数理解析研究所講究録
1160 巻 2000 年 7-12

RECENT RESULTS ON G-FUNCTIONS

永田 誠 (MAKOTO NAGATA)

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

ここ 1 年くらい前に得られた G- 関数に対する結果を報告する. なお, 英文の報告 (概要) は文献 [10], 証明は [9] 参照のこと. (The English summary is [10]. See also the original article [9].)

本報告の内容を三つに分ける:
§1 定義と例.
§2 G- 関数の特殊値について既存の結果とある問題.
§3 結果. (An estimation on the number of rational values related to G-functions.)
今回の話は G- 関数の他に G-operator という用語が必要であり, §1 で復習を兼ねて丁寧に定義する. さらにいくつか例を挙げる. そのうち一つの例はとても貧弱であるが, G- 関数のある一つの判定法になっているものを紹介する.
次に §2 で知られている特殊値の結果を述べ, そして未解決だった問題を挙げる.
最後にこの報告の主たる主張を §3 で述べる. それは §2 で与えた問題のひとつの回答となっている.

§1 定義と例

K を $\mathbb{Q}$ 上の数体とし, $d := [K, \mathbb{Q}] < \infty$ とする.
v を K に入る付値とし, 次のように正規化する:

$$\begin{cases} |p|_v := p^{\frac{-d_v}{d}} & \text{if } v \mid p \quad (p: \text{素数}), \\ |\xi|_v := |\xi|^{\frac{d_v}{d}} & \text{if } v \mid \infty \quad (\xi \in K), \end{cases}$$

ここで $d_v := [K_v, \mathbb{Q}_v]$ とする.
さらに $\log^+ a := \log \max(1, a)$, $(a \in \mathbb{R})$ とおく.

定義 1. (G- 関数)
y が G- 関数とは, 次をみたすものをいう:
(0) y は K- 係数のベキ級数展開をもつ: $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in K[[x]]$.
(1) 次の値が有限である:

$$\varlimsup_{m \to \infty} \sum_v \frac{1}{m} \max_{i \le m} \log^+ |a_i|_v < \infty.$$

ここで, $\sum_v$ の意味は v の K の全ての素因子 (Archimedean を含む) をわたるとする.
(2) y は $K(x)$- 係数の線形微分方程式の解となる.

上の (1) は次と同値:

a_i と その共役, さらに $a_0, \dots, a_i$ の共通分母 ($\in \mathbb{N}$), が i についての等比数列で押えられる.

G- 関数は,
・ベキ級数の係数が数体に限定してあり, p-adic で押えられるという条件より数論的対象と考えられる.
・特殊値については超越数論的手法, diophantine method, Pade 近似, が応用できるので超越数論的対象とも考えられる.

・また微分方程式の解でもあるので, 微分方程式論の対象でもある.
という理由より興味ある対象である.

G- 関数の例を挙げる前に, 微分方程式に対する用語を一つ導入する：
$v \nmid \infty$ を K の non-Archimedean 付値 とする.
多項式 $f = \sum_{i=0}^{N} f_i x^i \in K[x]$ に対し, $|f|_v := \max_i |f|_v$, 有理関数 $f/g \in K(x)$, $f, g \in K[x], g \neq 0$ に対し, $|f/g|_v := |f|_v / |g|_v$ とおく[1].
さらに有理関数の行列 $M = (m_{ij}) \in M_n(K(x))$ に対し, $|M|_v := \max_{i,j} |m_{ij}|_v$ とおく.

定義 2. (G-operator)
行列 $A \in M_n(K(x))$ を係数にもつ微分方程式

$$(\frac{d}{dx} - A)\overline{y} = 0$$

に対し, $(d/dx - A)$ が G-operator とは, 次をみたすものをいう：
(1) 次の値が有限である：

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \sum_{v \nmid \infty} \frac{1}{m} \max_{i \leq m} \log^+ |\frac{1}{i!}(\frac{d}{dx} - A)^i I|_v < \infty.$$

ここで I は $M_n(K(x))$ の単位行列, さらに,

$$(d/dx - A)^i I := \underbrace{(d/dx - A) \cdots (d/dx - A)}_{i \text{ times}} I$$

とする. ここで $\sum_{v \nmid \infty}$ の意味は K の non Archimedean なる素因子全てをわたるとする.

