

# 散逸のある Kerr 媒質による光子数の量子非破壊測定

筑波大物理\*

遠藤幸夫 (Yukio ENDO) †, 有光敏彦 (Toshihico ARIMITSU) ‡

## 1 導入

量子非破壊測定 (Quantum Non-Demolition Measurement, 以下 QND 測定) とは, 被測定量に共役な物理量の不確定さを増加させるという犠牲を払う代わりに, 被測定量の自由な時間発展を乱さないような測定である [1]-[3]. これは, 重力波検出における量子限界を克服するために, Braginsky が 1974 年に提案した概念である. 光に対する QND 測定の研究は, 1980 年頃から始まったが, 当時は, 「QND 測定が可能となる Hamiltonian はどのようなものであるか?」という問題を議論の中心にしていた. そのため, それらは, 物理的実現性にあまり注意が払われていない [4]. 物理的実現性を考慮したものの一つとして, 井元らが提案した光子数の QND 測定があげられる [5]. これは, signal 光 (被測定光) と probe 光とを光 Kerr 効果によって相互作用させ, probe 光の位相に signal 光の光子数の情報を持たせる. そして, 干渉計を用いて probe 光の位相を電流として測定し, signal 光の光子数を破壊せずに読みとるというものである. ここでは, 光 Kerr 媒質は入射光を全く吸収しないものとして扱って, 光子数の QND 測定を考えている.

ところが, 我々が目にする測定装置は, 全く光吸収のない媒質は存在せず, 必ず入射光の強度の一部を吸収する. つまり, 物理的実現性を考えるのであれば, 少なくとも光 Kerr 媒質による散逸の効果を考慮しなければならない. そこで, 井元らは, 入射光の一部のみを通過させる損失板 (loss plate) を便宜上考え, それを用いることで, 媒質による散逸効果を取り入れた [6]. この損失板は, 簡単に散逸効果を表す意味で有効的であるが, 系のダイナミクスをきちんと与えていない.

一方, Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics (NETFD) [7]-[9] では, 非平衡散逸系を正準演算子形式の場の理論として記述できることが知られている. そこで我々は, 井元らが提案した光 Kerr 媒質による光子数の QND 測定問題を, 散逸のある Kerr 媒質の問題に拡張し, NETFD の体系で定式化した. その結果として, 井元らが提案した光子数の QND 測定装置では, 測定精度に散逸による限界が現れることが明らかになった.

## 2 散逸を考慮しない場合の QND 測定

ここでは, signal 光と probe 光とを相互作用させる Kerr 媒質の部分を考察する. 散逸効果を考慮しない場合, signal 光と probe 光についての Hamiltonian ( $\hbar = 1$ ) は

$$H = H_s + H_p + H_I, \quad (1)$$

\* Institute of Physics, University of Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan

† endo@cm.ph.tsukuba.ac.jp

‡ arimitsu@cm.ph.tsukuba.ac.jp

である。添字  $s, p$  はそれぞれ signal 系と probe 系を表し、正準交換関係を満たす生成消滅演算子  $a^\dagger, a$  を導入すると、

$$H_s = \omega_s a_s^\dagger a_s, \quad H_p = \omega_p a_p^\dagger a_p, \quad (2)$$

$$H_I = \lambda a_s^\dagger a_s a_p^\dagger a_p, \quad (3)$$

である。  $\lambda$  は Kerr 効果の強さを表す定数である。この  $H$  は signal 系と probe 系に関して対称であることがわかる。

signal の消滅演算子  $a_s(t)$  と光子数演算子  $\tilde{n}_s(t)$  の Heisenberg 方程式は、

$$\frac{d}{dt} a_s(t) = -i(\omega_s + \lambda \tilde{n}_p(t)) a_s(t), \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{n}_s(t) = \frac{da_s^\dagger(t)}{dt} a_s(t) + a_s^\dagger(t) \frac{da_s(t)}{dt} = 0. \quad (5)$$

で与えられる。(5)より、signalの光子数 $\tilde{n}_s(t)$ は運動の恒量である。また、 $H$ の対称性から probe 光の光子数 $\tilde{n}_p(t)$ も、(5)で $s \rightarrow p$ と置き換えたものを満たすので、運動の恒量である。そのため、(4)の右辺の $\tilde{n}_p(t)$ は、時間について定数となるので積分できて、

$$\tilde{n}_s(t) = \tilde{n}_s, \quad (6)$$

$$a_s(t) = a_s e^{-i(\omega_s + \lambda \tilde{n}_p)t}, \quad (7)$$

$$a_p(t) = a_p e^{-i(\omega_p + \lambda \tilde{n}_s)t}. \quad (8)$$

である。(6)からわかるように、被測定量の signal の光子数は、Kerr 効果の影響を受けない。また、(8)から、probe 光  $a_p(t)$  の位相は、 $\tilde{n}_s$  を含むことがわかる。

ここで、signal 光、probe 光は媒質入射時 ( $t = 0$ ) に coherent 状態であると仮定する。

$$a_s |\alpha_s\rangle_s = \alpha_s |\alpha_s\rangle_s, \quad \alpha_s = |\alpha_s| e^{i\theta_s}, \quad (9)$$

$$a_p |\alpha_p\rangle_p = \alpha_p |\alpha_p\rangle_p, \quad \alpha_p = |\alpha_p| e^{i\theta_p}. \quad (10)$$

