数理解析研究所講究録
1144巻 2000年 101-113

Parametrized Furuta inequality and the chaotic order

前橋工科大学　亀井栄三郎
Maebashi Institute of Technology
Eizaburo Kamei

1. Chaotic order. chaotic order とは何か、ということから始めよう。ヒルベルト空間上の positive opretor A, B に対して久保 − 安藤 [20] によって作用素平均が与えられた。ここでは特に $\alpha-$*power mean* $\sharp_\alpha$ と呼ばれる作用素平均を扱う。それは次のように与えられる。

$$A \sharp_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}},\quad for\ \alpha \in [0,1]$$

これを用いて我々は positive invertible operators A, B に対し relative operator entropy $S(A|B)$ を次のように与えた [2]。

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{A \sharp_\alpha B - A}{\alpha} = A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} = S(A|B)$$

これは A と B が可換の時は梅垣 [24] によって与えられた relative entropy に一致する。更に $S(A|I) = -A\log A$ となりこれは operator entropy と呼ばれるものである [21]。一方、 $S(I|A) = \log A$ であることから、これを A 自身の持つ chaos と見ることができるのではないかと考えられる。そこで log によって決められる順序、すなわち $\log A \geq \log B$ を chaotic order と呼び $A \gg B$ と表す事にした ([5],[6])。chaotic order を実際に使っていくために我々は次の道具を手に入れることが出来た。これは安藤 [1] の exponential inequality に刺激され得られた結果である [9]。

Theorem A. *Let A and B be positive invertible operators. Then the followings are equivalent.*

(i) $$A \gg B$$

(ii) $$A^u \sharp_{\frac{-u}{p-u}} B^p \leq I \quad for\ \ u \leq 0\ \ and\ \ 0 \leq p$$

(iii). $$B^u \sharp_{\frac{-u}{p-u}} A^p \geq I \quad for\ \ u \leq 0\ \ and\ \ 0 \leq p$$

最近、内山 [23] は古田不等式を用いて安藤の定理及び上の定理の別証明を与えている。

2. フルタ不等式. フルタ不等式が与えられたのは 1987 年、[10](cf.[11]) において次のような形で与えられている。

Furuta inequality:
If $A \geq B \geq 0$,
then for each $r \geq 0$,

$$(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

$$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}}B^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

holds for p *and* q *such that* $p \geq 0$ *and* $q \geq 1$ *with*

$$(1+r)q \geq p+r.$$

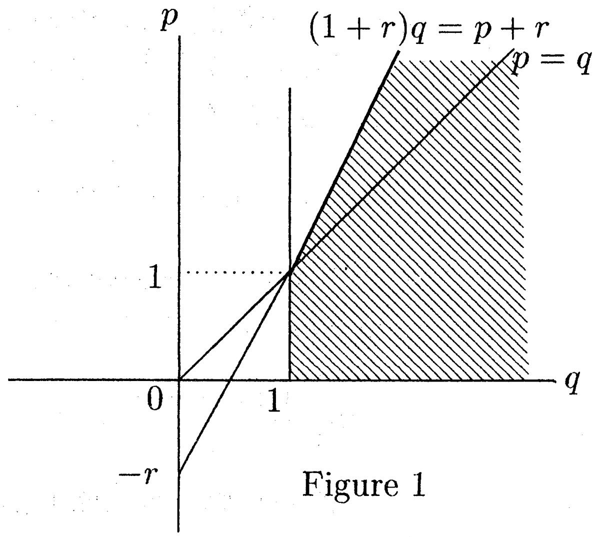

Figure 1

この不等式は Löwner-Heinz 不等式を $r=0$ の場合として含みこの領域の best possibility は棚橋によって証明されている [22]。

我々の作用素平均の立場から見ればフルタ不等式は次のように書き直すことができる ([3],[8],[14] etc.):

$$(F) \qquad A^u \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} B^p \leq A \quad and \quad B \leq B^u \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} A^p$$

for $p \geq 1$ and $u \leq 0$.

