数理解析研究所講究録
1159 巻 2000 年 45-49

RÉGULARITÉ DES ONDES ÉLASTIQUES DANS LA RÉGION GLANCING DES ONDES P

TATSUSHI MORIOKA (Université d'Osaka)
森岡達史

Résultat.

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domaine extérieur. On suppose les hypothèses suivantes.

(H.1) $\partial\Omega$ est analytique.

(H.2) $\mathbf{R}^3 \backslash \Omega$ est strictement convexe, c.-à-d. la courbure Gaussienne de $\partial\Omega$ est strictement positive.

Soit $A(\partial_x)$ l'opérateur différentiel dont la valeur est 3×3 matrice :

$$A(\partial_x) = \mu_0 \triangle + (\lambda_0 + \mu_0)\mathrm{grad\ div} \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}^3_x \ , \tag{0.1}$$

où λ_0 , μ_0 sont constantes vérifiant $\mu_0 > 0$, $3\lambda_0 + 2\mu_0 > 0$ et que $\triangle$ est Laplacien en $\mathbf{R}^3$. On définit L par $L = \partial_t^2 - A(\partial_x)$. En notant $\sigma(\triangle_{\partial\Omega})$ le symbole principal de Laplacien en $\partial\Omega$, on définit $q \in C^\infty(T^*(\mathbf{R} \times \partial\Omega)\, , \mathbf{R})$ par

$$q(\tau\, , Z) = -\tau^2 - c_1^2 \sigma(\triangle_{\partial\Omega})(Z) \ : \ \tau \in \mathbf{R}\, ,\ Z \in T^*(\partial\Omega)\ , \tag{0.2}$$

où $c_1 = (\lambda_0 + 2\mu_0)^{1/2}$.

On fixe $T > 0$, $\varepsilon > 0$ qui sont suffisamment petites, $z \in \partial\Omega$ et $W_0 \subset \mathbf{R}^3$; voisinage ouvert de z dans $\mathbf{R}^3$. Soit $W_1 = W_0 \cap \Omega$ et $N = (-\varepsilon\, , T)_t \times (W_0 \cap \partial\Omega)_x$. On fixe $\rho_0 \in T^*N \backslash 0$ vérifiant $q(\rho_0) = 0$, $\pi(\rho_0) = (t_0, z)$ avec $0 \leqq t_0 < T$. Ici, π est la projection de T^*N sur N. On note $\partial/\partial n$ la dérivée au long de vecteur normal de $\partial\Omega$. Soit $u =^t (u_1\ u_2,\ u_3) \in \mathcal{D}'((-\varepsilon,\ T) \times W_1)$. On dit que u vérifie (A.1) si les conditions suivantes (a) et (b) sont vérifiées.

(a) $Lu = 0$ dans $(-\varepsilon,\ T) \times W_1$.

(b) Il existe $W_2 \subset \mathbf{R}^3$ voisinage ouvert de $W_0 \cap \overline{\Omega}$ et $\widetilde{u} = {}^t(\widetilde{u}_1,\ \widetilde{u}_2,\ \widetilde{u}_3) \in \mathcal{D}'((-\varepsilon,\ T) \times W_2)$ tels que $\widetilde{u}\,|_{(-\varepsilon,T)\times W_1} = u$ et que $\widetilde{u}$ soit analytique dans $(-\varepsilon,\ 0) \times W_2$.

On fixe $m \in \mathbf{R}$ vérifiant $1 \leqq m < 3$. Le théorème suivant est notre résultat principal.

Théorème 1. *On suppose que (H.1), (H.2) sont vérifiées. Alors, il existe* $\omega \subset T^*N\backslash 0$ *voisinage conique de* ρ_0 *et* $s_1 > 0$ *vérifiant* $\exp s_1 H_q(\rho_0) \notin \omega$*, tels que, pour tout* $u = {}^t(u_1\ u_2,\ u_3) \in \mathcal{D}'((-\varepsilon,\ T) \times W_1)$ *vérifiant (A.1) avec* $WF_A(u\,|_N) \subset \omega$ *et tout* $s_0 > 0$ *vérifiant* $s_0 < s_1$ *et* $\omega \cap \{\exp\ sH_q(\rho_0)\ ;\ s_0 \leqq s \leqq s_1\} = \phi$*, on ait (i) et (ii) suivants.*
(i) $\{\exp\ sH_q(\rho_0)\ ;\ s_0 \leqq s \leqq s_1\} \cap WF_G^3((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$.
(ii) $\{\exp\ sH_q(\rho_0)\ ;\ s_0 \leqq s \leqq s_1\} \cap WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$
ou $\{\exp\ sH_q(\rho_0)\ ;\ s_0 \leqq s \leqq s_1\} \subset WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N)$.