(7) を  $|\alpha_s\rangle_s$  に作用すると

$$a_s(t) |\alpha_s\rangle_s = \alpha_s e^{-i(\omega_s + \lambda \tilde{n}_p)t} |\alpha_s\rangle_s. \quad (11)$$

となる。つまり、Kerr 効果は、媒質入射前の光の固有状態 (coherent 状態) を変えないことがわかる。ただし、固有値の位相が時間と共に変化する。同様に、probe 光の固有状態も変えないことが示せる。 $\langle \dots \rangle_{sp}$  を、signal の状態  $|\alpha_s\rangle_s$  と probe の状態  $|\alpha_p\rangle_p$  についての期待値を表すことにし、signal 光の光子数の期待値、分散を求めると、

$$\langle \tilde{n}_s(t) \rangle_{sp} = |\alpha_s|^2, \quad \langle (\Delta \tilde{n}_s(t))^2 \rangle_{sp} = |\alpha_s|^2. \quad (12)$$

を得る。

以上より、Kerr 効果は媒質入射前後で光の固有状態を変えないため、被測定量  $\tilde{n}_s(t)$  に影響を与えないこと、さらに、probe 光  $a_p(t)$  の位相から、被測定量  $\tilde{n}_s$  の情報が取り出せることが示された。

### 3 signal光と散逸的Kerr媒質

次に, signal光のみが散逸的媒質に入射した場合の時間発展を考察する. signal光は時刻 $t'$ に散逸的Kerr媒質に入射し, 時刻 $t' + t_1$ に媒質から出射すると仮定する.

NETFDでの時間発展生成演算子は, hat-Hamiltonian で与えられる. また, 非チルド演算子とチルド演算子の2種類の演算子を導入することで散逸的現象も演算子形式で扱えることが知られている [7]-[9]. signal系の hat-Hamiltonian ( $\hbar = 1$ ) は,

$$\hat{H}_s = \omega_s(a_s^\dagger a_s - \tilde{a}_s^\dagger \tilde{a}_s) + i\hat{\Pi}_s, \quad (13)$$

$$\hat{\Pi}_s = -\kappa_s \left[ (1 + 2\bar{n}_s)(a_s^\dagger a_s + \tilde{a}_s^\dagger \tilde{a}_s) - 2(1 + \bar{n}_s)a_s \tilde{a}_s - 2\bar{n}_s a_s^\dagger \tilde{a}_s^\dagger \right] - 2\kappa_s \bar{n}_s, \quad (14)$$

である. ただし,  $\hat{\Pi}_s$ はsignal光の散逸項である. また,  $\kappa_s$ は, Kerr媒質による振幅の減衰率を表し,  $\bar{n}_s$ は, 温度 $T$ の媒質と熱平衡状態にある光子のPlanck分布 ( $k_B = 1$ );

$$\bar{n}_s = \left( e^{\omega_s/T} - 1 \right)^{-1},$$

を表す. 非チルド演算子とチルド演算子は, それぞれ正準交換関係が成り立つ.

$$[a_s, a_s^\dagger] = 1, \quad [\tilde{a}_s, \tilde{a}_s^\dagger] = 1. \quad (15)$$

また, 非チルド演算子とチルド演算子は, 同時刻で可換である.

NETFDでの observable  $\mathcal{A}$  の Heisenberg 表示, Heisenberg 方程式は, それぞれ

$$\mathcal{A}(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \mathcal{A} e^{-i\hat{H}t}, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) = i[\hat{H}(t), \mathcal{A}(t)]. \quad (16)$$

で与えられる.  $t' \leq t \leq t' + t_1$  に対する, signalの生成消滅演算子 $a_s^\dagger(t)$ ,  $a_s(t)$ のHeisenberg方程式は

$$\frac{d}{dt} a_s^\dagger(t) = i \left[ 2i\kappa_s (1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s(t) + \{\omega_s - i\kappa_s (1 + 2\bar{n}_s)\} a_s^\dagger(t) \right], \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} a_s(t) = -i \left[ \{\omega_s - i\kappa_s (1 + 2\bar{n}_s)\} a_s(t) + 2i\kappa_s \bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger(t) \right], \quad (18)$$

で与えられる. ここで, (18)の両辺のエルミート共役( $\dagger$ )をとってみても, (17)にはならない. このことから, 散逸現象を表すためには2種類の演算子が必要であることがわかる. (17), (18)を解くと,

$$a_s^\dagger(t) = e^{i\omega_s t} \left[ \{-\bar{n}_s a_s^\dagger + (1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s\} e^{-\kappa_s(t-t')} + (1 + \bar{n}_s) \{a_s^\dagger - \tilde{a}_s\} e^{\kappa_s(t-t')} \right], \quad (19)$$

$$a_s(t) = e^{-i\omega_s t} \left[ \{(1 + \bar{n}_s) a_s - \bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger\} e^{-\kappa_s(t-t')} - \bar{n}_s \{a_s - \tilde{a}_s^\dagger\} e^{\kappa_s(t-t')} \right], \quad (20)$$

となり, 散逸を考慮した場合の生成消滅演算子を得る.

(19), (20) より,  $t' \leq t \leq t' + t_1$  での signal 光子数  $\tilde{n}_s(t)$  は,

$$\begin{aligned} \tilde{n}_s(t) = & \left[ (1 + \bar{n}_s) a_s^\dagger - (1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s \right] \cdot \left[ (1 + \bar{n}_s) a_s - \bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger \right] \\ & + \left[ -\bar{n}_s a_s^\dagger + (1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s \right] \cdot \left[ -\bar{n}_s a_s + \bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger \right] \\ & + e^{2\kappa_s(t-t')} \left[ (1 + \bar{n}_s) a_s^\dagger - (1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s \right] \cdot \left[ -\bar{n}_s a_s + \bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger \right] \\ & + e^{-2\kappa_s(t-t')} \left[ -\bar{n}_s a_s^\dagger + (1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s \right] \cdot \left[ (1 + \bar{n}_s) a_s - \bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger \right], \end{aligned} \quad (21)$$

を得る.