更に我々は $\alpha-power\ mean$ $\sharp_\alpha$ を用いてフルタ不等式に別証明を与え次のような結果を得た。

Satellite theorem of the Furuta inequality: *If $A \geq B \geq 0$, then*

$$A^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} B^p \leq B \leq A \leq B^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} A^p$$

for all $p \geq 1$ and $u \leq 0$.

上の結果は一般化され次のように拡張できる ([16],[17])。

Theorem B (Parametrization of the Furuta inequality).
If $A \geq B > 0$, then the following equivalent inequalities hold.

(i) $A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p \leq B^\delta = B^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p \quad for\ 0 \leq \delta \leq p, \quad u \leq 0$

(ii) $B^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p \geq A^\delta = A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p \quad for\ 0 \leq \delta \leq p, \quad u \leq 0$

(iii) $A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} B^p \leq A^\gamma = A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} A^p \quad for\ u \leq \gamma \leq 0, \quad 0 \leq p$

(iv) $B^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} A^p \geq B^\gamma = B^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} B^p \quad for\ u \leq \gamma \leq 0, \quad 0 \leq p$

これらの同値性は次のように示すことができる。
(i) $B^\delta \geq A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p = B^p \natural_{1-\frac{\delta-u}{p-u}} A^u = B^p \natural_{\frac{-\delta+p}{-u+p}} A^u$ であることから $B^{-p} \natural_{\frac{-\delta+p}{-u+p}} A^{-u} \geq B^{-\delta}$ を得る。それぞれ $-\delta = \gamma, -p = u, -u = p$ と置き換えれば (iv) が得られる。A と B を B^{-1} と A^{-1} で置き換えることにより (i) と (ii)、あるいは (iii) と (iv) の同値性が得られる。
フルタ不等式や satellite theorem は単に (i) と (ii) における $\delta = 1$ の場合に過ぎない。これらの関係は次の Figure 1 によって説明できる。