Remarque. *Soit* $u = {}^t(u_1\ u_2,\ u_3) \in \mathcal{D}'((-\varepsilon,\ T) \times W_1)$ *vérifiant (A.1) et que* $WF_A(u\,|_N) = \{(t_0, z\,;\, r\eta)\ :\ r > 0\}$, *où* $(t_0, z\,;\, \eta) = \rho_0$. *Alors, la preuve de Théorème 1 montre que l'on a (i) et (ii) mentionnés dans Théorème 1 pour tout* s_0 *vérifiant* $0 < s_0 < s_1$, *si* s_1 *est suffisamment petit.*

Dans la description de Théorème 1, $WF_A(*)$ est l'ensemble du front d'onde analytique de Hörmander, qui coïncide le spectre singulier de Sato et le support essentiel de Bros - Iagolnitzer. $WF_G^m(*)$ est l'ensemble du front d'onde Gevrey m. On confirme ici seulement la définition de la classe Gevrey m dans $\mathbf{R}^n$. On dit qu'une fonction h scalaire en $\mathbf{R}^n$ a la régularité Gevrey m près de $y \in \mathbf{R}^n$ s'il existe des constantes B, $C > 0$ et un voisinage U de y tels que pour tout α et tout $x \in U$, on ait

$$(0.3) \qquad |(\partial_x^\alpha h)(x)| \leqq CB^{|\alpha|}(\alpha!)^m \ .$$

Pour $u = {}^t(u_1\ u_2,\ u_3)$, on définit $WF_A u = \cup\{WF_A u_j\ :\ j = 1,2,3\}$ et $WF_G^m u = \cup\{WF_G^m u_j\ :\ j = 1,2,3\}$.

Nous écrivons les travaux qui précèdent Théorème 1. Lebeau [14, Théorème 1] a prouvé Théorème 1 avec une méilleure estimation par rapport à la régularité des solutions lorsque l'équation est celle des ondes. En remplaçant WF_G^3 par WF, le front d'onde C^∞ de Hörmander, Melrose [16] et Taylor [22] (Cf. Hörmander [5]) ont montré Théorème 1-(i), lorsque l'équation est celle des ondes. L'étude de Friedlander - Melrose [4] montre que Théorème 1-(i) est faux si on remplace WF_G^3 par WF_G^k avec $1 \leqq k < 3$ et remplace l'équation élastique par celle des ondes. Voir aussi Sjöstrand [19], Lebeau [13, Théorème 1 dans §V.2] et [13, Théorème 2 qui étend le résultat de Kataoka]. Théorème 1 est une analogie de Lebeau [14, Théorème 1] pour l'équation élastique isotrope. La singularité des solutions du problème aux limites pour l'équation élastique isotrope a déjà été étudiée par Yamamoto [23] avec la condition de Neumann au bord, dans le cadre de la classe C^∞. Cf. Bardos - Masrour - Tatout [1] et Kawashita [7]. La généralisation de Lebeau [14] pour les conditions obliques au bord a été étudiée par Lafitte [8]-[10]. Voir aussi Lascar - Lascar [11].