ここで, signal 系は,  $t = 0$  で coherent 状態

$$|\alpha_s, \alpha_s\rangle_s, \quad \alpha_s = |\alpha_s| e^{i\theta}, \quad (22)$$

とする. ただし, NETFD では, 一般に coherent 状態を次のように定義される.

$$a_s |\beta_s, \gamma_s\rangle_s = \beta_s |\beta_s, \gamma_s\rangle_s, \quad \tilde{a}_s |\beta_s, \gamma_s\rangle_s = \gamma_s^* |\beta_s, \gamma_s\rangle_s. \quad (23)$$

(20) を (22) に作用すると, 有限温度では, 散逸があることにより, 時間発展と共に coherent 状態からずれてくることがわかる. しかし, 絶対零度では,

$$a_s(t) |\alpha_s, \alpha_s\rangle_s = a_s e^{-\kappa_s(t-t')} e^{-i\omega_s t} |\alpha_s, \alpha_s\rangle_s = \alpha_s e^{-\kappa_s(t-t')} e^{-i\omega_s t} |\alpha_s, \alpha_s\rangle_s. \quad (24)$$

であり, 散逸があっても coherent 状態は保たれる.

$\langle \dots \rangle_s$  を, signal の状態  $|\alpha_s, \alpha_s\rangle_s$  についての期待値を表すことにし, signal 光の光子数の期待値, 分散を求めると,

$$\langle \tilde{n}_s(t) \rangle_s = |\alpha_s|^2 e^{-2\kappa_s(t-t')} + \bar{n}_s(t), \quad (25)$$

$$\langle (\Delta \tilde{n}_s(t))^2 \rangle_s = |\alpha_s|^2 e^{-2\kappa_s(t-t')} + 2\bar{n}_s(t) |\alpha_s|^2 e^{-2\kappa_s(t-t')} + \bar{n}_s(t) (\bar{n}_s(t) + 1), \quad (26)$$

を得る. ただし,

$$\bar{n}_s(t) \equiv \bar{n}_s (1 - e^{-2\kappa_s(t-t')}), \quad (27)$$

とした. 物理的には, (25) の右辺第一項は散逸による coherent 光の減衰を, また第二項は (黒体輻射による) incoherent 光の増加を表す. さらに, (26) の右辺第一項, 第三項は, coherent 光, incoherent 光の揺らぎを, 第二項は, coherent 光と incoherent 光の相関を表す.

## 4 Kerr 効果の影響

散逸的 Kerr 媒質に probe 光を入射し, signal 光の光子数が, probe 光との相互作用の影響を受けるかを調べる. また, 時刻  $t' \leq t \leq t' + t_1$  の間だけ, signal 光と probe 光は相互作用するものとする.

signal 系と probe 系との hat-Hamiltonian は

$$\hat{H}_d = \hat{H}_s + \hat{H}_p + \hat{H}_I, \quad (28)$$

であり,

$$\hat{H}_j = \hat{H}_j^0 + i\hat{\Pi}_j, \quad (\text{for } j = s, p) \quad (29)$$

$$\hat{H}_j^0 = \omega_j (a_j^\dagger a_j - \tilde{a}_j^\dagger \tilde{a}_j), \quad (30)$$

$$\hat{\Pi}_j = -\kappa_j \left[ (1 + 2\bar{n}_j) (a_j^\dagger a_j + \tilde{a}_j^\dagger \tilde{a}_j) - 2(1 + \bar{n}_j) a_j \tilde{a}_j - 2\bar{n}_j a_j^\dagger \tilde{a}_j^\dagger \right] - 2\kappa_j \bar{n}_j, \quad (31)$$

$$\hat{H}_I = \frac{\sqrt{F}}{t_1} (a_s^\dagger a_s a_p^\dagger a_p - \tilde{a}_s^\dagger \tilde{a}_s \tilde{a}_p^\dagger \tilde{a}_p), \quad (32)$$

である.  $\hat{\Pi}_j$ は光子 $j$ の散逸の効果を,  $\hat{H}_I$ はKerr効果を表す項である.  $\kappa_s, \kappa_p$ は, それぞれKerr媒質による signal 光, 及び probe 光の振幅の減衰率を表す.  $\sqrt{F}$ は, Kerr効果の強さを表す定数である.  $\kappa_s, \kappa_p, \sqrt{F}$ はKerr媒質に関わる特性であるため, signal 光と probe 光が相互作用している時間 ( $t' \leq t \leq t' + t_1$ ) 以外ではすべて0になる. さらに,  $\bar{n}_j$ は, 温度 $T$ のKerr媒質と熱平衡状態にある光子 $j$ の Planck 分布 ( $k_B = 1$ )

$$\bar{n}_j = (e^{\omega_j/T_m} - 1)^{-1}, \quad (\text{for } j = s, p) \quad (33)$$

である. signal 系, probe 系の生成消滅演算子は正準交換関係が成り立つ.