ここで, G- 関数と G-operator について知られていることを復習しておく：

命題 1. (文献 [1,3,8])
$\overline{y}$ を次の微分方程式の K- 係数ベキ級数ベクトル解とする：

$$(\frac{d}{dx} - A)\overline{y} = 0.$$

適当な条件なもと[2], 次の二つは同値：
・$(d/dx - A)$ は G-operator.
・ベクトル $\overline{y}$ のすべての成分は G- 関数.

いくつか例を挙げる.

例 0.
$f(x), g(x)$ が G- 関数ならば,$f(x) \pm g(x), f(x) \times g(x), \frac{d}{dx} f(x), \int_0^x f(t)dt$ もまた G- 関数.
一般に割り算では成り立たない.

例 1.
多重対数関数 $L_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i / i^k$, $k \in \mathbb{N}$. (特に $\log(1-x) = -L_1(x)$.)
ガウスの超幾何級数 ${}_2F_1(a, b, c; x) = \sum_{i=0}^{\infty}((a)_i (b)_i x^i)/((c)_i i!)$ with $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
(証明：素数定理を用いてベキ級数の係数を直接評価する.)

例 2.
ベキ級数展開をもつ $\mathbb{Q}$ 上代数関数.
(証明：代数関数のベキ級数展開の係数の評価 / Eisenstein's theorem を用いる.)

---

[1] well-def. Gauss norm と呼ばれる
[2] 詳しくは文献 [1] 参照. 本報告ではこの命題を基本的な事実として用いているが, 詳細は省略した.

注意.
上の例全てはベキ級数の係数を直接評価することによって証明されている.

一般に与えられた微分方程式の解が G- 関数かどうか調べるため, そのベキ級数展開の係数（無限列）を評価することは困難である. また, 或は命題 1 を考えて G-operator かどうか判定するための与えられた微分方程式から作られる定義 2 の行列の無限列の評価も困難である.
すなわち, 与えられた微分方程式が G-operator, あるいはその解が G- 関数かどうかを判定するのは一般に困難である.

この状況をふまえて次の例[3]を挙げる.

例 3.
K の元を成分にもつ行列 $A_1, \ldots, A_\mu \in M_n(K)$ が次をみたすとする：
(1)[4] $A_1, \ldots, A_\mu$ の全ての固有値は有理数.
(2) $\exists\, \mathfrak{g} \hookrightarrow gl_n(k)$: solvable Lie algebra s.t. $A_1, \ldots, A_\mu \in \mathfrak{g}$.
このとき, 任意の $\zeta_1, \ldots, \zeta_\mu \in K$ に対し,

$$\frac{d}{dx} - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{A_i}{x - \zeta_i}$$

は G-operator.
（証明：厳密性に欠ける[5]が, solvable $\Rightarrow$ triangular matrix $\Rightarrow$ 階数 1 の常微分方程式の解の公式＋上の命題 1, 例 0, 例 2 を使う.）

注意.
上の例 3 は一般に逆は成り立たない（ガウスの超幾何級数 $(n = 2)$ で例 3 の逆は成り立たない）. すなわち, 例 3 は典型的な G- 関数が判定できない.
しかしながら先に述べたように与えられた関数のベキ級数や与えられた微分方程式から作られる（定義 2 の）無限列を直接評価するのは難しいので, 例 3 のような判定法があると大変便利である.

例 3 は大変貧弱で満足はできないが, 次の興味ある問題のある一つの回答となっている：

問題 1.
G-operator (或は G- 関数) の代数的判定法を見つけよ.

すなわち, 次の判定法を見つけよ：
・ある代数的な（有限）条件をみたす A から得られる代数的対象が存在するならば, $(d/dx - A)$ は G-operator.

勿論, G-operator と同値な代数的な命題が見つかれば, それは G-operator（すなわち G- 関数, それは代数関数や log を含む関数のクラスである）や G- 関数の「代数的な特徴付け」が見つかったということなので, もし見つかれば大変興奮するが, とりあえず控え目でもよいから上のような判定法があれば嬉しいのである.
現在 G- 関数を記述するのに lim や 無限和[6]という極限操作が必要であるので, 有限性条件におちるということは有難みが大きいと思われる.

残念なことに, 私は上の問題の答を 例 3 以外に知らないので, これ以上の話はできない.
まとめとして, この例 3 は貧弱で「判定法」と呼べるようなものではないかもしれないが, 少なくとも上の問題のある一つの答となっているのでこの意味で上の例は興味深いと思われる.

