

ソボレフ空間に於ける非線型シュレディンガー方程式

北海道大学大学院理学研究科 小澤 徹 (Tohru Ozawa)  
東北大学大学院情報科学研究科 中村 誠 (Makoto Nakamura)

ここで考える方程式は

$$i\partial_t u + \Delta u = f(u) \tag{NLS}$$

なる形の非線型シュレディンガー方程式である。ここで  $u$  は  $1+n$  次元時空  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  上の複素数値関数  $(t, x) \mapsto u(t, x)$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\Delta$  は  $\mathbb{R}^n$  のラプラシアン,  $f$  は  $f(0) = 0$  なる複素数値関数とする。  $f(u)$  として典型的なモデルとして  $|u|^{p-1}u$ ,  $u^p$  などに比例する  $p$  乗の単独冪, 更には単独冪の線型結合が考えられる。  $u$  の導関数を含んだ非線型相互作用や積分項を含んだ非局所的相互作用などのモデルはここでは議論しない。我々の考える問題は (NLS) に対する初期値問題である。特に時間大域的に存在する解に興味を持つ。発展方程式論的枠組では NLS は  $\mathbb{R}^n$  上の関数の成すバナハ空間  $X$  に値を取る時間変数関数  $t \mapsto (x \mapsto u(t, x))$  についての  $X$  値常微分方程式と見做される。ガレルキン法などのコンパクト性を用いる解法を除けばその常微分方程式はデュアメル式に書かれる積分方程式

$$u(t) = U(t)\phi - i \int_0^t U(t-t')f(u(t'))dt' \tag{I}$$

に基づいて扱われる。ここで  $\phi = u(0)$  は初期時刻  $t = 0$  で与えたデータであり  $U(t)$  は自由シュレディンガー発展作用素  $\exp(i(t/2)\Delta)$  である。一般に空間  $X$  は非線型項の性質 (微分可能性, 原点での消滅度, 無限遠での増大度等), 空間次元  $n$ , 対象とする時間尺度 (時間局所的か大域的か) の三条件に応じて定まり逆に  $X$  の取り方に応じてこの三条件が自然に定まってくる。単独冪では原点での消滅度と無限遠での増大度は一致し, これと微分可能性の概念もほぼ一致する事に注意されたい ( $p$  乗の冪は分数階でも一般的には  $p$  回迄しか微分出来無い)。積分方程式 (I) の型から見て  $U(t)$  による  $X$  の不変性を要請するのは自然である。従って  $X$  としては任意階数  $s$  のソボレフ空間 (ベッセルポテンシャルの空間)  $H^s = (1 - \Delta)^{-s/2}L^2$ , 斉次ソボレフ空間 (リースポテンシャルの空間)  $\dot{H}^s = (-\Delta)^{-s/2}L^2$ , フーリエ不変な非負階数  $s$  の空間  $\Sigma^s = H^s \cap \mathcal{F}(H^s)$  ( $\mathcal{F}$  は  $\mathbb{R}^n$  上の関数に働くフーリエ変換), 更には (バナハでは無いが)  $H^s$  や  $\Sigma^s$  の射影極限として  $H^\infty, \mathcal{S}$  が考えられる。NLS を始めとする場の発展方程式では  $X$  として:

- (a) 方程式の力学量から定まる空間
- (b) 方程式の偏微分作用素から定まる空間
- (c) 方程式の尺度次元から定まる空間

の三種類が代表的である。

(a) 型としては例えば  $L^2$  は全電荷に対応する空間,  $H^1$  はエネルギーに対応する空間,  $\Sigma^1$  は運動量・位置作用素の定義域  $\mathcal{D}(-i\nabla) \cap \mathcal{D}(x)$  であり生成・消滅作用素の定義域であり個数作用素  $N$  の型式定義域  $Q(N)$  である. (b) 型としては例えば  $H^2 = \mathcal{D}(-\Delta)$  は NLS を  $L^2$  値常微分方程式と見做した際の強解に対応する空間,  $H^1 = Q(-\Delta)$  は NLS のディリクレ型式に拠る弱解に対応する空間,  $L^2$  は (I) が (通常の意味で) 意味を持つ最大の空間であり  $H^s$  ( $s > n/2$  又は  $s > n/2 + 2$ ) は NLS の古典解に対応する空間である. 線型偏微分作用素  $i\partial_t + \Delta$  と特別な交換関係を持つ一階の偏微分作用素を  $L^2$  に於いて実現した作用素の定義域もこの (b) 型に属する (非線型波動方程式に於けるクライネルマンのベクトル場の方法に相当する). (c) 型としては例えば時空の伸長から導かれる函数の変換で方程式の解の集合を不変に保つものに対し, その変換の空間方向の作用で保存される様なノルムを持つ函数空間が考えられる. (a)(b) 型は概ね方程式の線型 (化) 作用素で決定されるのに対し (c) 型は方程式の線型構造と非線型構造との釣合いで決定される事に注意する.