$$[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}, \quad [\tilde{a}_j, \tilde{a}_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}, \quad (\text{for } j, j' = s, p). \quad (34)$$

signal 光の光子数  $\tilde{n}_s(t)$  の Heisenberg 方程式を求めると  $t' \leq t \leq t' + t_1$  に対しては,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{n}}_s(t) = (4\Gamma_p^2)^{-1} & \left\{ [(\Gamma_p + f_p) a_s^\dagger - 2(1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s] \cdot [(\Gamma_p + f_p) a_s - 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger] \right. \\ & + e^{2\kappa_s \Gamma_p (t-t')} [(\Gamma_p + f_p) a_s^\dagger - 2(1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s] \cdot [(\Gamma_p - f_p) a_s + 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger] \\ & + [(\Gamma_p - f_p) a_s^\dagger + 2(1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s] \cdot [(\Gamma_p - f_p) a_s + 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger] \\ & \left. + e^{-2\kappa_s \Gamma_p (t-t')} [(\Gamma_p - f_p) a_s^\dagger + 2(1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s] \cdot [(\Gamma_p + f_p) a_s - 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger] \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

ただし,

$$\Gamma_p \equiv \left[ 1 + i(1 + 2\bar{n}_s) \frac{\sqrt{F}}{\kappa_s t_1} \hat{n}_p - \left( \frac{\sqrt{F}}{2\kappa_s t_1} \hat{n}_p \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (36)$$

$$f_p \equiv (1 + 2\bar{n}_s) + i \frac{\sqrt{F}}{2\kappa_s t_1} \hat{n}_p, \quad (37)$$

$$\hat{n}_p \equiv \tilde{n}_p - \tilde{\tilde{n}}_p. \quad (38)$$

である. (35) から,  $\tilde{n}_s(t)$  は, Kerr効果の影響を表す  $\sqrt{F}$  を含む. この  $\sqrt{F}$  は必ず  $\hat{n}_p$  の積として現れる.  $\hat{n}_p$  は, probe 系の任意の状態に対して, 期待値0を与える. そのため, signal 光子数の高次の期待値を考える範囲では, Kerr効果の影響は現れない.

時刻  $t (\geq t' + t_1)$  での signal 系の生成消滅演算子を求めると,

$$a_p^\dagger(t) = e^{i\omega_p t} e^{i\sqrt{F} N_s} \left[ \left\{ -(2\Gamma_s)^{-1} (f_s - \Gamma_s) a_p^\dagger + (\Gamma_s)^{-1} (1 + \bar{n}_p) \tilde{a}_p \right\} e^{-\kappa_p \Gamma_s t_1} \right. \\ \left. + \left\{ (2\Gamma_s)^{-1} (f_s + \Gamma_s) a_p^\dagger - (\Gamma_s)^{-1} (1 + \bar{n}_p) \tilde{a}_p \right\} e^{\kappa_p \Gamma_s t_1} \right], \quad (39)$$

$$a_p(t) = e^{-i\omega_p t} e^{-i\sqrt{F} N_s} \left[ \left\{ (2\Gamma_s)^{-1} (f_s + \Gamma_s) a_p - (\Gamma_s)^{-1} \bar{n}_p \tilde{a}_p^\dagger \right\} e^{-\kappa_p \Gamma_s t_1} \right. \\ \left. - \left\{ (2\Gamma_s)^{-1} (f_s - \Gamma_s) a_p - (\Gamma_s)^{-1} \bar{n}_p \tilde{a}_p^\dagger \right\} e^{\kappa_p \Gamma_s t_1} \right], \quad (40)$$

を得る。ここで、 $N_s$  は signal 光の光子数の Kerr 媒質中での時間平均を表わす物理量である。

$$N_s = \frac{1}{2t_1} \int_{t'}^{t'+t_1} dt (\tilde{n}_s(t) + \tilde{\tilde{n}}_s(t)) \\ = (8\Gamma_p^2)^{-1} \left\{ A_1 + \tilde{A}_1 + \frac{e^{2\kappa_s \Gamma_p t_1} - 1}{\kappa_s \Gamma_p t_1} A_2 + \frac{1 - e^{-2\kappa_s \Gamma_p t_1}}{\kappa_s \Gamma_p t_1} A_3 \right\}. \quad (41)$$

ただし,

$$A_1 = 2 \left\{ (\Gamma_p^2 + f_p^2) a_s^\dagger a_s - 2(1 + \bar{n}_s) f_p a_s \tilde{a}_s - 2\bar{n}_s f_p a_s^\dagger \tilde{a}_s^\dagger + 4\bar{n}_s (1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s \tilde{a}_s^\dagger \right\}, \quad (42)$$

$$A_2 = [(\Gamma_p + f_p) a_s^\dagger - 2(1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s] \cdot [(\Gamma_p - f_p) a_s + 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger], \quad (43)$$

$$A_3 = [(\Gamma_p - f_p) a_s^\dagger + 2(1 + \bar{n}_s) \tilde{a}_s] \cdot [(\Gamma_p + f_p) a_s - 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger]. \quad (44)$$

である。(39), (40) より, probe 光の位相から signal の光子数情報が得られることがわかる。

ここで, signal, probe 系は  $t = 0$  に coherent 状態であると考える。

$$|\alpha_j, \alpha_j\rangle_j, \quad \alpha_j = |\alpha_j| e^{i\theta_j}, \quad (\text{for } j = s, p). \quad (45)$$

ただし,

$$a_j |\beta_j, \gamma_j\rangle_j = \beta_j |\beta_j, \gamma_j\rangle_j, \quad \tilde{a}_j |\beta_j, \gamma_j\rangle_j = \gamma_j^* |\beta_j, \gamma_j\rangle_j, \quad (46)$$

