数理解析研究所講究録
1160巻 2000年 155-162

ON INHOMOGENEOUS DIOPHANTINE APPROXIMATION AND THE BORWEINS' ALGORITHM

三重大教育　小松　尚夫 (TAKAO KOMATSU)

We obtain the values $\mathcal{M}(\theta,\phi)=\liminf_{|q|\to\infty}|q|\|q\theta-\phi\|$ by using the algorithm by Borwein and Borwein. One example is given.

1. 序論

θを無理数、ϕを実数とし、$q\theta-\phi$ がどんな整数qを取っても整数にならないものとする。このようなペアθ, ϕに対して 非斉次近似定数

$$\mathcal{M}(\theta,\phi)=\liminf_{|q|\to\infty}|q|\|q\theta-\phi\|$$

を定義する。また、補助定数として

$$\mathcal{M}_+(\theta,\phi)=\liminf_{q\to+\infty}q\|q\theta-\phi\|,\quad \mathcal{M}_-(\theta,\phi)=\liminf_{q\to+\infty}q\|q\theta+\phi\|$$

を定義しておく。すなわち、$\mathcal{M}(\theta,\phi)=\min\bigl(\mathcal{M}_+(\theta,\phi),\mathcal{M}_-(\theta,\phi)\bigr)$ である。$\mathcal{M}(\theta,\phi)$や$\mathcal{M}_+(\theta,\phi)$の値については、いろいろな独自のアルゴリズムを使うことによってその評価が研究されてきた(例えば、[2], [3], [4], [6], [7], [11] などを見よ)。しかし、具体的なθとϕのペアについて、$\mathcal{M}(\theta,\phi)$ を求めることは殆どなく、実際今までの研究で使用したアルゴリズムは実用的なものではなかった。最近になって著者[7]は、西岡-塩川-田村のアルゴリズム[9]を使うことにより$\mathcal{M}(\theta,\phi)$の値が比較的簡単に求められることを発見した。この方法によれば、少なくともθが実2次無理数で$\phi\in\mathbb{Q}(\theta)$であるどんなペア$\theta,\phi$に対しても$\mathcal{M}(\theta,\phi)$の値が実際に求められることがわかった。更に著者 [8] は、θがHurwitzian number、すなわちその連分数展開が擬似循環節を持つときにも$\mathcal{M}(\theta,\phi)$ が求められることを突き止めた。例えば、$\mathcal{M}(e,1/3)=1/18,\mathcal{M}(e^{1/s},1/3)=0$ ($s\equiv 2 \pmod 3$) などがわかったが、これはまた、$\mathcal{M}(\theta,\phi)=0$を満たす$\theta$と$\phi$の具体的なペアがわかった最初のケースであった。

このように、西岡-塩川-田村のアルゴリズムと$\mathcal{M}(\theta,\phi)$の値については非常によい相性をもつことが立証されてきているのであるが、西岡-塩川-田村のアルゴリズムと対称的な関係にあるBorwein兄弟のアルゴリズム [1]と$\mathcal{M}(\theta,\phi)$の値についての関係も興味深いものと思われる。この論文ではその関係を述べると共に、その応用例も示す。

$\theta=[a_0;a_1,a_2,\dots]$ によって θの (単純) 連分数展開を表すが、

$$\theta=a_0+\theta_0,\qquad a_0=\lfloor\theta\rfloor,$$
$$1/\theta_{n-1}=a_n+\theta_n,\qquad a_n=\lfloor 1/\theta_{n-1}\rfloor\qquad (n=1,\ 2,\ \dots)$$

と$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ を導入しておく。θの第k近似（分数）$p_k/q_k = [\, a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_k\,]$ は漸化式

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots), \qquad p_{-2} = 0,\quad p_{-1} = 1, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots), \qquad q_{-2} = 1,\quad q_{-1} = 0 \end{aligned}$$

によって定められる。西岡-塩川-田村のアルゴリズム[9]では、数列$\{\theta_0,\ \theta_1,\ \ldots\}$による$\phi$の表現（非斉次連分数展開）を

$$\begin{aligned} \phi &= b_0 - \phi_0, & b_0 &= \lceil \phi \rceil, \\ \phi_{n-1}/\theta_{n-1} &= b_n - \phi_n, & b_n &= \lceil \phi_{n-1}/\theta_{n-1} \rceil \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}$$