さて歴史的には  $H^1, \Sigma^1, H^2, L^2$  の順で NLS の時間局所的・大域的可解性が解明されている [1, 4, 5, 6, 14, 15, 18, 32, 34, 35]. その後  $H^s$  や  $\Sigma^s$  について幾つか結果が出ている [2, 10, 16, 17, 31]. 古典解については [3, 7, 8, 11, 12, 13, 30] を参考文献として挙げる. 我々の目的は  $H^s$  に於ける NLS の大域解に関する Cazenave-Weissler [2], Kato [16] の結果を一般化・精密化を含めて拡張する事である. 特に

- (i) ソボレフ空間  $H^s$  の階数  $s$ ,
- (ii) 空間  $\mathbb{R}^n$  の次元  $n$ ,
- (iii) 非線型項  $f(u)$  の挙動,

の三者間で記述される臨界関係を全ての  $s \geq 0$  に対して見出し NLS の大域的可解性との関係を論じその際必要とされるデータの小ささをより精密に定式化する事が具体的な作業と成る. 以下の内容は [19, 20, 21] で得られた結果を要約し基本的な考え方を紹介したものである (技術的には込み入った所は省略する場合がある).

ここに於ける立場はソボレフ空間  $H^s$  を (c) 型の空間と見做す事から始まる. 議論を簡単にする為非線型項は  $p$  乗の単独冪に代表される様な  $p$  次斉次であるとす

る.  $1+n$  次元時空  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  上の函数  $u$  及び  $\lambda > 0$  に対し函数  $u_\lambda$  が

$$u_\lambda(t, x) = \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

で定まり  $u$  が NLS の解である事と  $u_\lambda$  が NLS の解である事が任意の  $\lambda > 0$  に対して同値となる. さて  $u(0) : x \mapsto u(0, x)$  と  $u_\lambda(0) : x \mapsto u_\lambda(0, x)$  のノルムを斉次ソボレフ空間で計算すると

$$\|u_\lambda(0); \dot{H}^s\| = \lambda^{s+2/(p-1)-n/2} \|u(0); \dot{H}^s\|$$

なる関係がある事が分かる. ここで三つの場合を区別して考える:

(1)  $s > n/2 - 2/(p-1)$ .

(1a)  $u$  が大域解であると仮定する. このとき  $u_\lambda$  も大域解である.  $\lambda$  を十分大きく取る事により任意に大きなデータの下での大域解の存在が従う. これはエネルギーが定義出来且つそれが正である場合以外には期待出来無い.

(1b)  $u$  が爆発解であると仮定する. このとき  $u_\lambda$  も爆発解である.  $\lambda$  を十分小さく取る事により任意に小さなデータの下での爆発解の存在が従う. これはシュレディンガー型の発展方程式では通常期待出来無い.

(2)  $s < n/2 - 2/(p-1)$ .

(2a)  $u$  が大域解であると仮定する. このとき  $u_\lambda$  も大域解であるが  $\lambda$  を十分小さく取る事により (1a) と同様の結論に至る.

(2b)  $u$  が爆発解であると仮定する. このとき  $u_\lambda$  の爆発解であるが  $\lambda$  を十分大きく取る事により (1b) と同様の結論に至る.

(3)  $s = n/2 - 2/(p-1)$ .

(3a)  $u$  が大域解であると仮定する. このとき  $u_\lambda$  も大域解であるがその初期データの大きさは  $\lambda$  に依存しない.

(3b)  $u$  が爆発解であると仮定する. このとき  $u_\lambda$  の爆発解であるがその初期データの大きさは  $\lambda$  に依存しない.