である。(40) を (45) に作用させると, 有限温度においては  $t > 0$  で coherent 状態ではなくなっていることが示せる。しかし, 絶対零度に対しては

$$a_p(t) |\alpha_p, \alpha_p\rangle_p = \alpha_p e^{-\kappa_p t_1} e^{-i\omega_p t} e^{-i\sqrt{F}(\tilde{n}_s/2 + N_s)} |\alpha_p, \alpha_p\rangle_p, \quad (47)$$

であり, 媒質入射前にあった coherent 状態が, 媒質出射後にも保たれることがわかる。ただし, 固有値の絶対値と位相が変化する。同様に, signal 光についても絶対零度系に対しては, coherent 状態が保たれることが示せる。

$\langle \cdots \rangle_{sp}$  を (45) についての期待値を表すことにし, signal 光の光子数の期待値, 分散を求めると,

$$\langle \tilde{n}_s(t) \rangle_{sp} = |\alpha_s|^2 e^{-2\kappa_s(t-t')} + \bar{n}_s(t), \quad (48)$$

$$\langle (\Delta \tilde{n}_s(t))^2 \rangle_{sp} = |\alpha_s|^2 e^{-2\kappa_s(t-t')} + 2\bar{n}_s(t) |\alpha_s|^2 e^{-2\kappa_s(t-t')} + \bar{n}_s(t) (\bar{n}_s(t) + 1), \quad (49)$$

を得る。ただし、これらの式は、probe系の任意の状態に対して成り立つ。また、光子数の期待値とその分散は、probe光と相互作用のない場合（Kerr効果のない場合）の期待値(25)、分散(26)と一致する。

以上より、絶対零度近似では散逸的Kerr媒質は、その前後で光の固有状態を変えないことがわかる。また、被測定量 $\hat{n}_s(t)$ はc-数のレベルでは散逸的Kerr媒質の影響を受けないこと、さらに、probe光 $a_p(t)$ の位相から、 $\hat{n}_s$ の情報が取り出せることが示せた。

## 5 散逸的Kerr媒質によるQND測定

以下では、probe光の位相からsignal光の光子数を読みとる部分、つまり、実験装置系について考察する [5]。

### 5.1 実験配置

図1に、実験装置系の配置図を示す。配置図にあるM1,M2の鏡の反射率は1である。signal

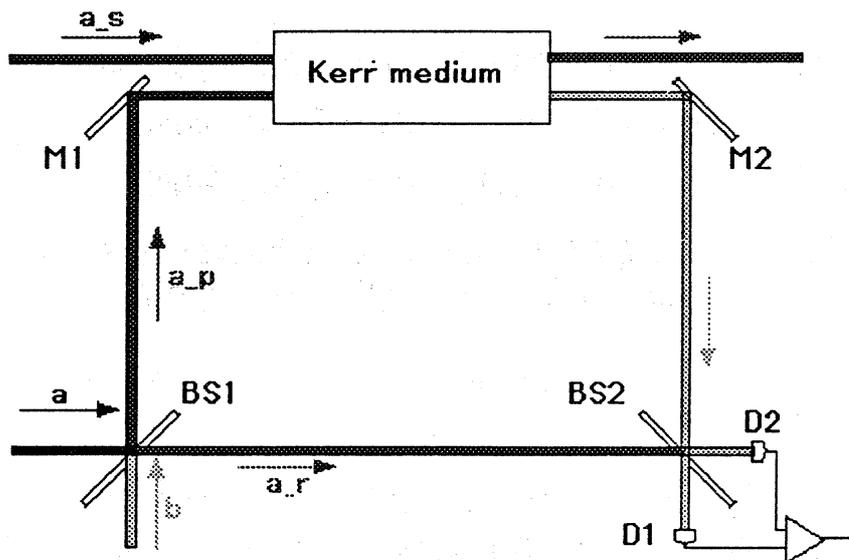


図 1: 井元らが提案した測定装置図

光 $a_s$ は、図の左側から光Kerr媒質に入射し、右側に抜ける。一方、probe laser光 $a$ はビームスプリッター1（以下、BS1）で、光路1,光路2に分けられる。光路1のprobe光 $a_p$ は、M1,光Kerr媒質、M2の順に通過した後、ビームスプリッター2（以下、BS2）において光路2のreference光 $a_r$ と合流する。全系は、probe laser光に対して、干渉計になっていて、光路1,光路2の位相差を測定できる。実際には、まず、光電効果を用いる光検出器で、probe光とreference光を電流 $I$ に変換する。電流 $I$ から、位相差を測ることができ、その結果signalの光子数を読み出すのである。

## 5.2 ビームスプリッター

干渉計に設置されたビームスプリッターについて考察する。まず、BS1の周辺を考えることにする。probe laser系の消滅演算子を $a$ とすると、BS1は反射率 $R$ （透過率 $1-R$ ）で、 $a$ をprobe光 $a_p$ とreference光 $a_r$ に分離する。その際、BS1の空いたポートから真空状態のquantum noise  $b$ が混入する。BS1から出力されるprobe光 $a_p$ とreference光 $a_r$ は、probe laser  $a$ とquantum noise  $b$ から次のユニタリー変換によって表わすことができる。

$$a_p = \sqrt{R} a + \sqrt{1-R} b, \quad a_r = -\sqrt{1-R} a + \sqrt{R} b. \quad (50)$$