La preuve de Théorème 1 est essentiellement due aux Lebeau [14] et Stefanov - Vodev [21]. L'idée principale de Lebeau [14] est de construire le paramétrix de l'opérateur au bord sur l'espace conormal de la région Glancing au bord. Cette méthode, appelée la deuxième microlocalisation sur les sous-variétés involutives, provenante de la théorie de Kashiwara - Kawai (C.f. [18]), nous permet de considérer l'algèbre des opérateurs 2-microlocaux de Laurent sur l'espace conormal de la sous-variété involutive comme l'algèbre formelle des opérateurs pseudo-différentiels, qui ont 2 paramètres, sur l'espace cotangent. Ces opérateurs pseudo-différentiels sont les opérateurs unilatéraux, qui sont microlocaux jusqu'à l'indice 3 dans classe de Gevrey. Grâce à la deuxième microlocalisation due à Lebeau, on peut inverser l'opérateur au bord en conservant la propriété locale de Gevrey 3. Cela implique la preuve de Théorème 1 lorsque l'équation est celle des ondes. Quant à la deuxième microlocalisation due à Lebeau, Voir [12], [13] et [14, A.63 dans les pages 1489–1493].

La combinaison de [14] et [21] nous entraîne la preuve de Théorème 1. En effet, [21, §2] a montré que l'on peut résoudre le problème aux limites pour l'équation élastique isotrope avec la condition de Dirichlet au bord par la résolution Helmholtzienne. Puisque l'équation élastique est un système, la construction des solutions asymptotiques est beaucoup plus compliquée que celle de l'équation des ondes. Cf. Kawashita [7]. La méthode de [21, §2] nous permet d'éviter de construire directement les solutions asymptotiques dans la région Glancing des ondes longitudinaux et cela indique la preuve de Théorème 1 due à l'argument par [14].

REFERENCES

1. C. Bardos - G. Lebeau - J. Rauch, *Scattering frequence and Gevrey 3 singularities*, Invent. Math. **90** (1987), 77–114.
2. C. Bardos - T. Masrour - F. Tatout, *Observation and control of elastic waves*, (J. Rauch - M. Taylor eds.) Singularities and Oscillation, IMA volumes in Math. and its Appl. **91** (1997), 1–16.
3. G. Eskin, *General initial boundary problems for second order hyperbolic equations*, D. Reidel. Co. Dordrecht, London (1981), 19–54.
4. F.G. Friedlander - R. B. Melrose, *The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays.* II, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. **81** (1977), 97–120.
5. L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators* I-IV, Springer.
6. M. Iwashita - Y. Shibata, *On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems*, Glasnik Mate. **23** (1988), 291-313.
7. M. Kawashita, *Sur les solutions asymptotiqus de l'équation élastique (*en japonais), Thèse de Maître à l'Université d'Osaka (1988).
8. O. Lafitte, *The kernel of the Neumann operator for a strictly diffractive analytic problem*, Comm. P.D.E. **20** (1995), 419–483.
9. O. Lafitte, *Second term of the asymptotic expansion of the diffracted wave in the shadow*, Asymptotic Analysis **13** (1996), 329–359.
10. O. Lafitte, *Diffraction for a Neumann boundary condition*, Comm. P.D.E. **22** (1997), 319–359.
11. B. Lascar - R. Lascar, *Propagation des singularités Gevrey pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **16** (1991), 547–584.
12. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation à croissance*, Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz (1982–1983).

13. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **35** (1985), 145–216.

14. G. Lebeau, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **9** (1984), 1437–1494.

15. G. Lebeau, *Propagation de singularité Gevrey pour le problème de Dirichlet*, Advanced in microlocal analysis, NATO A.S.I. published by Reidel (Garnir ed.) (1986), 203–223.

16. R.B. Melrose, *Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems*, Duke. Math. J. **42** (1975), 605–635.

17. Y. Okada, *Second microlocal singularities of tempered and Gevrey classes*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. **39** (1992), 475–505.

18. M. Sato - K. Kashiwara - T. Kawai, *Hyperfunctions and pseudo differential equations*, Lect. Notes Math. 287, Springer (1973).

19. J. Sjöstrand, *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems*, Comm. P.D.E. **5** (1980), 41–94.

20. J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).

21. P. Stefanov - G. Vodev, *Distribution of the resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a strictly convex body*, Duke Math. J. **78** (1995), 677–714.

22. M.E. Taylor, *Grazing rays and reflection of singulaities of solution to wave equation*, Comm. Pure. Appl. Math. **29** (1976), 1–38.

23. K. Yamamoto, *Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations*, Japan J. Math. **14** (1988), 119–163.