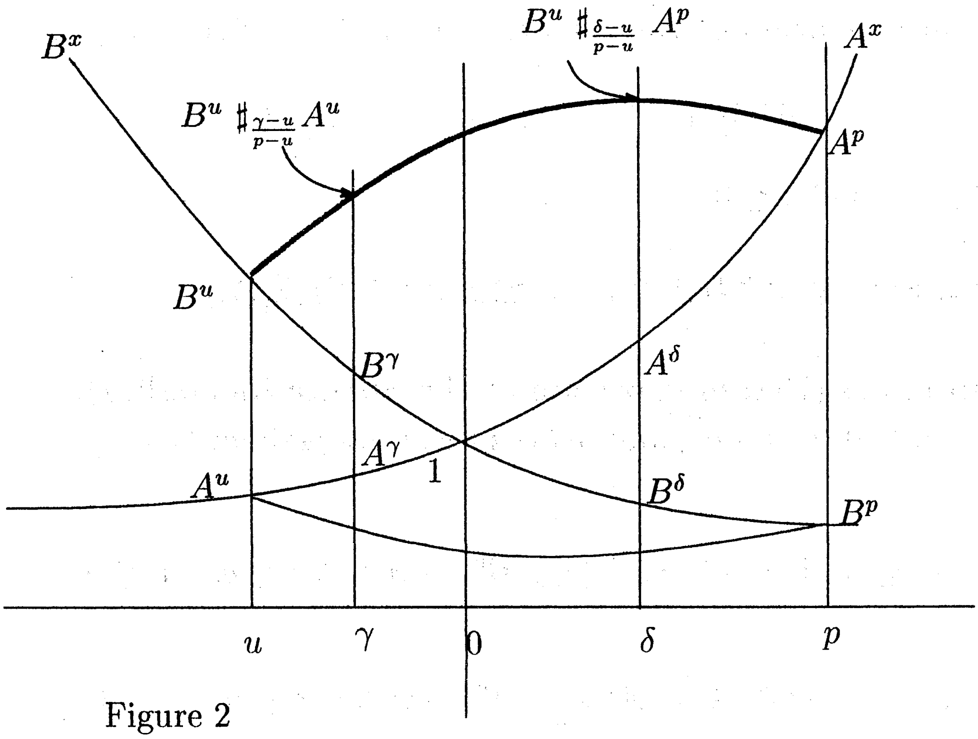

Figure 2

3. 作用素関数. 古田はフルタ不等式を順序保存な作用素関数としてみなせることを強調する。それは magic boxes を用いて次のように表される。

$$f(\square) = (B^{\frac{r}{2}} \square B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \quad and \quad g(\square) = (A^{\frac{r}{2}} \square A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

この時 $A \geq B \geq 0$ ならば $f(A^p) \geq f(B^p)$ と $g(A^p) \geq g(B^p)$ が Figure 1 における p, q, r において成り立つという主張である。そこで我々の作用素平均を用いて同様の解釈を与えてみる。フルタ不等式は

$$A^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ B^p \leq A^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ A^p \quad and \quad B^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ B^p \leq B^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ A^p$$

ということであるからこれに magic boxes をかぶせると次ののようになる。

$$A^{-\frac{u}{2}} g(\square) A^{-\frac{u}{2}} = A^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ \square \quad and \quad B^{-\frac{u}{2}} f(\square) B^{-\frac{u}{2}} = B^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ \square$$

すなわち

$$A^{-\frac{u}{2}} g(B^p) A^{-\frac{u}{2}} \leq A^{-\frac{u}{2}} g(A^p) A^{-\frac{u}{2}} \quad and \quad B^{-\frac{u}{2}} f(B^p) B^{-\frac{u}{2}} \leq B^{-\frac{u}{2}} f(A^p) B^{-\frac{u}{2}}$$

と表される。そこで satellite theorem にも magic boxes を適用してみる。

$$A^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ B^p \ \leq B^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ B^p \leq A^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ A^p \leq B^u \ \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} \ A^p$$

ということであるから

$$F(\square) = \square \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} B^p \quad and \quad G(\square) = \square \sharp_{\frac{1-u}{p-u}} A^p$$

とすると $A \geq B >$ のとき $u \leq 0$ に対して

$$F(A^u) \leq F(B^u) \leq G(A^u) \leq G(B^u)$$

が成立しているということになる。更に先の parametrized form(Theorem B) に適用すると次のようになる。

$A \geq B > 0$ に対し $0 \leq \delta \leq p$, $u \leq \gamma \leq 0$ とする。このとき

(i) $$F_\delta(\square) = \square \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p \Longrightarrow F_\delta(A^u) \leq F_\delta(B^u) \text{ for} \forall \ u \leq 0,$$

(ii) $$G_\delta(\square) = \square \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p \Longrightarrow G_\delta(B^u) \geq G_\delta(A^u) \text{ for} \forall \ u \leq 0,$$

(iii) $$g_\gamma(\square) = A^u \sharp_{\frac{\gamma-u}{p-u}} \square \Longrightarrow g_\gamma(B^p) \leq g_\gamma(A^p) \text{ for} \forall \ p \geq 0,$$

(iv) $$f_\gamma(\square) = B^u \sharp_{\frac{\gamma-u}{p-u}} \square \Longrightarrow f_\gamma(A^p) \geq f_\gamma(B^p) \text{ for} \forall \ p \geq 0.$$

このような性質を持つ関数は対数関数である。そこで chaotic order との関係を調べてみよう。

4. 再び Chaotic order へ.