この入出力関係は交換関係を保存し、エネルギー保存則（入射光子数の和は出射光子数の和）を満たす。

BS1に入射するprobe laser入力系 $a$ に対しては、正準交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad (51)$$

が成り立つ。また、その状態はcoherent状態であるとする。

$$|\alpha_a, \alpha_a\rangle_a, \quad \alpha_a = |\alpha_a| e^{i\theta_a}. \quad (52)$$

ただし、

$$a|\beta_a, \gamma_a\rangle_a = \beta_a|\beta_a, \gamma_a\rangle_a, \quad \tilde{a}|\beta_a, \gamma_a\rangle_a = \gamma_a^*|\beta_a, \gamma_a\rangle_a, \quad (53)$$

である。

BS1の空いたポートから混入するquantum noise系 $b$ に対しては、正準交換関係

$$[b, b^\dagger] = 1, \quad [\tilde{b}, \tilde{b}^\dagger] = 1, \quad (54)$$

が成り立つ。また、その状態は絶対零度の真空状態

$$|0, 0\rangle_b, \quad (55)$$

であるとする。NETFDでは、number状態を次のように定義する。

$$b^\dagger b |m, n\rangle_b = m |m, n\rangle_b, \quad \tilde{b}^\dagger \tilde{b} |m, n\rangle_b = n |m, n\rangle_b. \quad (56)$$

次にBS2の周辺を考えることにする。BS2で、Kerr媒質を通過した後のprobe光 $a_p$ とreference光 $a_r$ とが合流する。このBS2は、反射率：透過率 = 1：1の半透鏡である。BS2通過後、下向きに進む光を $f$ 、右向きに進む光を $g$ とする。 $f$ 、 $g$ はそれぞれ光検出器 $D_1$ 、 $D_2$ で検出され、その光子は電流に変換される。それら電流の差を実際の測定量（電流 $I$ ）として検出する。BS2から出力される $f$ と $g$ は、probe光 $a_p$ とreference光 $a_r$ から次のユニタリー変換によって表わすことができる。

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_r - a_p), \quad g = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_r + a_p). \quad (57)$$

光検出器  $D_1$  での様子を考察する. 光検出器は, その原理に光電効果を用いるものとし, 理想的に光子1個が入射すると電子1個を発生するものとする (変換効率は1である). 検出時間  $\tau$  の間に, 光検出器  $D_1$  に入射する光子数は  $f^\dagger f$  なので, 発生する電流は,  $(e/\tau)f^\dagger f$  である. ただし,  $e$  は電子の電荷とした. 光検出器  $D_2$  についても全く同じ装置を考えると, 発生する電流は,  $(e/\tau)g^\dagger g$  である. 測定される電流  $I$  は, 二つの光検出器からの電流の差が現れるように制御する. 測定される電流の演算子は

$$I = \frac{e}{\tau} (f^\dagger f - g^\dagger g). \quad (58)$$

と表すことができる.

### 5.3 電流演算子

BS2 通過後の光はそれぞれ光検出器により光電子に変換され, それらの差が電流  $I$  として測定される. ここでは, その電流演算子  $I$  を実際に求めることにする.

測定装置系を組み入れて考えた場合, 光に対する全系の hat-Hamiltonian は

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_s + \hat{H}_p + \hat{H}_I + \hat{H}_r \\ &= \hat{H}_d + \hat{H}_r, \end{aligned} \quad (59)$$

で与えられる. ただし,  $\hat{H}_d$  は (28) で与えた hat-Hamiltonian であり,

$$\hat{H}_r = \omega_p (a_r^\dagger a_r - \tilde{a}_r^\dagger \tilde{a}_r), \quad (60)$$

である. ここで, reference 光はエネルギー散逸を受けない, もしくは, 散逸の影響は probe 光に比べて無視できる程度であるとした. reference 光について時間発展を解くと,

$$a_r(t) = a_r e^{-i(\omega_p t + \pi/2)}, \quad (61)$$

を得る. ただし, 干渉系の配置を調節して位相を  $\pi/2$  だけずらした.

電流演算子の定義式 (58) に (39), (40), (57), (61) を代入すると,

$$\begin{aligned} I &= \frac{e}{\tau} \{f^\dagger(t)f(t) - g^\dagger(t)g(t)\} \\ &= -\frac{e}{\tau} \{a_r^\dagger(t)a_p(t) + a_p^\dagger(t)a_r(t)\} \\ &= -\frac{ie}{2\tau} \left\{ (e^{\kappa_p \Gamma_s t_1} + e^{-\kappa_p \Gamma_s t_1}) (e^{-i\sqrt{F}N_s} a_p a_r^\dagger - e^{i\sqrt{F}N_s} a_p^\dagger a_r) \right. \\ &\quad - \Gamma_s^{-1} f_s (e^{\kappa_p \Gamma_s t_1} - e^{-\kappa_p \Gamma_s t_1}) (e^{-i\sqrt{F}N_s} a_p a_r^\dagger + e^{i\sqrt{F}N_s} a_p^\dagger a_r) \\ &\quad \left. + 2\Gamma_s^{-1} (e^{\kappa_p \Gamma_s t_1} - e^{-\kappa_p \Gamma_s t_1}) (e^{-i\sqrt{F}N_s} \tilde{n}_p \tilde{a}_p^\dagger a_r^\dagger + e^{i\sqrt{F}N_s} (1 + \tilde{n}_p) \tilde{a}_p a_r) \right\}, \end{aligned} \quad (62)$$

となる. 測定では, 光検出器で検出した電流  $I$  から probe 光の位相を読み取り, signal 光の光子数  $\tilde{n}_s$  を測定する.