によって与え、それによって ϕは

$$\begin{aligned} \phi &= b_0 - b_1\theta_0 + b_2\theta_0\theta_1 - \cdots + (-1)^k b_k \theta_0\theta_1 \cdots \theta_{k-1} - (-1)^k \theta_0\theta_1 \cdots \theta_{k-1}\phi_k \\ &= b_0 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_{k+1}\theta_0\theta_1 \cdots \theta_k = b_0 - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} D_k \end{aligned}$$

と表された。ここで　$D_k = q_k\theta - p_k = (-1)^k \theta_0\theta_1 \ldots \theta_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ である。以上の記号のもと、筆者[7]は次を得た。

定理**A.**

$$\mathcal{M}_-(\theta, \phi) = \liminf_{n \to +\infty} \min(B_n \|B_n\theta + \phi\|, B_n^* \|B_n^*\theta + \phi\|),$$

ここで　$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k q_{k-1}$ 及び $B_n^* = B_n - q_{n-1}$ である。

また、$\|B_n\theta + \phi\| = \phi_n |D_{n-1}|$, $\|B_n^*\theta + \phi\| = (1 - \phi_n)|D_{n-1}|$が成り立ち、$\mathcal{M}_+(\theta, \phi) = \mathcal{M}_-(\theta, 1 - \phi)$とから$\mathcal{M}(\theta, \phi)$が求められる。

一方、Borwein兄弟[1]は次のアルゴリズムを使った。

$$\begin{aligned} \phi &= d_0 + \gamma_0, & d_0 &= \lfloor \phi \rfloor, \\ \gamma_{n-1}/\theta_{n-1} &= d_n + \gamma_n, & d_n &= \lfloor \gamma_{n-1}/\theta_{n-1} \rfloor \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}$$

これによってϕは

$$\begin{aligned} \phi &= d_0 + d_1\theta_0 + d_2\theta_0\theta_1 + \cdots + d_i\theta_0\theta_1 \cdots \theta_{i-1} + \gamma_i\theta_0\theta_1 \cdots \theta_{i-1} \\ &= d_0 + d_1 D_0 - d_2 D_1 + \cdots + (-1)^{i-1} d_i D_{i-1} + (-1)^{i-1}\gamma_i D_{i-1} \\ &= d_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} d_i D_{i-1} \end{aligned}$$

と表される。

$C_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} d_k q_{k-1}$とおくと、$\|C_n\theta - \phi\| = 1 - \{C_n\theta - \phi\} = \|(-1)^n \gamma_n D_{n-1}\| = \gamma_n |D_{n-1}|$がわかる。

以下、一般性を失わずに$0 < \phi \leq 1/2$と仮定する。すると$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} d_k D_{k-1}$ と表される。ここで更に $1 - \phi$もBorwein兄弟のアルゴリズムを使って表す。

$$\begin{aligned} 1 - \phi &= d_0' + \gamma_0' = \gamma_0', & d_0' &= \lfloor 1 - \phi \rfloor = 0, \\ \gamma_{n-1}'/\theta_{n-1}' &= d_n' + \gamma_n', & d_n' &= \lfloor \gamma_{n-1}'/\theta_{n-1}' \rfloor \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}$$

とすれば、$1 - \phi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} d_k' D_{k-1}$ が成り立つ。$C_n' = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} d_k' q_{k-1}$ とおけば、$\|C_n'\theta + \phi\| = \gamma_n' |D_{n-1}|$ である。以上の記号のもとに次が成り立つ。

定理 1.

$$\mathcal{M}(\theta,\phi)=\liminf_{n\to+\infty}\min(|C_n|\gamma_n|D_{n-1}|,|C'_n|\gamma'_n|D_{n-1}|,\\ (|C_n|+q_{n-1})(1-\gamma_n)|D_{n-1}|,(|C'_n|+q_{n-1})(1-\gamma'_n)|D_{n-1}|).$$

注意. 定理の証明のところでわかることだが、最後の2つの値はそれぞれ $C_{2n-1}>0$ (よって下のLemma4より、同時に$C'_{2n-1}>0$); $C_{2n}<0$ (よって同時に$C'_{2n}<0$)の時のみ考慮すればよく、それ以外の時は不要である。

$\mathcal{M}_+(\theta,\phi)$ や$\mathcal{M}_-(\theta,\phi)$ の個々の値については、(より複雑な形になるが) 次がわかる。

命題.