従って非線型項に特定の条件 (ゲージ条件やポテンシャルの存在及びその挙動に対する条件など) を付けない場合は一般に (3) のみが許されるものと推論される. ここでは大域解のみを議論するので具体的には「臨界等式

$$s = n/2 - 2/(p-1)$$

の成立する場合データの  $\dot{H}^s$  ノルムが十分小さければ  $H^s$  解は時間大域的に存在するか?」と云う問題を考える事とする (勿論上記推論は厳密とは限らない. 厳密に

結論付ける為には仮定を適切に置いて定式化すれば良いのであってそれは困難では無いがここでは止めておく). 非線型発展方程式で一定の時空伸長で解の集合が不変な場合その時空伸長の空間方向  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  への作用が不変なノルムを持つ函数空間では「小さな大域解の存在 (small data-global existence)」が従う現象が屡々見られる. これをここでは発見者に因んで藤田・加藤の原理と呼ぶ事にする [29].

さて上記臨界等式に鑑み次の定義を導入する.

**定義** 冪  $p$  が  $H^s$  水準で臨界  $\Leftrightarrow p = 1 + 4/(n - 2s)$

冪  $p$  が  $H^s$  水準で劣臨界  $\Leftrightarrow p < 1 + 4/(n - 2s)$

そこで  $s$  に対し  $p_c = p_c(s) = 1 + 4/(n - 2s)$ ,  $p$  に対し  $s_c = s_c(p) = n/2 - 2/(p - 1)$  と置く. 次の簡単な事実に注意されたい.

(ア)  $s \geq 0$  に対して  $p_c(s)$  が定まる為には  $s < n/2$  でなければならない.

(イ)  $p > 1$  に対して  $s_c(p) \geq 0$  である為には  $p \geq 1 + 4/n$  でなければならない.

さて  $s = 0, 1, 2$  に対しての臨界冪は各々  $p = 1 + 4/n, 1 + 4/(n - 2), 1 + 4/(n - 4)$  であり前出の [6, 14, 15, 34, 35] 等で既に現れた数と一致している. 特に  $p = 1 + 4/n$  は擬共型冪であり  $\pm|u|^{4/n}u$  なる非線型項を持つ NLS は特別な対称性を持っている. 又  $p = 1 + 4/(n - 2)$  は所謂臨界ソボレフ指数であり NLS に限らず様々な方程式に対しても屡々登場する数である.  $0 \leq s < n/2$  なる  $s$  に対して Cazenave-Weissler [2] は単独冪  $\pm|u|^{p-1}u$  を持つ NLS は藤田・加藤の原理が成立する事を示した. ここでデータの小ささは  $H^s$  ノルムに課せられ更に  $[s] + 1 < p$  なる条件も必要としている. 後者の条件に於いて  $[s]$  は  $s$  の整数部分であり非線型項を  $[s] + 1$  回微分する為に必要なとされている. その後 Kato [16] は非線型項に対する条件を準斉次型:

$$|f^{(k)}(z)| \leq C|z|^{p-k}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$k = 0, 1, \dots$  なる条件に緩め, データの小ささは  $\dot{H}^s$  ノルムに課せば十分である事を示した. 我々の得た結果を述べる為次の仮定・記号を導入する. 先ず非線型項  $f$  に対する条件を考える.  $p > 1, s \geq 0$  に対し  $f \in C^{[s]}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$  が条件  $(A)_{p,s}$  を満たすとは  $0 \leq j \leq [s]$  なる全ての  $j$  に対し  $f^{(j)}(0) = 0$  であり評価

$$|f^{(k)}(z_1) - f^{(k)}(z_2)| \leq \begin{cases} C(|z_1| \vee |z_2|)^{p-[s]-1}|z_1 - z_2|, & p \geq [s] + 1 \text{ の場合} \\ C|z_1 - z_2|^{p-[s]}, & p < [s] + 1 \text{ の場合} \end{cases}$$

が全ての  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  に対して成立する事を云う (ここで  $a \vee b = \text{Max}(a, b)$ ). 次に大域解の属す函数空間  $\mathcal{X}^s$  は

$$\mathcal{X}^s = C(\mathbb{R}; H^s) \cap \bigcap_{0 \leq 2/q = \delta(r) < 1} L^q(\mathbb{R}; B_r^s \cap \dot{B}_r^0)$$

と定義する. ここで  $\delta(r) = n/2 - n/r$ ,  $B_r^s = B_{r,2}^s$  は通常のベゾフ空間でフーリエ空間に於ける局所化に対する総和を  $\ell^2$  の意味で取ったもので  $\dot{B}_r^0 = \dot{B}_{r,2}^0$  は斉次ベゾフ空間である [9]. さて我々の得た結果は次の様になる.