今考えている光のエネルギーは、媒質の温度に対応する熱エネルギーよりも十分大きい  
ため、絶対零度近似が成り立つ。

$$\bar{n}_j = 0. \quad (63)$$

(62) から絶対零度近似での電流演算子  $I$  は

$$I = \frac{ie}{\tau} \left[ e^{\kappa_p t_1 \Gamma_{s0}} e^{i\sqrt{F} N_{s0}} a_p^\dagger a_r - e^{-\kappa_p t_1 \Gamma_{s0}} e^{-i\sqrt{F} N_{s0}} a_p a_r^\dagger - \Gamma_{s0}^{-1} (e^{\kappa_p t_1 \Gamma_{s0}} - e^{-\kappa_p t_1 \Gamma_{s0}}) e^{i\sqrt{F} N_{s0}} \tilde{a}_p a_r \right], \quad (64)$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{1}{2t_1} \int_{t'}^{t'+t_1} dt \left[ \tilde{n}_s - \Gamma_{P0}^{-1} (1 - e^{-2\kappa_s \Gamma_{p0} t}) \tilde{a}_s a_s \right] \\ &\quad + \frac{1}{2t_1} \int_{t'}^{t'+t_1} dt \left[ \tilde{\tilde{n}}_s - \tilde{\Gamma}_{P0}^{-1} (1 - e^{-2\kappa_s \Gamma_{p0} t}) \tilde{a}_s a_s \right] \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{n}_s + \tilde{\tilde{n}}_s) + W_p \tilde{a}_s a_s, \end{aligned} \quad (65)$$

$$W_p = \frac{1 - 2\kappa_s t_1 \Gamma_{p0} - e^{-2\kappa_s t_1 \Gamma_{p0}}}{2\kappa_s t_1 \Gamma_{p0}^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\kappa_s t_1)^{k+1}}{(k+2)!} \Gamma_{p0}^k, \quad (66)$$

$$\Gamma_{s0} = 1 + i \frac{\sqrt{F}}{2\kappa_p t_1} \hat{n}_s, \quad (67)$$

$$\Gamma_{p0} = 1 + i \frac{\sqrt{F}}{2\kappa_s t_1} \hat{n}_p. \quad (68)$$

とおいた。

Kerr 効果は十分弱い

$$\sqrt{F} \langle \tilde{n}_s \rangle_s \ll 1, \quad (69)$$

と仮定して、全系に対する期待値を  $\langle \dots \rangle$  で表すと、電流演算子  $I$  の期待値は、

$$\langle I \rangle = 2 \frac{e}{\tau} e^{-\kappa_p t_1} \sqrt{R(1-R)} \langle \tilde{n}_a \rangle_a \sqrt{F} \eta \langle \tilde{n}_s \rangle_s, \quad (70)$$

となる。ただし、

$$\eta = \frac{1 - e^{-2\kappa_s t_1}}{2\kappa_s t_1}, \quad (71)$$

である。一方、Kerr 媒質中 ( $t' \leq t \leq t' + t_1$ ) の signal の光子数 (35) で絶対零度近似をとると、

$$\tilde{n}_s(t) = \tilde{n}_s - \frac{1 - e^{-2\kappa_s \Gamma_{p0}(t-t')}}{\Gamma_{p0}} \tilde{a}_s a_s, \quad (72)$$

を得る。期待値をとると

$$\langle \tilde{n}_s(t) \rangle = e^{-2\kappa_s(t-t')} \langle \tilde{n}_s \rangle_s, \quad (73)$$

である。

(70)と(73)から、測定値として得られる電流と、被測定量のsignal光子数との関係が得られる。

$$\langle \tilde{n}_s(t) \rangle = \nu_t \langle I \rangle. \quad (74)$$

scaling factor  $\nu_t$ は、

$$\nu_t = \frac{e^{-2\kappa_s(t-t')} e^{\kappa_p t_1}}{\eta} \cdot \frac{\tau}{e^{2\sqrt{R(1-R)}\sqrt{F}} \langle \tilde{n}_a \rangle_a}. \quad (75)$$

であり、既知の定数で表されている。(74)から、実験により電流の測定値 $\langle I \rangle$ を得ると、Kerr媒質入射時と出射時の間の任意の時刻でのsignalの光子数 $\langle \tilde{n}_s(t) \rangle$ がわかることが結論づけられる。

また、電流演算子の分散を求めると、

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = \nu_t^{-2} \eta^{-2} \left( \frac{R + (1-R)e^{2\kappa_p t_1}}{4R(1-R)F \langle \tilde{n}_a \rangle_a} + (w + \eta) \langle \tilde{n}_s \rangle_s \right), \quad (76)$$

となる。ただし、

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(k+3)!} (-2\kappa_s t_1)^{k+1}, \quad (77)$$

を得る。これから、測定値である電流の分散と、被測定量のsignal光子数の分散との関係を求めると

$$\begin{aligned} & \nu_t^2 \langle (\Delta I)^2 \rangle - \langle (\Delta \tilde{n}_s(t))^2 \rangle \\ &= \eta^{-2} \left( \frac{R + (1-R)e^{2\kappa_p t_1}}{4R(1-R)F \langle \tilde{n}_a \rangle_a} + \left( w + \eta(1 - \eta e^{-2\kappa_s(t-t')}) \right) \langle \tilde{n}_s \rangle_s \right), \end{aligned} \quad (78)$$