$$\mathcal{M}_+(\theta,\phi)=\liminf_{n\to+\infty}\min(C_n\|C_n\theta-\phi\|,(C_{2n-1}+q_{2n-2})\|(C_{2n-1}+q_{2n-2})\theta-\phi\|,\\ |C'_n|\big\||C'_n|\theta-\phi\big\|,(|C'_{2n}|+q_{2n-1})\big\|(|C'_{2n}|+q_{2n-1})\theta-\phi\big\|),$$

ここでnは$C_n>0$または$C'_n<0$を満たすものだけを取る。

$$\mathcal{M}_-(\theta,\phi)=\liminf_{n\to+\infty}\min(C'_n\|C'_n\theta+\phi\|,(C'_{2n-1}+q_{2n-2})\|(C'_{2n-1}+q_{2n-2})\theta+\phi\|,\\ |C_n|\big\||C_n|\theta+\phi\big\|,(|C_{2n}|+q_{2n-1})\big\|(|C_{2n}|+q_{2n-1})\theta+\phi\big\|),$$

ここでnは$C_n<0$または$C'_n>0$を満たすものだけを取る。

2. 諸 Lemma

証明は省略するが、定義より次の４つの事実がわかる。

Lemma 1.

(1) もし $a_n=d_n>0$ならば、$d_{n+1}=0$.

(2) もし $\theta_n+\gamma_n>1$ならば、$0\le a_{n+1}-d_{n+1}\le 1$. もし$\theta_n+\gamma_n<1$ならば、$a_{n+1}\ne d_{n+1}$.

(3) $\theta_n>\gamma_n$であるのは、$d_{n+1}=0$である時またその時に限る。$\theta_n\le\gamma_n$であるのは、$d_{n+1}\ge 1$である時またその時に限る。

(4) もし$d_n>0$ならば、$\begin{cases}1\le C_n\le q_n, & (n\text{が奇数});\\ -q_n+1\le C_n\le 0, & (n\text{が偶数}).\end{cases}$

Lemma 2 ([5], [10]). $j=1,2,\ldots,q_n-1$に対して、$u_j\equiv jq_{n-1} \pmod{q_n}$とおき、集合として$\{u_1,u_2,\ldots,u_{q_n-1}\}=\{1,2,\cdots,q_n-1\}$ を満たすものとする。このとき、

$$\{u_1\theta\}<\{u_2\theta\}<\cdots<\{u_{q_n-1}\theta\}\quad (n\text{が奇数});$$
$$\{u_1\theta\}>\{u_2\theta\}>\cdots>\{u_{q_n-1}\theta\}\quad (n\text{が偶数}).$$

Lemma 3. もし$C_n + C'_n = (-1)^{n-1}q_n$ならば、$C_{n+1} + C'_{n+1} = (-1)^{n-1}q_n$.
もし$C_n + C'_n = (-1)^{n-1}(q_n - q_{n-1})$または $C_n + C'_n = (-1)^n q_{n-1}$ならば、

$$C_{n+1} + C'_{n+1} = \begin{cases} (-1)^n q_{n+1}, & \gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1} = \theta_{n+1}\text{の時;} \\ (-1)^n(q_{n+1} - q_n), & \gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1} = \theta_{n+1} + 1\text{の時}. \end{cases}$$

Lemma 4.

(1) すべての$n = 1, 2, \ldots$ に対して、$C_n C'_n \geq 0$

(2) $C_n C_{n+1} \geq 0$かつ$C'_n C'_{n+1} \geq 0$ であるのは、$C_n + C'_n = (-1)^{n-1}q_n$または$(-1)^n q_{n-1}$である時またその時に限る。そしてこの時、$|C_{n+1}| = |C_n| + d_{n+1}q_n \geq |C_n|$ かつ $|C'_{n+1}| = |C'_n| + d'_{n+1}q_n \geq |C'_n|$である。

(3) $C_n C_{n+1} < 0$ かつ $C'_n C'_{n+1} < 0$ であるのは、$C_n + C'_n = (-1)^{n-1}q_n + (-1)^n q_{n-1}$である時またその時に限る。そしてこの時、$|C'_{n+1}| = |C_n| + (d'_{n+1} - 1)q_n + q_{n-1} > |C_n|$ かつ $|C_{n+1}| = |C'_n| + (d_{n+1} - 1)q_n + q_{n-1} > |C'_n|$ である。

