数理解析研究所講究録
1160 巻 2000 年 19-24

保型形式に付随する L 関数のある平均値定理と non-vanishing 定理について

神谷諭一 (Yuichi Kamiya) 名大多元数理

N と q は自然数とし, k は正の偶数とする. $S_k(\Gamma_0(N))$ は $\Gamma_0(N)$ に対する重さ k の正則 cusp form のなす集合とする. この集合は Petersson 内積によって有限次元 Hilbert 空間になる. Dirichlet 指標 $\chi \pmod q$ と $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{a}_{f,\infty}(n)e^{2\pi inz}\in S_k(\Gamma_0(N))$ に対し L 関数を

$$L(f,\chi,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)a_{f,\infty}(n)}{n^s}$$

で定義する. ここで, $s=\sigma+it$ は複素変数であり, また $a_{f,\infty}(n)=\widehat{a}_{f,\infty}(n)n^{-(k-1)/2}$ とおいた. 右辺の級数は半平面 $\sigma>1$ で絶対かつ広義一様収束する. q と N が互いに素で χ が原始的のときには, $L(f,\chi,s)$ は $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続され関数等式を持つ. また f が normalized newform ならば $L(f,\chi,s)$ は Euler 積を持つ.

$s=1/2$ は $L(f,\chi,s)$ に対する critical strip の中心である点だが, Duke [3] でこの点における次のような non-vanishing 定理が導かれた.

Theorem (Duke). p は素数とし, q は p と互いに素とし, $\chi \pmod q$ は原始的とする. $\mathfrak{F}_p$ は $S_2(\Gamma_0(p))$ における直交基底で normalized newform 達からなるものとする. このとき絶対正数 C と q にのみ依存する正数 C_q が存在して, $p>C_q$ なるよう p を選べば少なくとも $Cp(\log p)^{-2}$ 個の $\mathfrak{F}_p$ の元 f に対して $L(f,\chi,1/2)\neq 0$ である.

一般に, $\mathfrak{F}_{k,N}$ は $S_k(\Gamma_0(N))$ の normalized newform 達からなる集合とする. $\mathfrak{F}_{k,N}$ の元の数は $\dim S_k(\Gamma_0(N))$ 以下であるが, $k=2,4,6,8,10,14$ かつ N が素数のときは ($S_k(\Gamma_0(1))=\{0\}$ だから) それらは等しくなる. $\dim S_k(\Gamma_0(N))$ に関しては

$$\dim S_k(\Gamma_0(N))=\frac{(k-1)N}{12}\prod_{p|N}(1+1/p)+O(N^{1/2}d(N))$$

が言えるので, 定理における $\mathfrak{F}_p$ の元の数は漸近的に $p/12$ であることに注意しよう.

Duke の定理は, $\mathfrak{F}_p$ 上にわたる $L(f,\chi,1/2)$ の一乗平均と二乗平均を調べそれらを Cauchy–Schwarz の不等式で比較することによって得られる. 但し, normalized newform の Petersson norm に関する良い評価が必要となる部分があり, これに

ついては Hoffstein-Lockhart [6] と Goldfeld-Hoffstein-Lieman [5] らによる結果を援用している.

今回, Duke の平均値定理の一つの拡張として次のような平均値定理を導くことができた.

Proposition 1. $N \geq 2$, $0 \leq \sigma \leq 1$, $\tau = |t| + 2$, $\mathcal{F}$ は $S_k(\Gamma_0(N))$ の正規直交基底, q は N と互いに素とし, $\chi \pmod q$ は原始的とする. このとき

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \overline{a_{f,\infty}(1)} L(f, \chi, s) = \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!} + O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{N}q\tau}\right)^{\sigma - 1/2} \left(\frac{q\tau}{\sqrt{N}}\right)^{k/2}\right)$$

となる. 但し implied constant は k にのみ依存する.

Proposition 2. $\tau = |t| + 2$, $\mathcal{F}$ は $S_k(\Gamma_0(N))$ の正規直交基底, q は N と互いに素とし, $\chi \pmod q$ は原始的とする. このとき

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} |L(f, \chi, 1/2 + it)|^2 \leq 4 \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!} \log(\sqrt{N} q\tau)$$
$$+ \begin{cases} O\left((\log(\sqrt{N}q\tau))^{1/2} + \dfrac{q\tau(\log(\sqrt{N}q\tau))^2}{\sqrt{N}}\right) & \text{if } k = 2 \\ O\left((\log(\sqrt{N}q\tau))^{1/2} + \dfrac{q\tau\log(\sqrt{N}q\tau)}{\sqrt{N}}\right) & \text{if } k > 2 \end{cases}$$

となり, $\sigma > 1/2$ のときには

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} |L(f, \chi, s)|^2 = \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!} L(2\sigma, \chi_0)$$
$$+ \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{2\sigma - 1}\left(\dfrac{q\tau\log(\sqrt{N}q\tau)}{\sqrt{N}} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}q\tau}\right)^{\sigma - 1/2}\right)\right) & \text{if } k = 2 \\ O\left(\dfrac{1}{2\sigma - 1}\left(\dfrac{q\tau}{\sqrt{N}} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{N}q\tau}\right)^{\sigma - 1/2}\right)\right) & \text{if } k > 2 \end{cases}$$

となる. 但し, χ_0 は 法 q の principal 指標, $L(\cdot, \chi)$ は Dirichlet L 関数で, implied constant は k にのみ依存する.