次の結果は parametrized form は chaotic order と同値である、換言すれば、実は Theorem B は $A \geq B \Longrightarrow \log A \geq \log B$ をいっているに過ぎないということになる。

Theorem 1. *Let A and B be positive invertible operators, then the followings are equivalent.*

(1) $$A \gg B \ (\text{i.e.} \log A \geq \log B)$$

$$(2) \qquad A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p \leq B^\delta \quad for \quad u \leq 0 \quad and \quad 0 \leq \delta \leq p$$

$$(3) \qquad B^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p \geq A^\delta \quad for \quad u \leq 0 \quad and \quad 0 \leq \delta \leq p$$

$$(4) \qquad A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} B^p \leq A^\gamma \quad for \quad u \leq \gamma \leq 0 \quad and \quad 0 \leq p$$

$$(5). \qquad B^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} A^p \geq B^\gamma \quad for \quad u \leq \gamma \leq 0 \quad and \quad 0 \leq p$$

Proof. Since $A^u \natural_{\frac{-u}{p-u}} B^p \leq 1$ by Theorem A, (1) implies (4) is given as follows:

$$A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} B^p = A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{-u}} (A^u \natural_{\frac{-u}{p-u}} B^p) \leq A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{-u}} 1 = A^\gamma.$$

The equivalence of (2), (3), (4) and (5) are already shown in the Remark of Theorem A and the converse is the case of $\delta = 0$.

次の形による chaotic order の特徴付けは $0 \leq \delta \leq p$ において既に知られている [9]。ここでは Theorem 1 を用いることで $u \leq \delta \leq p$ にまで拡張できることが示せる。

Theorem 2. *Let A and B be positive invertible operators abd $u \leq 0$, $0 \leq p$ and $u \leq \delta \leq p$. Then the followings are equivalent:*

$$(1) \qquad A \gg B$$

$$(2) \qquad H_\delta(A, B, p, u) = A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p$$

is increasing for u and decreasing for p.

$$(3) \qquad H_\delta(B, A, p, u) = B^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p$$

is increasing for p and decreasing for u.

Proof. For any $\epsilon > 0$, we can use Theorem 1 (2) as follows:

$$A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p+\epsilon-u}} B^{p+\epsilon} = A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} (A^u \natural_{\frac{p-u}{p+\epsilon-u}} B^{p+\epsilon}) \leq A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p.$$

Hence $H_\delta(A, B, p, u)$ is increasing for p. The decrease for u is also seen by using Theorem 1 (4) as follows: For $\epsilon > 0$ such that $u + \epsilon \leq 0$

$$\begin{aligned} A^{u+\epsilon} \natural_{\frac{\delta-u-\epsilon}{p-u-\epsilon}} B^p &= B^p \natural_{\frac{p-\delta}{p-u-\epsilon}} A^{u+\epsilon} \\ &\geq B^p \natural_{\frac{\delta-u}{p-u-\epsilon}} (B^p \natural_{\frac{p-u-\epsilon}{p-u}} A^u) = B^p \natural_{\frac{p-\delta}{p-u}} A^u = A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p. \end{aligned}$$

Theorem B を用いることでより精密に次のように表すこともできる。

Corollary. *Let $A \gg B$ and $u \leq 0$, $0 \leq p$ and $u \leq \delta \leq p$. Then*

(1) $$H_\delta(A, B, p, u) \leq A^\delta \quad \textit{for } u \leq \delta \leq 0$$

(2) $$H_\delta(A, B, p, u) \leq B^\delta \quad \textit{for } 0 \leq \delta \leq p$$

(3) $$H_\delta(B, A, p, u) \leq B^\delta \quad \textit{for } u \leq \delta \leq 0$$

(4) $$H_\delta(B, A, p, u) \leq B^\delta \quad \textit{for } 0 \leq \delta \leq p$$

5. 応用 (1) グランドフルタ不等式へ. 現在知られているグランド古田不等式についての結果は次のようなものである [14](cf.[12],[13])。

Theorem FYY. *Let $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$ and*

$$G_{p,\delta,t}(A, B, r, s) = A^{-\frac{r}{2}}\{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{\delta-t+r}{(p-t)s+r}}A^{-\frac{r}{2}}$$

for each $t \in [0, 1]$ and $p \geq t$. The following (i) *and* (ii) *hold for a fixed δ and they are mutually equivalent;*