3. 定理１及び命題の証明

nを奇数とする。もし$C_n > 0$ならば、Lemma 3より $C_n + C'_n = q_n$ または $C_n + C'_n = q_n - q_{n-1}$である。$\{jq_{n-1}\theta\}$ はLemma 2より$\{q\theta\}$ $(0 < q < q_n)$の中で j番目に小さい値であること、また$\|(C_n + jq_{n-1})\theta - \phi\| = (j - \gamma_n)|D_{n-1}| > \gamma_n|D_{n-1}| = \|C_n\theta - \phi\|$ $(j \geq 2)$であることから、$0 < q < q_n$で$q \neq q_{n-1}$であるようなすべての整数 qに対して、

$$(C_n + q)\|(C_n + q)\theta - \phi\| > C_n\|C_n\theta - \phi\|$$

が成り立つ。$\{(q_n - jq_{n-1})\theta\}$は$\{q\theta\}$ $(0 < q < q_n)$の中でj番目に小さい値であり$\|(C_n - q_n + jq_{n-1})\theta - \phi\| = |D_n| + (j - \gamma_n)|D_{n-1}| > \gamma_n|D_{n-1}| = \|C_n\theta - \phi\|$ $(j \geq 2)$であるから、$0 < q < q_n - jq_{n-1}$であるすべての整数qに対して

$$\begin{aligned}(C_n - q)&\|(C_n - q)\theta - \phi\| \\ &> \min(C_n\|C_n\theta - \phi\|, (C_n - q_n + jq_{n-1})\|(C_n - q_n + jq_{n-1})\theta - \phi\|, \\ &\qquad\qquad (C_n - q_{n-1})\|(C_n - q_{n-1})\theta - \phi\|)\end{aligned}$$

を得る。ここで、$C_n - q_n + jq_{n-1} > 0$を満たす最小の正整数をjとした。また$\|(C_n - q_{n-1})\theta - \phi\| = (1 + \gamma_n)|D_{n-1}|$であることに注意。

Lemma 3より $C_{n-1} + C'_{n-1} = -(q_{n-1} - q_{n-2})$ または $C_{n-1} + C'_{n-1} = q_{n-2}$である。$C_{n-1} + C'_{n-1} = -(q_{n-1} - q_{n-2})$であるとき、もし

$$C_n - q_n + jq_{n-1} = |C'_{n-1}| - (a_n - d_n - j + 1)q_{n-1} > |C'_{n-1}| + q_{n-2}$$

または $j \geq a_n - d_n + 2$であるならば、

$$\begin{aligned}(|C'_{n-1}| + q_{n-2})(1 - \gamma'_{n-1})|D_{n-2}| &= (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(a_n + \theta_n - d_n - \gamma'_n)|D_{n-1}| \\ &< (C_n - q_n + jq_{n-1})(|D_n| + (j - \gamma_n)|D_{n-1}|)\end{aligned}$$

を得る。$j = a_n - d_n + 2$である時、$C_n - q_n + jq_{n-1} = |C'_{n-1}| + q_{n-1}$が成り立つことに注意する。次に、もし

$$C_n - q_{n-1} = |C'_{n-1}| + (d_n - 2)q_{n-1} + q_{n-2} > |C'_{n-1}| + q_{n-2}$$

または $d_n \geq 3$ならば、$d_n + d'_n = a_n + 1$より $\gamma_n + \gamma'_n = \theta_n$かつ $|C'_{n-1}| < q_{n-1} - q_{n-2} < (1+\gamma_n)q_{n-1} - q_{n-2}$ であるから、

$$\begin{aligned}
&(|C'_{n-1}| + q_{n-2})\|(|C'_{n-1}| + q_{n-2})\theta - \phi\| = (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(1 - \gamma'_{n-1})|D_{n-2}| \\
&= (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(d_n - 2)|D_{n-1}| + (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(1 + \gamma_n)|D_{n-1}| \\
&< q_{n-1}(1 + \gamma_n)(d_n - 2)|D_{n-1}| + (|C'_{n-1}| + q_{n-2})(1 + \gamma_n)|D_{n-1}| \\
&= (C_n - q_{n-1})(1 + \gamma_n)|D_{n-1}| = (C_n - q_{n-1})\|(C_n - q_{n-1})\theta - \phi\|
\end{aligned}$$