§2　G- 関数の特殊値について既存の結果とある問題

[3]意図的に代数的に書いた.
[4]この条件は取り除くことが出来ない. 文献 [1] 参照.
[5]厳密性が欠けるのは 命題 1 の「適当な条件」のためである. 別な方法で厳密な証明もある.
[6]ベキ級数の係数全体 lim を見ているので, この和は有限和ではない.

簡単のため, K を $\mathbb{Q}$ とする.

ここで, 知られている G- 関数の特殊値の一般的な結果を挙げる. G- 関数の特殊値に関する結果はいくつか知られているが, まとめると次のような形に書ける[7].

命題 2. (文献 [2, 3, 5, etc.])

行列 $A \in M_n(\mathbb{Q}(x))$ に対して, $\overline{y} = {}^t(y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{Q}[[x]])^n$ を

$$(\frac{d}{dx} - A)\overline{y} = 0$$

のベクトル解とし, さらに, $\overline{y}$ の全ての成分 $y_1, \ldots, y_n$ は G- 関数と仮定する.

もし $y_1, \ldots, y_n$ が $\mathbb{Q}(x)$ 上線形独立ならば, 次をみたす二つの定数 $C_1 > 0$, ϵ with $0 < \epsilon < 1$ が存在する：

$\forall\, q > C_1$, $(q \in \mathbb{N})$, $\forall\, \zeta \in \mathbb{Q}$ with その分母 $= q$ s.t. $|\zeta| \leq q^{-\epsilon}$, に対し、 $y_1(\zeta), \ldots, y_n(\zeta)$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立.

大雑把にいってしまえば,

- $\zeta \in \mathbb{Q}$ が 0 に非常に近い $\Rightarrow \overline{y}(\zeta) \notin \mathbb{Q}^n$.

ここで, 近いとは通常の距離を意味する.

上の命題 2 は局所的な結果である。そこで, 次の問題を考える.

問題 2.

次のような小さくない与えられた区間に対して,

For $L \subset \mathbb{R}$: a given interval, not so short, (e.g, $L = (-1, 1)$: 開区間、等)

その区間内でいくつかの G- 関数の値が同時に有理数とならない点の個数はどのくらいあるか？

How many $\zeta \in L \cap \mathbb{Q}$ with $\overline{y}(\zeta) \notin \mathbb{Q}^n$ exist?

注意.

命題 2 を上の問題に適用することはできない. 命題 2 の定数 C_1 は ζ が 0 に近いということに依存しているからである[8].

§3 結果（問題 2 のある回答）

結果を述べる前に記号を導入する.

記法.

$q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, に対して, 有理数の集合 $U_r(q)$ を次のようにおく：

$$U_r(q) := \{\zeta \in \mathbb{Q} \mid |\zeta| < r,\ q\zeta \in \mathbb{Z}\}.$$

注意.

次は自明な評価である：

$$\varlimsup_{q \to \infty} \frac{\log \# U_r(q)}{\log q} = 1.$$

次の定理 1 が主結果である：

定理 1.

自然数 $m, n \in \mathbb{N}$ with $n \geq m \geq 6$ と, 行列 $A \in M_n(\mathbb{Q}(x))$ に対して, 微分方程式 $(d/dx - A)\overline{y} = 0$ が, 次の三つをみたすとする：

- $(d/dx - A)$ は G-operator.
- $\overline{y}$ は原点 0 を中心とした半径 $R > 0$ の円内で正則.
- $\overline{y}$ の成分で, $\mathbb{Q}(x)$ 上線形独立となる（少なくとも） m 個の成分が存在する.

---

[7]文献 [4] のような結果もある. しかしながら, この [4] での内容も本報告の問題 2 の回答を得ることはできない.

[8]命題 2 の証明の方法では, ある区間全体に対する C_1 のような定数を得ることができないのである.

このとき, $0 < r < R$ なる 任意の r に対して, 次が成り立つ：

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \frac{\log \#\{\zeta \in U_r(q) \mid \overline{y}(\zeta) \in \mathbb{Q}^n\}}{\log q} \leq \frac{35}{6m}.$$

この定理 1 により, $m \geq 6$ の仮定から同時に有理数を値にとる有理数の点の個数はある程度上から押えられることがわかる. ここで $35/6m$ は証明の技術的な理由で得られる数である.

(証明の概略[9]) この証明のアイデアはいわゆる Schneider-Lang の定理[10]を参考にしている. Schneider-Lang の定理とは, ある条件をみたす全平面上の複数の有理型関数の有理数での値が同時に有理数となる点の個数は有限個, というものである. ここで, 今回の証明とその Schneider-Lang の定理の証明の違いだけを簡単に述べると以下の通り: Schneider-Lang の方法は, 最初に補助関数を考え, そして, その補助関数の収束半径を無限大に飛ばす, という方法である. 我々の方法は, 同様に補助関数を考え, そして, 収束半径を飛ばすかわりに, $U_r(q)$ の q を十分大きくとる, という方法を用いる.

例 4.

f を $\mathbb{Q}$-parameters なるガウスの超幾何級数とする. もし $1, f, f', f^2, ff', (f')^2$ が $\mathbb{Q}(x)$ 上線形独立ならば, 次が成り立つ：

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \frac{\log \#\{\zeta \in U_r(q) \mid f(\zeta), f'(\zeta) \in \mathbb{Q}\}}{\log q} \leq \frac{35}{36}.$$

系 1.

f を階数 n の $\mathbb{Q}(x)$- 係数線形常微分方程式の G- 関数なる解とする. $R > 0$ を f の 0 での収束半径とする. もし, f が $\mathbb{Q}(x)$ 上代数的独立ならば, 次が成り立つ：

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \frac{\log \#\{\zeta \in U_r(q) \mid f^{(i)}(\zeta) \in \mathbb{Q},\ i = 0, \ldots, n-1\}}{\log q} = 0.$$

例 5.

$0 < r < 1$ なる $r \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \frac{\log \#\{\zeta \in U_r(q) \mid \log(1-x) \in \mathbb{Q}\}}{\log q} = 0.$$

この例はリンデマンの定理 (0 と 1 以外の代数的数の log の値は超越数) より明白であるが, 例 5 は指数関数の性質を使わないで得られていることに注意したい.

注意.

系 1 の仮定のもと, もし $\overline{\lim}_{q\to\infty} \cdots > 0$ ならば, f は代数関数である.

References

1. Y. André, *G-functions and Geometry*, Max-Planck-Institut, Bonn, 1989.
2. E. Bombieri, *On G-functions*, Recent progress in analytic number theory **2** (1981), Academic Press, New York, 1 – 67.
3. D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky., *Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions.*, Lect. Notes in Math. **1135** (1985), Springer-Verlag, Berlin, 9–51.
4. G. V. Chudnovsky., *Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence, Recent progress*, London Math. Soc. Lecture Note **56** (1982), Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 11–82.
5. A. I. Galočhkin, *Estimates from below of polynomials in the values of analytic functions of a certain class*, Math. USSR Sbornik **24** (1974), 385 – 407, Original article in Math. Sbornik **95 (137)** (1974), 396 – 417.
6. F. Gramain, M .Mignotte, M .Waldschmidt, *Valeurs algébriques de fonctions analytiques.*, Acta Arith. **47** (1986), 97–121.
7. S. Lang, *Introduction to transcendental numbers*, ddison-Wesley Publishing Co., Massachusetts, Palo Alto, London, Ontario, 1966.
8. M. Nagata, *A generalization of the sizes of differential equations and its applications to G-function theory*, Preprint Math. Tokyo Institute of Technology (1994).

[9] この定理 1 は多変数かつ射影的な場合として少し拡張した命題で証明される. 詳細は文献 [9] 参照.

[10] 文献 [7] 参照. 拡張された結果は [12,6,13] 参照.

9. ______, *An estimation on the number of rational values related to G-functions (数理研 preprint/投稿中)* . **RIMS-1231** (1999).
10. ______, *On rational points of G-functions*, 日仏超越数論研究集会報告集 (慶應義塾大学) **27** (1999), 65–73.
11. C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. nr.1 (1929).
12. I. Wakabayashi, *Algebraic values of meromorphic functions on Riemann surfaces*, J. Number Theory **25** ((1987), no. 2,), 220–229.
13. ______, *Algebraic values of functions on the unit disk*, Prospects of mathematical science (Tokyo, 1986), (1988), World Sci. Publishing, Singapore, 235–266.

Oiwake-cho, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8502, Japan
E-mail address: mnagata@kurims.kyoto-u.ac.jp