定理 1  $s, p_1, p_2$  は次の条件を満たすものとする.

$$\begin{cases} 0 \leq s < n/2, \\ 1 + 4/n \leq p_1 \leq p_2 \leq 1 + 4/(n - 2s), \\ s < p_1. \end{cases}$$

$f$  は  $f = f_1 + f_2$  と分解され  $f_j$  は  $(A)_{p_j, s}$  を満たすものとする.  $s_j = s_c(p_j)$  と置く.  $\varepsilon > 0$  に対し

$$B^s(\varepsilon) = \{\phi \in H^s; \|\phi; \dot{H}^{s_j}\| \leq \varepsilon, \quad j = 1, 2\}$$

と置く. このとき  $\varepsilon > 0$  が存在し任意の  $\phi \in B^s(\varepsilon)$  に対し NLS は  $u(0) = \phi$  なる大域解  $u \in \mathcal{X}^s$  を唯一つ持つ.

非線型項に対する仮定はもう少し弱められる.  $p_1 = p_2 = 1 + 4/(n - 2s) = p_c(s)$  の場合は既に [19] で得られたものと一致する. ここで強調すべきは藤田・加藤の原理は例えば単独幂の一次結合で表わされる非線型項にも適用可能であると云う事である. では線型項と非線型項の時空伸長に対する均衡は何処に行ってしまったのか. 実はその均衡は臨界等式  $s_j = s_c(p_j)$  を通じてデータの小ささの要求される  $B^s(\varepsilon)$  の定義の中に現れている事に注意されたい. 即ち無限小の位数  $p_1$  及び無限大の位数  $p_2$  [33] に対応する臨界指数  $s_c(p_1)$  及び  $s_c(p_2)$  の微分をコントロールすれば十分である事が明らかになった訳である.

定理 1 の証明にはベゾフ型のストリッカーズ評価 [2, 10, 16, 36]

$$\|U(\cdot)\phi; L^q(\mathbb{R}; \dot{B}_r^s)\| \leq C\|\phi; \dot{H}^s\|$$

及びその非斉次版を用いる. ここで  $s$  は任意の実数,  $(q, r)$  は  $0 \leq 2/q = \delta(r) < 1$  を満たす指数の組である. 非線型項の評価には条件  $(A)_{p, s}$  を満たす  $f$  が評価

$$\|f(u); \dot{B}_\ell^s\| \leq C\|u; \dot{B}_m^0\|^{p-1}\|u; \dot{B}_r^s\|$$

を持つ事を用いる [10, 19]. ここで  $0 \leq s \leq p$ ,  $1 < \ell < r < \infty$ ,  $1/\ell = 1/r + (p-1)/m$  とする. 微分に相当する指数  $s$  を持つノルムは右辺に於いて線型の寄与を持つ事と  $\ell, r, m$  はヘルダーの指数の関係により空間変数のスケールの均衡を保っている事に

注意されたい。大雑把に言って上記不等式，空間及び時間変数のヘルダーの不等式，更には空間変数についての斉次ベゾフ空間の埋蔵不等式及び補間不等式を組合せて縮小写像の原理を用いれば定理 1 の証明は完結する。但し函数空間やその閉球，更にはその上の距離の定義の方法に様々な工夫が必要とされる。基礎となる函数空間に（ソボレフ空間でなく）ベゾフ空間を選んだ理由は無限小の位数  $p_1$  と微分可能性を示す指数  $s$  との整合性を最大限に追求する為である（現在の所ソボレフ型の枠組での非線型項の評価には少し多くの微分可能性と少し多くの無限小の位数が  $f$  に要求される様である [16]）。