これらの結果を導く方法について述べてみたい.

先ず, 任意の正規直交基底にわたる平均値がうまく評価できることは Petersson の公式による.

Theorem (The Petersson formula). $\mathcal{F}$ は $S_k(\Gamma_0(N))$ の正規直交基底, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ は $\Gamma_0(N)$ に対する cusp とする. $S_k(\Gamma_0(N))$ の元 f と $\mathfrak{a}$ に対する scaling matrix $\sigma_{\mathfrak{a}}$

に対し $f|[\sigma_{\mathfrak{a}}]_k$ を

$$(f|[\sigma_{\mathfrak{a}}]_k)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{a}_{f,\mathfrak{a}}(n) e^{2\pi i n z}$$

のように展開し, $a_{f,\mathfrak{a}}(n) = \widehat{a}_{f,\mathfrak{a}}(n) n^{-(k-1)/2}$ とおく. このとき任意の自然数 m, n に対し

$$\begin{aligned}
&\frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in \mathcal{F}} \overline{a_{f,\mathfrak{a}}(m)} a_{f,\mathfrak{b}}(n) \\
&= \delta_{mn}\delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + 2\pi i^{-k} \sum_{c \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})} c^{-1} S_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(m, n; c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right),
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $S_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ は Kloosterman 和, J_{k-1} は order $k-1$ の Bessel 関数で, δ_{mn}, $\delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ は Kronecker デルタである.

この公式の証明や記号の詳細については [7] の p. 54 を参照されたい.

さて, q と N が互いに素で χ が原始的のときには $L(f, \chi, s)$ は次の関数等式を持つのだった:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2\pi}{\sqrt{Nq}}\right)^{-s} \Gamma(s + (k-1)/2) L(f, \chi, s) \\
&= \mu \left(\frac{2\pi}{\sqrt{Nq}}\right)^{s-1} \Gamma((k+1)/2 - s) L(f|[\sigma_0]_k, \overline{\chi}, 1-s).
\end{aligned}$$

ここで $\mu = i^k \chi(N) W(\chi)^2 q^{-1}$ で, $W(\chi)$ は Gauss 和であり, σ_0 は cusp 0 に対する scaling matrix である. Balasubramanian–Ramachandra [2] の Lemma 1′ の手法を用いれば, この関数等式から $L(f, \chi, s)$ の値を二つの Dirichlet 多項式と, ある複素積分の和で表示することができる (これはある種の近似関数等式と言って良いかも知れない). Dirichlet 多項式の一方は cusp ∞ での Fourier 係数を分子に持ち, もう一方の Dirichlet 多項式は cusp 0 での Fourier 係数を分子に持つ. そこで, Proposition 1 を導くには上記の Petersson の公式で $\mathfrak{a} = \infty$ かつ $\mathfrak{b} = \infty$, もしくは $\mathfrak{a} = \infty$ かつ $\mathfrak{b} = 0$ と制限したものを用いて評価していくことになる. Proposition 2 は Dirichlet L 関数の平均値に関する Balasubramanian–Ramachandra の手法 ([2] の Lemma 2′ を参照) と Duke-Friedlander-Iwaniec [4], Iwaniec [7] らによるある重要な評価 (前者の Theorem 1, 後者の Theorem 5.7 を参照, これらは Petersson の公式で $\mathfrak{a} = \infty$ かつ $\mathfrak{b} = \infty$ と制限したものを用いて導かれる) を用いて証明することができる.

Proposition 1 と 2 において誤差項への q と t の関与が重要である. Duke の手法をそのまま用いると, これらのパラメタの関与が大きくなってしまう. 一方, Balasubramanian–Ramachandra の手法を用いればこれらのパラメタの関与は比較的小さくできるのである. さて, Proposition 2 において, $\sigma = 1/2$ のときには二乗平均の上界をあたえているが, N に関する漸近式を導くことも大変重要であ

る. この問題に対しては, Balasubramanian–Ramachandra の手法より Duke の手法の方が有効で, この報告の最後に漸近式を書いておく (誤差項への q と t の関与は Proposition 2 におけるそれより悪い).

Proposition 1 と 2 で $s = 1/2 + it$ と制限し Cauchy–Schwarz の不等式を用いれば次の結果が容易に得られる.

Proposition 3. $N \geq 2$, $\tau = |t| + 2$, $\mathcal{F}$ は $S_k(\Gamma_0(N))$ の正規直交基底, q は N と互いに素とし, $\chi \pmod{q}$ は原始的とする. $k = 2$ のとき N を

$$\frac{\sqrt{N}}{(\log(N+1))^2} \geq \max\{q\tau(\log(q\tau))^2, C_2\}$$

なるように選び, $k > 2$ のとき N を

$$\frac{\sqrt{N}}{\log(N+1)} \geq \max\{q\tau \log(q\tau), C_k\}$$

なるように選ぶ. ここで C_k は k にのみ依存するある正数である. このときある絶対正数 $\mathcal{C}$ が存在して

$$\sum_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ L(f,\chi,1/2+it) \neq 0}} |a_{f,\infty}(1)|^2 \geq \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!} \frac{\mathcal{C}}{\log N}$$

が成り立つ.