を得る。もし$d_n = 2$ならば、$C_n - q_{n-1} = |C'_{n-1}| + q_{n-2}$である。

$C_{n-1} + C'_{n-1} = q_{n-2}$である時、もし

$$C_n - q_n + jq_{n-1} = C_{n-1} - (a_n - d_n - j)q_{n-1} - q_{n-2} \geq C_{n-1} + q_{n-1} - q_{n-2}$$

または$j \geq a_n - d_n + 1$ならば、

$$\begin{aligned}
&(C_n - q_n + jq_{n-1})(|D_n| + (j - \gamma_n)|D_{n-1}|) \\
&\qquad \geq (C_{n-1} + q_{n-1} - q_{n-2})(|D_{n-1}| + (1 - \gamma_{n-1})|D_{n-2}|)
\end{aligned}$$

が成り立つ。もし

$$C_n - q_{n-1} = C_{n-1} + (d_n - 1)q_{n-1} > C_{n-1} + q_{n-1} - q_{n-2}$$

または$d_n \geq 2$ならば、$C_{n-1} < q_{n-2} < q_{n-1}(1 + \gamma_n)$より

$$\begin{aligned}
C_{n-1}\|C_{n-1}\theta - \phi\| &= C_{n-1}\gamma_{n-1}|D_{n-2}| = C_{n-1}(d_n - 1 + 1 + \gamma_n)|D_{n-1}| \\
&< q_{n-1}(1 + \gamma_n)(d_n - 1)|D_{n-1}| + C_{n-1}(1 + \gamma_n)|D_{n-1}| \\
&= (C_n - q_{n-1})(1 + \gamma_n)|D_{n-1}|
\end{aligned}$$

が成り立つ。もし$d_n = 1$ならば、$C_n - q_{n-1} = C_{n-1}$である。C_nとC'_n（同じくd_nとd'_n, γ_nとγ'_nなど）が互いに交換されている場合にも、同様の事実が証明できる。

nが奇数で$C_n + C'_n = -q_{n-1}$であると仮定する。Lemma 3より$d_n = d'_n = 0$かつ$C_{n-1} + C'_{n-1} = -q_{n-1}$である。$0 < q < q_n$で$q \neq q_n - q_{n-1}$なすべての整数 qに対して

$$(|C_n| + q)\|(|C_n| + q)\theta - \phi\| = |C_n - q|\||C_n - q|\theta - \phi\| > |C_n|\||C_n|\theta - \phi\|$$

が成り立つ。もし$a_n \geq 2$ならば、$\gamma_n + \gamma'_n = 1$より

$$\begin{aligned}
&|C'_n|\|C'_n\theta + \phi\| = |C'_n|\||C'_n|\theta - \phi\| = |C'_n|\gamma'_n|D_{n-1}| \\
&< (|C_n| + q_n - q_{n-1})(\theta_n + \gamma'_n)|D_{n-1}| \\
&= (|C_n| + q_n - q_{n-1})\|(|C_n| + q_n - q_{n-1})\theta - \phi\|
\end{aligned}$$

を得る。もし$a_n = 1$ならば、$|C_n| + q_n - q_{n-1} = |C_{n-1}| + q_{n-2}$である。

nを偶数とする。もし$C_n > 0$ならば、$C_n + C'_n = q_{n-1}$である。$\{(q_n - jq_{n-1})\theta\}$が$\{q\theta\}$ $(0 < q < q_n)$の中でj番目に小さい値であり $\|(C_n + q_n - jq_{n-1})\theta - \phi\| = |D_n| + (j - \gamma_n)|D_{n-1}| > \gamma_n|D_{n-1}| = \|C_n\theta - \phi\|$ $(j \geq 2)$ であることから、$0 < q < q_n$で$q \neq q_n - q_{n-1}$なすべての整数 qに対して

$$(C_n + q)\|(C_n + q)\theta - \phi\| > C_n\|C_n\theta - \phi\|$$

を得る。もし$a_n \geq 2$ならば、$\gamma_n + \gamma'_n = 1$より、

$$\begin{aligned} &C'_n\|C'_n\theta + \phi\| = C'_n\gamma'_n|D_{n-1}| \\ <&(C_n + q_n - q_{n-1})(\theta_n + \gamma'_n)|D_{n-1}| \\ =&(C_n + q_n - q_{n-1})\|(C_n + q_n - q_{n-1})\theta - \phi\| \end{aligned}$$

を得る。もし$a_n = 1$ならば、$C_n + q_n - q_{n-1} = C_{n-1} + q_{n-2}$である。

$C_n + C'_n = -q_n$ または $C_n + C'_n = -q_n + q_{n-1}$ である時も同様に証明される。例えば、$|C_n|$と$|C'_n|$を、奇数の場合の C_nとC'_nにそれぞれ置き換えればよい。

4. 応用例

簡単のため、Borwein兄弟によるϕ $(0 < \phi < 1)$ のθ展開による式を、自明な$d_0 = 0$を省いて $\phi =_\theta \langle d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\rangle$ で表すことにする。上線は循環(または)擬似循環を表し、

$$\begin{aligned} \phi &=_\theta \left\langle d_1, \ldots, d_n, \overline{f_1(i), \ldots, f_m(i)}\right\rangle_{i=1}^{k} \\ &=_\theta \left\langle d_1, \ldots, d_n, \overline{f_1(1), \ldots, f_m(1), f_1(2), \ldots, f_m(2), \ldots, f_1(k), \ldots, f_m(k)}\right\rangle \end{aligned}$$

と約束する。

例として、$\theta = (\sqrt{D} - ab)/(2a) = [0; \overline{a, b}]$の場合を考える。ここで$D = ab(ab + 4)$、$a$と bは固定された正整数である。

定理2. ある正整数$b \geq 2$に対して

$$\mathcal{M}(\theta, \frac{1}{b}) = \frac{a}{b^2\sqrt{D}}$$

注意. $a = 1$の場合だけが Theorem 6, [7]で証明された。

証明. $\phi = 1/b$は

$$\frac{1}{b} =_\theta \left\langle \overline{\left\lfloor \frac{ia}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(i-1)a}{b} \right\rfloor, \left\{\frac{ia}{b}\right\} b} \right\rangle_{i=1}^{b}$$

と表され、$i = 1, 2, \ldots, b$に対して

$$\gamma_{2i-1} = \frac{\theta_1}{b} + \left\{\frac{ia}{b}\right\}, \qquad \gamma_{2i} = \frac{1}{b} + \left\{\frac{ia}{b}\right\}\theta$$

である。

$$\left(\left\lfloor \frac{ia}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(i-1)a}{b} \right\rfloor\right) q_{2i-2} - \left\{ \frac{ia}{b} \right\} bq_{2i-1}$$
$$= \frac{1}{b}(q_{2i-1} - q_{2i-3}) + \left\{ \frac{(i-1)a}{b} \right\} q_{2i-2} - \left\{ \frac{ia}{b} \right\} q_{2i}$$

であるから、

$$C_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{b}(q_{2i-1} - q_{2i-3}) + \left\{ \frac{(i-1)a}{b} \right\} q_{2i-2} - \left\{ \frac{ia}{b} \right\} q_{2i} \right)$$
$$= \frac{1}{b} q_{2n-1} - \left\{ \frac{na}{b} \right\} q_{2n}$$

を得る。$\theta = [0; \overline{a, b}]$の時、

$$q_{2n-1} = \frac{a(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \quad \text{かつ} \quad q_{2n} = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}$$

が成り立ち、

$$\alpha = \frac{(ab+2) + \sqrt{D}}{2} \quad \text{かつ} \quad \beta = \frac{(ab+2) - \sqrt{D}}{2}$$

であり、$\alpha + \beta = ab + 2$, $\alpha\beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{D}$, $\theta\theta_1 = \beta$, $a\theta = b\theta_1$ を満たしている([7]を見よ)。故に、

$$q_{2n-1}|D_{2n-1}| = \frac{a(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}(\theta\theta_1)^n \to \frac{a}{\sqrt{D}} \quad (n \to \infty)$$

かつ

$$q_{2n}|D_{2n-1}| = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \beta^n \to \frac{a}{\theta_1 \sqrt{D}}$$

を用いて、

$$\lim_{n\to\infty} C_{2n}\gamma_{2n}|D_{2n-1}|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\frac{a}{\sqrt{D}} - \left\{ \frac{na}{b} \right\} \frac{a}{\theta_1\sqrt{D}} \right) \left(\frac{1}{b} + \left\{ \frac{na}{b} \right\} \theta \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{b^2\sqrt{D}} \left(1 - b^2 \left\{ \frac{na}{b} \right\} - \frac{b^3}{a} \left\{ \frac{na}{b} \right\}^2 \right)$$