(i) *if $\delta \geq 0$, then $G_{p,\delta,t}(A, B, r, s)$ is decreasing for $r \geq t$ and $s \geq 1$ such that $(p - t)s \geq \delta - t$.*

(ii) *If* $p \geq \delta$, *then* $G_{p,\delta,t}(A,B,r,s)$ *is decreasing for* $s \geq 1$ *and* $r \geq \min\{t, t-\delta\}$.

この結果についての作用素平均による我々の解釈は次のようになる。

Theorem C. *If* $A \geq B > 0$, *then for each* $t \in [0,1]$

$$H_{p,\delta,t}(A,B,u,\beta) = A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)$$

is increasing for $u \leq 0$ *and decreasing for* $\beta \geq p$ *where* $0 \leq t < p \leq \beta, u \leq 0$ *and* $\delta \in [0,\beta]$.

$H_{p,\delta,t}$ と $G_{p,\delta,t}$ との関係は次のようになっている。

$$H_{p,\delta,t}(A,B,u,\beta) = A^{\frac{t}{2}} G_{p,\delta,t}(A,B,t-u,\tfrac{\beta-t}{p-t}) A^{\frac{t}{2}}$$

ここでは変数を $\beta \geq p$ に対し $r = t-u, s = \frac{\beta-t}{p-t}$ と置き換えている。$G_{p,\delta,t}(A,B,r,s)$ の持つ r と s についての単調増加性と $H_{p,\delta,t}(A,B,u,\beta)$ における u の単調増加性と β の単調減少性は同じである。

更に我々はグランドフルタ不等式においても parametrized form を与えられる事を示した [18]。

Theorem D. *If* $A \geq B > 0$, *then for each* $t \in [0,\ 1]$, $0 \leq t < p \leq \beta$, $u \leq 0$ *and* $0 \leq \delta \leq \beta$

$$A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}}$$

and

$$B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \geq (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p)^{\frac{\delta}{\beta}}.$$

更に次の Theorem E を用いることでグランドフルタ不等式とフルタ不等式の間にも直接順序がつくことを示したのが Theorem F である [19]。

Theorem E. *If* $A \geq B > 0$, *then for* $0 \leq t \leq 1$ *and* $0 \leq t < p \leq \beta$

$$(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{p}{\beta}} \leq B^p \quad and \quad (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p)^{\frac{p}{\beta}} \geq A^p.$$

Theorem F. *If* $A \geq B > 0$ *and* $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq t < p \leq \beta$, $u \leq 0$, *then*

(i) $0 \leq \delta \leq p$,

$$A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p \leq B^\delta$$

and

$$B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \geq B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p \geq A^\delta.$$

(ii) $u \leq \gamma \leq 0$

$$A^u \sharp_{\frac{\gamma-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq A^u \sharp_{\frac{\gamma-u}{p-u}} B^p \leq A^\gamma$$

and

$$B^u \sharp_{\frac{\gamma-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \geq B^u \sharp_{\frac{\gamma-u}{p-u}} A^p \geq B^\gamma.$$

先の Theorem 2 を Theorem E に適用することで Theorem C は簡単に証明できるのであるが、更に $\delta \in [u, \beta]$ にまで拡張して次のように与えられる。

Theorem 4. *If* $A \geq B > 0$, *then for each* $t \in [0,1]$, $0 \leq t < p \leq \beta$, $u \leq 0$ *and* $\delta \in [u, \beta]$,

$$H_{p,\delta,t}(A, B, u, \beta) = A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \tag{1}$$

is increasing for $u \leq 0$ *and decreasing for* $\beta \geq p$,

$$H_{p,\delta,t}(B, A, u, \beta) = B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \tag{2}$$

is increasing for $\beta \geq p$ *and decreasing for* $u \leq 0$.