一般に, $|a_{f,\infty}(1)|^2$ を N と $f \in \mathcal{F}$ について一様に, しかも鋭く評価することは難しいと思われる. しかし, 例えば $k = 2$ かつ N が素数のときは Hoffstein-Lockhart [6] と Goldfeld-Hoffstein-Lieman [5] らによる結果の一部:

$$|a_{f,\infty}(1)|^2 \ll \log p/p$$

があるので Proposition 3 と合わせて次の結果を得る.

Theorem. p は素数とし, q は p と互いに素とし, $\chi \pmod{q}$ は原始的とする. $\mathfrak{F}_p$ は $S_2(\Gamma_0(p))$ における直交基底で normalized newform 達からなるものとする. p を

$$\frac{\sqrt{p}}{(\log(p+1))^2} \geq \max\{q\tau(\log(q\tau))^2, C\}$$

なるよう選ぶ. ここで C は ある絶対正数である. このときある絶対正数 $\mathcal{C}'$ が存在して $\mathcal{C}'p(\log p)^{-2}$ 個の $\mathfrak{F}_p$ の元 f に対して, $L(f, \chi, 1/2 + it) \neq 0$ である.

最近, Akbary [1] によって Duke の定理は任意の重さ k に拡張された. このような拡張にともなう困難は, $S_k(\Gamma_0(p))$ の正規直交基底が old class に属する元を含んでいるので, 上記の Proposition 3 から non-vanishing 結果を導くとき old class に属する元に対する $|a_{f,\infty}(1)|^2$ の良い評価が必要になることから生ずる. Akbary

[1] では, Pizer [10] で考察されたある直交基底を導入することによりこの困難を克服したのである.

更に最近, Iwaniec–Sarnak, Kowalski–Michel, Vanderkam らにより Duke の定理の positive proportion 版が証明された. 即ち, Duke の定理において $Cp(\log p)^{-2}$ は $C'p$ に取り替えられるという大結果である. 詳細については [9], [11] を参照されたい.

最後に, Duke の方法に従えば次のような N に関する漸近式が導けるので触れておきたい.

Proposition 4. $\mathcal{F}$ は $S_k(\Gamma_0(N))$ の正規直交基底, q は N と互いに素とし, $\chi \pmod q$ は原始的, $\varepsilon > 0$ とする. このとき

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} |L(f,\chi,1/2+it)|^2 = \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}\frac{\phi(q)}{q}\log N + C_{k,q,t} + O(N^{(1-k)/2+\varepsilon}), \quad N\to\infty,$$

となり, $1/2 < \sigma \le 1$ のときには

$$\begin{aligned}\sum_{f\in\mathcal{F}} |L(f,\chi,s)|^2 &= \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}L(2\sigma,\chi_0)\\ &+ \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}L(2-2\sigma,\chi_0)\left(\frac{4\pi^2}{Nq^2}\right)^{2\sigma-1}\left|\frac{\Gamma(1-s+(k-1)/2)}{\Gamma(s+(k-1)/2)}\right|^2\\ &+ O(N^{1-k/2-\sigma+\varepsilon}), \quad N\to\infty,\end{aligned}$$

となる. 但し $\phi(\cdot)$ は Euler 関数, $C_{k,q,t}$ は計算可能な定数で, implied constant は k, q, t, ε に依存する.

References

[1] A. Akbary, *Non-vanishing of weight k modular L-functions with large level*, J. Ramanujan Math. Soc.**14** No. 1 (1999), 37–54.

[2] R. Balasubramanian and K. Ramachandra, *An alternative approach to a theorem of Tom Meurman*, Acta Arith. **LV** (1990), 351–364.

[3] W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level*, Invent. Math. **119** (1995), 165–174.

[4] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions*. II, Invent. Math. **115** (1994), 219–239.

[5] D. Goldfeld, J. Hoffstein, and D. Lieman, *An effective zero-free region, Appendix to: Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, Ann. Math. **140** (1994), 177–181.

[6] J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, Ann. Math. **140** (1994), 161–176.

[7] H. Iwaniec, Topics in Classical Automorphic Forms, Graduate Studies in Math. 17, American Mathematical Society, 1997.

[8] Y. Kamiya, *Certain mean values and non-vanishing of automorphic L-functions with large level*, to appear in Acta Arith.

[9] E. Kowalski and P. Michel, *The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions*, Duke Math. J. **100** (1999), 503–542.

[10] A. Pizer, *Hecke operators for $\Gamma_0(N)$*, Journal of Algebra **83** (1983), 39–64.

[11] J. Vanderkam, *The rank of quotients of $J_0(N)$*, Duke Math. J. **97** (1999), 545–577.

Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan