 以下, 具体例でこのことを確かめてみる.

例 $\nu_n = n$ とすると,

$$\nu_n^* = n - \frac{1 + \cdots + (n-1)}{n} = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}\ .$$

これは定理 A そのものである. $\nu_n = a^n$ $(a > 1)$ とすると,

$$\nu_n^* = n - \frac{a + \cdots + a^{n-1}}{a^n} = n - \frac{a(a^{n-1}-1)}{a^n(a-1)} \approx n - \frac{1}{a-1}\ .$$

$\nu_n = n!$ とすると,

$$\nu_n^* = n - \frac{1! + \cdots + (n-1)!}{n!} < n - \frac{(n-2)(n-2)! + (n-1)!}{n!} = n - \frac{2}{n}\ .$$

これは命題 1(b) を説明する例である.

最後に定理 の一般化について述べる. 尚, この証明はもとのものより若干簡単なものになっている.

定理 2 $R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)})$ とする. $H^\infty(R)$ に対し $z = 0$ において一致の定理が成り立つならば, $\lim_{n\to\infty} N(n) = \infty$.

証明 対偶を示す. $\liminf_{n\to\infty} N(n) < \infty$ と仮定する. このとき, 正定数 μ と自然数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(n_k < n_{k+1})$ が存在して, $N(n_k) \le \mu$ $(k \in \mathrm{N})$ となる. ここで $\nu'_k := \nu_{n_k}, N'(k) := \mu$ とおくと, 次の包含関係が成り立つ.

$$R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)}) \subset R(2^{-\nu_{n_k}}, 2^{-\nu_{n_k} N(n_k)}) \subset R(2^{-\nu'_k}, 2^{-\nu'_k N'(k)}) =: R'\ .$$

命題 1 の (a) より, $\sup_{k\in\mathrm{N}} \nu'_k(N'(k) - \nu'^*_k) < \infty$ であるから, 定理 1 より

$$q(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z}{z - 2^{-\nu'_k}} \in H^\infty(R') \subset H^\infty(R)\ .$$

従って $H^\infty(R)$ に対し $z = 0$ において一致の定理は成り立たない. $\square$

References

[1] M. Hayashi and M. Nakai, *A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon*, J. d'Analyse Math. **76** (1998), 109-136.

[2] M. Hayashi, Y. Kobayashi and M. Nakai, *A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon for a Zalcman domain*, preprint.