Proof. Since $A \gg (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}}$ is easily led from Theorem E, so we can apply Theorem 2 to these operators and have the conclusion.

Theorem F 用いれば作用素関数として次のように表すこともできる。

Corollary. *If* $A \geq B > 0$, *then for each* $t \in [0,1]$, $0 \leq t < p \leq \beta, u \leq 0$ *and* $\delta \in [u,p]$,

(1) $$H_{p,\delta,t}(A,B,u,\beta) \leq A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p$$

and

(2). $$H_{p,\delta,t}(B,A,u,\beta) \geq B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p$$

これらの関係は次の Figure 3 によって説明することができる。

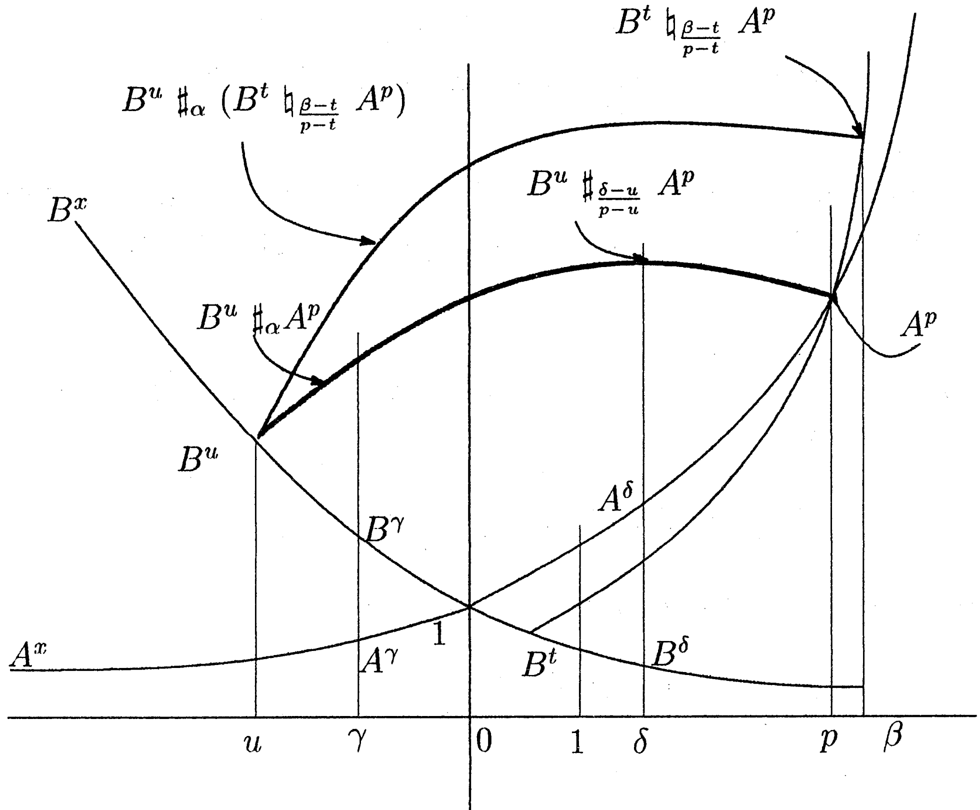

Figure 3

6. 応用 (2) 未知との遭遇. グランドフルタ不等式においては $t \in [0,\ 1]$ から出発している。これを負の値に取って同様の議論を展開出来ないものかと気になっていた。ところが Theorem 1 を使うことで $A \gg B$ のとき次が成り立つ。

Theorem 5. *If $A \gg B$, then for $u \leq \gamma \leq 0$, $0 \leq p \leq \beta$, $u \leq \delta \leq p$ and $p \leq \beta \leq 2p$,*

$$A^u \ \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} \ (A^\gamma \ \natural_{\frac{\beta-\gamma}{p-\gamma}} \ B^p) \leq A^u \ \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} \ B^p$$

and

$$B^u \ \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} \ (B^\gamma \ \natural_{\frac{\beta-\gamma}{p-\gamma}} \ A^p) \geq B^u \ \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} \ A^p.$$