さて  $s = n/2$  の場合を考えよう。上記 (ア) により  $H^{n/2}$  水準の臨界冪と云う概念は意味を失う。 $H^{n/2}$  水準では任意の冪は劣臨界としての意味しか持ち得ない。従って  $H^{n/2}$  水準では単純なスケール変換から推測可能な臨界非線型性は見出せない事となる。ソボレフ空間  $H^{n/2}$  は埋蔵定理の中でも良く使われる  $H^s \hookrightarrow L^\infty$  ( $s > n/2$ ) の丁度破綻する限界に位置する。定理 1 で用いられた埋蔵定理の代表的なものは  $H^s \hookrightarrow L^{2n/(n-2s)}$  ( $0 \leq s < n/2$ ) に相当しこちらも  $s = n/2$  では破綻する。前者と後者の中間に位置する埋蔵定理は  $H^{n/2} \hookrightarrow L^q$  ( $2 \leq q < \infty$ ) である。よって  $H^{n/2}$  に属する函数は任意の冪乗について可積分であるが対応する不等式は勿論スケール不変では無い。この様に  $H^{n/2}$  水準は方程式のスケールの議論から見ても埋蔵定理のスケールの議論から見ても丁度臨界に位置するものと考えられる。一方所謂トゥルディンガー型の不等式に拠れば  $H^{n/2}$  は指数函数型の定義凸函数を持つオルリッツ空間に埋込まれる。よって  $H^{n/2}$  水準では最早臨界では無くなった冪函数に代わって指数函数的に増大する非線型項が臨界に位置するのではないかと予想される。実際この予想は正しく我々は次の定理 2 を得た。非線型項に関して次の条件を導入する。 $p > 1, s \geq 0$  に対し  $f \in C^{[s]}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$  が条件  $(B)_{p,s}$  を満たすとは  $0 \leq k \leq [s]$  なるすべての整数  $k$  に対し  $f^{(k)}$  が評価

$$|f^{(k)}(z)| \leq |z|^{(p-k)+} M(|z|)$$

を満たし  $f^{([s])}$  が評価

$$|f^{([s])}(z_1) - f^{([s])}(z_2)| \leq \begin{cases} |z_1 - z_2|^{p-[s]} M(|z_1| \vee |z_2|), \\ \quad s < p < [s] + 1 \text{ の場合} \\ |z_1 - z_2| (|z_1| \vee |z_2|)^{(p-[s]+1)+} M(|z_1| \vee |z_2|), \\ \quad \text{その他} \end{cases}$$

を満たす事を云う。ここで  $M(x) = C \exp(\lambda x^2)$ ,  $C, \lambda > 0$ , とする。

**定理 2**  $f$  は  $(B)_{1+4/n, n/2}$  を満たすとする. この時  $\lambda$  に依存する定数  $C(\lambda)$  が存在して次を満たす.  $0 < \rho < C(\lambda)$  なる任意の  $\rho$  に対し  $\varepsilon > 0$  が存在し

$$B_\rho(\varepsilon) = \{\phi \in H^{n/2}; \|\phi; L^2\| \leq \varepsilon, \|\phi; \dot{H}^{n/2}\| \leq \rho\}$$

に属す任意の  $\phi$  に対し NLS は  $u(0) = \phi$  なる大域解  $u \in \mathcal{X}^{n/2}$  を唯一つ持つ.

ここで  $C(\lambda)$  は  $C(\lambda) = C_0 \lambda^{-1/2}$ ,  $C_0 > 0$ , の形に取れる.  $\rho$  は必ずしも小さい場合のみとは限らないが  $\varepsilon$  は  $\rho$  に対して相対的に小さく取る事を想定している. 定理 2 の仮定を満たす  $f$  は無限遠で  $\exp(\lambda|u|^2)$ , 原点で  $|u|^{4/n}u$  の如く振舞う函数である. 例えば

$$\begin{aligned} f(u) &= \pm(e^{\lambda|u|^2} - 1 - \lambda|u|^2), & n = 1, \\ f(u) &= \pm(e^{\lambda|u|^2} - 1)u, & n = 2, 3, \\ f(u) &= \pm(e^{\lambda|u|^2} - 1), & n \geq 4 \end{aligned}$$