を得、これより $\liminf_{n\to\infty} |C_{2n}|\gamma_{2n}|D_{2n-1}| = a/b^2\sqrt{D}$が言える。
同様にして、$\liminf_{n\to\infty} |C_{2n-1}|\gamma_{2n-1}|D_{2n-2}| = a/b^2\sqrt{D}$を得る。
$1 - \phi = 1 - 1/b$は

$$1 - \frac{1}{b} =_\theta \left\langle \overline{a + \left\lfloor -\frac{ia}{b} \right\rfloor - \left\lfloor -\frac{(i-1)a}{b} \right\rfloor, \left\{ -\frac{ia}{b} \right\} b} \right\rangle_{i=1}^{b}$$

と表され、$i = 1, 2, \ldots, b$に対して

$$\gamma'_{2i-1} = \left(1 - \frac{1}{b}\right)\theta_1 + \left\{-\frac{ia}{b}\right\}, \qquad \gamma'_{2i} = 1 - \frac{1}{b} + \left\{-\frac{ia}{b}\right\}\theta$$

である（ただし、$b \geq a+2$でしかも$ka \equiv 1 \pmod b$を満たす正整数 kが存在するときにはこの形が少しだけ違ってくるが、議論は殆ど同様である)。

$$C'_{2n} = \left(1 - \frac{1}{b}\right) q_{2n-1} - \left\{-\frac{na}{b}\right\} q_{2n}$$

より、

$$C'_{2n}\gamma'_{2n}|D_{2n-1}| \sim \frac{a}{\sqrt{D}}\left(\left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{b}\right)b\left\{-\frac{na}{b}\right\} - \frac{b}{a}\left\{-\frac{na}{b}\right\}^2\right)$$

を得、これより $\liminf_{n\to\infty} |C'_{2n}|\gamma'_{2n}|D_{2n-1}| = (1-1/b)^2 \cdot (a/\sqrt{D})$が成り立つ。同様にして、$\liminf_{n\to\infty} |C'_{2n-1}|\gamma'_{2n-1}|D_{2n-2}| = (1-1/b)^2 \cdot (a/\sqrt{D})$を得る。

また $\liminf_{n\to\infty}(|C_{2n}| + q_{2n-1})(1-\gamma_{2n})|D_{2n-1}|$, $\liminf_{n\to\infty}(|C'_{2n}| + q_{2n-1})(1-\gamma'_{2n})|D_{2n-1}|$, $\liminf_{n\to\infty}(C_{2n-1} + q_{2n-2})(1-\gamma_{2n-1})|D_{2n-2}|$, $\liminf_{n\to\infty}(C'_{2n-1} + q_{2n-2})(1-\gamma'_{2n-1})|D_{2n-2}|$の値はすべて $a/b^2\sqrt{D}$以上であることも実際に計算される。

References

[1] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *On the generating function of the integer part:* $[n\alpha + \gamma]$, J. Number Theory **43** (1993), 293–318.

[2] J. W. S. Cassels, *Über* $\underline{\lim}_{x\to+\infty} x|\vartheta x + \alpha - y|$, Math. Ann. **127** (1954), 288–304.

[3] T. W. Cusick, A. M. Rockett and P. Szüsz, *On inhomogeneous Diophantine approximation*, J. Number Theory **48** (1994), 259–283.

[4] R. Descombes, *Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée*, Ann. Sci. École Norm Sup. **73** (1956), 283–355.

[5] T. Komatsu, *The fractional part of* $n\theta + \phi$ *and Beatty sequences*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux **7** (1995), 387–406.

[6] ———, *On inhomogeneous continued fraction expansion and inhomogeneous Diophantine approximation*, J. Number Theory **62** (1997), 192–212.

[7] ———, *On inhomogeneous Diophantine approximation and the Nishioka-Shiokawa-Tamura algorithm*, Acta Arith. **86** (1998), 305–324.

[8] ———, *On inhomogeneous Diophantine approximation with some quasi-periodic expressions*, Acta Math. Hung. **85** (1999), 311–330.

[9] K. Nishioka, I. Shiokawa and J. Tamura, *Arithmetical properties of a certain power series*, J. Number Theory **42** (1992), 61–87.

[10] T. van Ravenstein, *The three gap theorem (Steinhaus conjecture)*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **45** (1988), 360–370.

[11] V. T. Sós, *On the theory of Diophantine approximations*, II, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **9** (1958), 229-241.

Takao Komatsu
Faculty of Education
Mie University
514-8507 Japan
komatsu@edu.mie-u.ac.jp