Lemma. *If $A \gg B$ and $0 \leq p \leq \beta \leq 2p$, then for $u \leq \gamma \leq 0$,*

$$A^\gamma \ \natural_{\frac{\beta-\gamma}{p-\gamma}} \ B^p \leq A^u \ \natural_{\frac{\beta-u}{p-u}} \ B^p$$

and

$$B^\gamma \ \natural_{\frac{\beta-\gamma}{p-\gamma}} \ A^p \geq B^u \ \natural_{\frac{\beta-u}{p-u}} \ A^p.$$

Proof. *Since $1 \leq \frac{\beta-\gamma}{p-\gamma} \leq 2$ and by using Theorem 1, we have the following:*

$$\begin{aligned}
A^\gamma \ \natural_{\frac{\beta-\gamma}{p-\gamma}} \ B^p &= B^p(B^{-p} \ \sharp_{\frac{\beta-p}{p-\gamma}} \ A^{-\gamma})B^p \\
&\leq B^p(B^{-p} \ \sharp_{\frac{\beta-p}{p-\gamma}} \ (A^u \ \sharp_{\frac{\gamma-u}{p-u}} \ B^{-u})B^p \\
&= B^p(B^{-p} \ \sharp_{\frac{\beta-p}{p-\gamma}} \ (B^{-p} \ \sharp_{\frac{p-\gamma}{p-u}} \ A^{-u})B^p \\
&= B^p(B^{-p} \ \sharp_{\frac{\beta-p}{p-u}} \ A^{-u})B^p = A^u \ \natural_{\frac{\beta-u}{p-u}} \ B^p.
\end{aligned}$$

Proof of Theorem 5. *By the above lemma, we have*

$$\begin{aligned}
&A^u \ \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} \ (A^\gamma \ \natural_{\frac{\beta-\gamma}{p-\gamma}} \ B^p) \\
\leq\ &A^u \ \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} \ (A^\gamma \ \natural_{\frac{\beta-u}{p-u}} \ B^p) = A^u \ \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} \ B^p
\end{aligned}$$

この関係も次の Figure 4 によって説明できている。この議論は現在のところグランドフルタ不等式に適用できない。手法が見つかっていないだけなのか本質的な限界があるのかの見極めはまだついていない。