はその仮定を満たす無限回微分可能な函数である.  $H^{n/2}$  に値を取る解は  $n = 2$  の時有限エネルギーのクラス,  $n = 4$  の時強解のクラスに属するので重要である. 定理 2 の証明の枠組は定理 1 の証明と変わらないが非線型項の評価は全く異なる. 方針はトゥルディンガーの不等式の証明に倣って  $f(u)$  のベゾフノルムの評価を級数展開に基づいて実行する事である. 具体的には例えば次の不等式を用いる:  $1 < r < \infty$  なる  $r$  に対して  $r$  と  $n$  にのみ依存する定数  $C$  が存在し  $r \leq q < \infty$  なる任意の  $q$  に対しガリアルド・ニレンベルグ型評価 [27]

$$\|u; L^q\| \leq Cq^{1/2+(r-2)/(2q)} \|u; \dot{H}^{n-2}\|^{1-r/q} \|u; L^r\|^{r/q}$$

が成立する. 展開された一つ一つの項をこの様な不等式を用いて評価し導かれた無限級数の収束を考えるのであるがそれを保障するのが  $C(\lambda)$  である. 実際最終的に問題と成るのは

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{j+k}}{j!} (\lambda C \rho^2)^j$$

の様な無限級数の収束性だからである. 上記ガリアルド・ニレンベルグ型評価は  $L^q$  の  $q$  に対する増大度が明示されている事が特徴である. 実はこの形のガリアルド・ニレンベルグ型不等式は精密化されたトゥルディンガーの不等式と同値であり [28] 後者に於いて  $\exp(\lambda|u|^2)$  の冪 2 はこれ以上大きく取れない事が知られている. その

為  $H^{n/2}$  水準で許容される  $f$  の無限遠に於ける増大度は  $\exp(\lambda|u|^2)$  が限界ではないかと予想される. 一方原点での消滅度は  $1 + 4/n$  の冪である. これは前出 (イ) によって考えると許容される原点の消滅度としては最も弱いものであり対応する臨界指数は  $s_c(1 + 4/n) = 0$  である. 定理 2 で  $\|\phi; L^2\|$  の小ささを要求したがこれは  $p = 1 + 4/n$  が  $L^2$  水準で臨界であると云う事情を反映したものである.

最後に  $s > n/2$  の場合を考えよう. 矢張興味のあるのは大域可解性を保障する為の  $f$  の挙動及びデータ  $\phi$  の小ささの要求される部分を明らかにする事である. 定理 1, 2 に於ける  $s \leq n/2$  の場合に臨界現象に対応するソボレフの埋蔵の存在を指摘し, また証明に於けるその役割も述べた.  $s > n/2$  の場合は最も容易な埋蔵  $H^s \hookrightarrow L^\infty$  が使えるので非線型項の評価が難しく成る事は無いと予想される. 実際我々は次の定理 3 を得た. 非線型項に関して次の条件を導入する. 条件  $(C)_{p,s}$  とは前出の条件  $(B)_{p,s}$  に於いて函数  $M$  が  $\mathbb{R}_+$  上の非負非減少函数として一つ取れる事を云う.

**定理 3**  $s > n/2$  とし  $f$  は  $(C)_{1+4/n,s}$  を満たすとする.  $n/2 < \sigma \leq s$  なる任意の  $\sigma$  を取る. この時任意の  $\rho > 0$  に対し  $\varepsilon > 0$  が存在し

$$B_\rho^s(\varepsilon) = \{\phi \in H^s; \|\phi; L^2\| \leq \varepsilon, \|\phi; \dot{H}^\sigma\| \leq \rho\}$$

に属す任意の  $\phi$  に対し NLS は  $u(0) = \phi$  なる大域解  $u \in \mathcal{X}^s$  を唯一つ持つ.

一意性に関する内容はもう少し強い形で述べられる. 定理 3 の仮定を満たす  $f$  は無限遠で任意の増大度を持ち原点では  $|u|^{4/n}u$  の如く振舞う函数である. 無限遠に於ける挙動は  $\rho + \varepsilon$  及び  $M$  で常にコントロール出来る.  $\|\phi; L^2\|$  を ( $\|\phi; \dot{H}^\sigma\|$  に比べて) 相対的に小さくする理由は定理 2 と同様  $p = 1 + 4/n$  の  $L^2$  水準での臨界性に拠る. 定理 3 の証明の基本的枠組はベゾフ型のストリッカーズ評価と非線型項のベゾフ評価に基づくという点では定理 1, 2 と同じである.  $\sigma$  を  $n/2$  に一致させるのは技術的に困難である一方  $\sigma = n/2$  では何らかの矛盾が導かれるのかどうかは不明である.