である。(78)の右辺は、測定値の電流からsignal光子数を読み取る際の測定精度を表す。また、この関係式から、電流の分散 $\langle (\Delta I)^2 \rangle$ を測定すれば、Kerr媒質入射時と出射時の間の任意の時刻でのsignalの光子数の分散 $\langle (\Delta \tilde{n}_s(t))^2 \rangle$ が、ある測定精度でわかる。媒質中に散逸がない場合( $\kappa_s = \kappa_p = 0$ )の関係式を表すと、測定精度は、

$$\frac{\tau^2}{e^2} \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{4R(1-R)F \langle \tilde{n}_a \rangle_a^2} - \langle (\Delta \tilde{n}_s(t))^2 \rangle = \frac{1}{4R(1-R)F \langle \tilde{n}_a \rangle_a}, \quad (79)$$

である。これから、媒質中に散逸がない場合には、probe laserの光子数を十分大きく取れば原理的には誤差は0にすることができることがわかる。

## 5.4 測定精度の解析

ここでは、例として、Kerr媒質通過時 $t = t' + t_1$ のsignalの光子数 $\tilde{n}_s^{out} (\equiv \tilde{n}_s(t' + t_1))$ の測定を考えて、その測定誤差の解析を行う。

簡単のため、BS1での反射率を $R = 1/2$ とし、signal光とprobe光の減衰率は等しい( $\kappa_s = \kappa_p$ )ものとする。このとき、(78)は、

$$\begin{aligned} & \nu_t^2 \langle (\Delta I)^2 \rangle - \langle (\Delta \tilde{n}_s^{out})^2 \rangle \\ &= \eta^{-2} \left( \frac{R + (1-R)e^x}{4R(1-R)F \langle \tilde{n}_a \rangle_a} + \left( w + \eta(1 - \eta e^{-x}) \right) \langle \tilde{n}_s \rangle_s \right), \end{aligned} \quad (80)$$

$$\eta = \frac{1 - e^{-x}}{x}, \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(k+3)!} (-x)^{k+1}, \quad (81)$$

$$x \equiv 2\kappa_s t_1. \quad (82)$$

である. 今, 媒質の長さを決めると  $t_1$  が決まるので,  $x$  は散逸の強さを表すパラメーターと考えることができる. signal の光子数が  $\langle \tilde{n}_s \rangle_s = 50$ , Kerr 効果の強さが  $F = 10^{-4}$  とした場合の測定精度を  $x$  の関数として図2に示した. グラフでは, 上から順に probe laser 光子数が  $\langle \tilde{n}_a \rangle_a =$

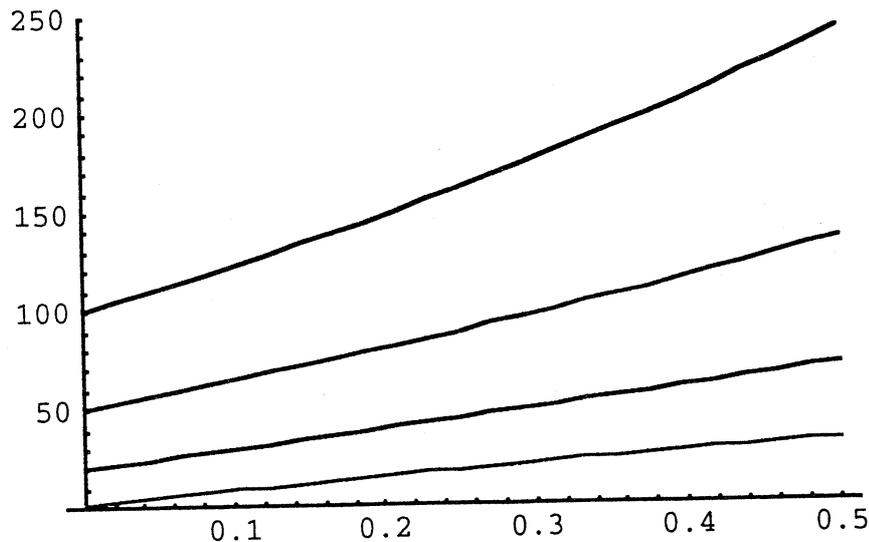


図2: 縦軸は測定誤差, 横軸は  $x$ .

100, 200, 500, 5000 の場合を示した. 図2より, probe laser の光子数を十分大きく取れば測定誤差を小さくはできるが, 散逸を考慮すると, 測定誤差 (読み出し誤差) を0にすることはできない. つまり, 散逸のため測定精度に限界 (散逸による量子限界) が現れる. 従って, 井元らが提案した測定装置では, この散逸による量子限界が現れるため, 厳密な意味での光子数の QND 測定は不可能であることが結論づけられる.

## 参考文献

- [1] V. B. Braginsky and Yu. I. Vorontsov, Sov.Phys.-Usp.17 (1975) 644.
- [2] C. M. Caves et al., Rev.Mod.Phys.52 (1980) 341.
- [3] V. B. Braginsky et al., Science 209 (1980) 547.
- [4] G. J. Milburn and D. F. Walls, Phys. Rev. A 28 (1983) 2065.
- [5] N. Imoto, H.A. Haus and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A 32 (1985) 2287.

- [6] N. Imoto and S. Saito, Phys. Rev. A **39** (1989) 675.
- [7] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.
- [8] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.
- [9] T. Arimitsu, Condensed Matter Physics (Ukraine, Lviv) **4** (1994) 26.