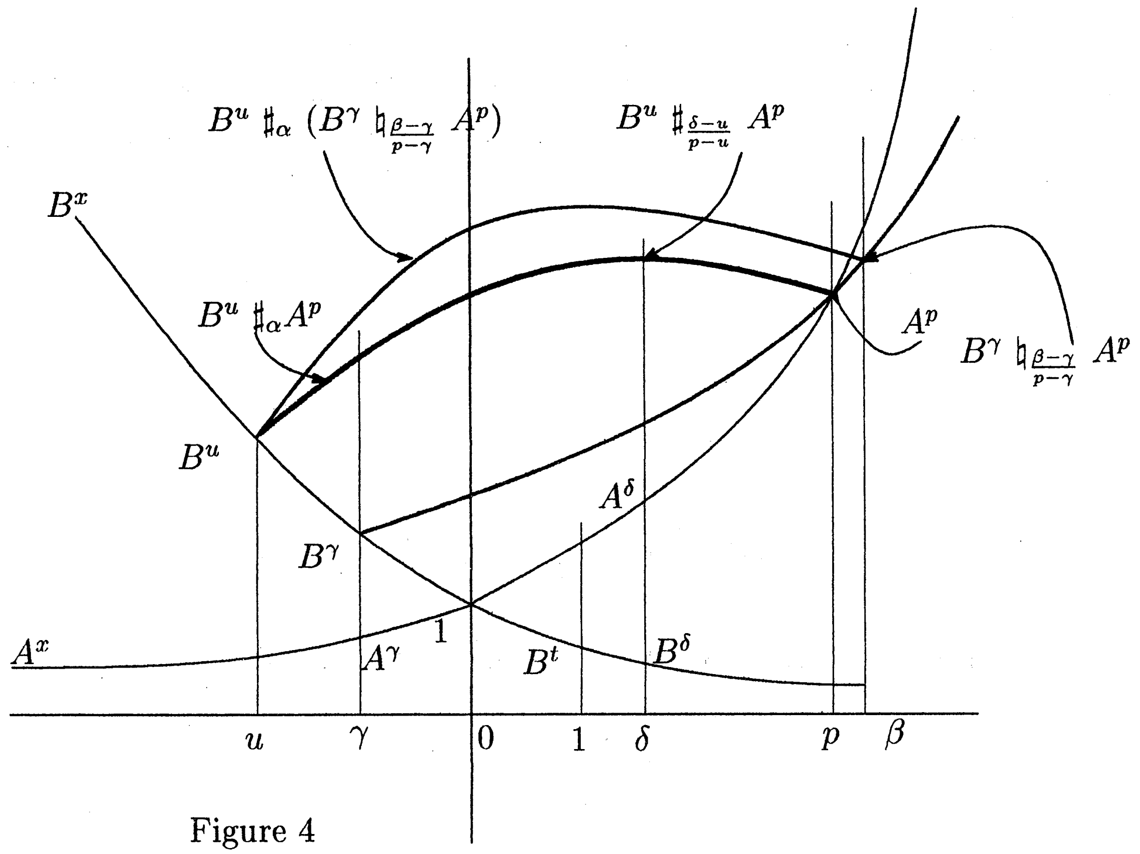

Figure 4

References

[1] T.Ando, On some operator inequalities, Math. Ann.,279(1987),157-159.

[2] J.I.Fujii and E.Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japon.,35(1990),387-396.

[3] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, J.Operator Theory, 23(1990),67-72.

[4] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and application to Ando's theorem, Linear Algebra Appl.,179(1993),161-169.

[5] M.Fujii and E.Kamei, Furuta's inequality for the chaotic order, Math. Japon.,
36(1991),603-606.

[6] M.Fujii and E.Kamei, Furuta's inequality for the chaotic order,II, Math. Japon.,
36(1991),717-722.

[7] M.Fujii and E.Kamei, Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc.,124(1996),2751-2756.

[8] M.Fujii and E.Kamei, Monotone properties of parametrized Furuta inequality, Sci. Math.,1(1998),277-282.

[9] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, Linear Algebra and its Appl.,179(1993),161-169.

[10] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc.,101(1987),85-88.

[11] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, Proc. Japan Acad., 65(1989),126.

[12] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Algebra and Appl.,219(1995),139-155.

[13] T.Furuta and D.Wang, A decreasing operator function associated with the Furuta inequality, preprint.

[14] T.Furuta,T.Yamazaki and M.Yanagida, Operator functions implying generalized Furuta inequality, Math. Inequal. Appl.,1(1998),123-130.

[15] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, Math. Japon.,33(1988),883-886.

[16] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, Math. Japon., to appear.

[17] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, II, Math. Japon., to appear.

[18] E.Kamei, Prametrized grand Furuta inequality, Math. Japon.,50(1999),79-83.

[19] E.Kamei, Order among Furuta type inequalities, Math. Japon., to appear.

[20] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann.,246(1980), 205-224.

[21] M.Nakamura and H.Umegaki, A note on the entropy for operator algebras, Proc. Japan Acad.,37(1961),149-154.

[22] K.Tanahashi, Best possibility of the Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996),141-146.

[23] M.Uchiyama, Some exponential operator inequalities, preprint.

[24] H.Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra,III, Kodai Math. Sem. Rep.,11(1959),51-64.