以上 NLS の  $H^s$  理論 ( $s \geq 0$ ) を概説した. 上記プログラムは非線型波動方程式や非線型クライン・ゴルドン方程式に対しても実現可能である [22-26].

## References

- [1] T. Cazenave, "An introduction to Nonlinear Schrödinger Equations," *Textos de Métodos Matemáticos* **22**, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 1989.
- [2] T. Cazenave, F. B. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in  $H^s$* , *Nonlinear Anal. TMA* **14** (1990), 807-836.
- [3] G.-C. Dong, S. Li, *On the initial value problem for a nonlinear Schrödinger equation*, *J. Differential Equations* **42** (1981), 353-365.
- [4] J. Ginibre, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, in "Nonlinear Waves" (R. Agemi, Y. Giga, T. Ozawa, Eds.), 85-133, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. **10**, Gakkōtoshō, Tokyo, 1997.
- [5] J. Ginibre, "Introduction aux équations de Schrödinger non linéaires, Cours de DEA 1994-1995," Paris onze édition L **161**, Université de Paris-Sud, Orsay, 1998.
- [6] J. Ginibre, G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. II. Scattering theory, general case*, *J. Funct. Anal.* **32** (1979), 1-32, 33-71.
- [7] J. Ginibre, G. Velo, *On the global Cauchy problem for some nonlinear Schrödinger equations*, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), 309-323.
- [8] J. Ginibre, G. Velo, *The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited*, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **2** (1985), 309-327.
- [9] J. Ginibre, G. Velo, *The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation*, *Math. Z.* **189** (1985), 487-505.
- [10] J. Ginibre, T. Ozawa, G. Velo, *On the existence of the wave operators for a class of nonlinear Schrödinger equations*, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théorique* **60** (1994), 211-239.
- [11] N. Hayashi, *Classical solutions of nonlinear Schrödinger equations*, *Manuscripta Math.* **55** (1986), 171-190.
- [12] N. Hayashi, M. Tsutsumi, *Classical solutions of nonlinear Schrödinger equations in higher dimensions*, *Math. Z.* **177** (1981), 217-234.
- [13] N. Hayashi, M. Tsutsumi,  *$L^\infty$ -decay of classical solutions for nonlinear Schrödinger equations*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **104** (1986),

309-327.

- [14] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théorique **46** (1987), 113-129.
- [15] T. Kato, *Nonlinear Schrödinger equations*, in "Schrödinger Operators" (H. Holden, A. Jensen, Eds.), Lecture Notes in Phys. **345**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.
- [16] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations. II.  $H^s$ -solutions and unconditional well-posedness*, J. d'Anal. Math. **67** (1995), 281-306.
- [17] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *On the IVP for the nonlinear Schrödinger equations*, Contemp. Math. **189** (1995), 353-367.
- [18] J. E. Lin, W. Strauss, *Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **30** (1978), 245-263.
- [19] M. Nakamura, T. Ozawa, *Low energy scattering for nonlinear Schrödinger equations in fractional order Sobolev spaces*, Reviews in Math. Phys. **9** (1997), 397-410.
- [20] M. Nakamura, T. Ozawa, *Nonlinear Schrödinger equations in the Sobolev space of critical order*, J. Funct. Anal. **155** (1998), 364-380.
- [21] M. Nakamura, T. Ozawa, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations in the Sobolev spaces*, J. d'Anal. Math. (in press)
- [22] M. Nakamura, T. Ozawa, *The Cauchy problem for nonlinear wave equations in the homogeneous Sobolev space*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique **71** (1999), 199-215.
- [23] M. Nakamura, T. Ozawa, *The Cauchy problem for nonlinear wave equations in the Sobolev space of critical order*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **5** (1999), 215-231.
- [24] M. Nakamura, T. Ozawa, *Global solutions in the critical Sobolev space for the wave equations with nonlinearity of exponential growth*, Math. Z. **231** (1999), 479-487.
- [25] M. Nakamura, T. Ozawa, *The Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equations in the Sobolev spaces* (preprint).
- [26] M. Nakamura, T. Ozawa, *The Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equations in the Sobolev spaces II* (preprint).
- [27] T. Ozawa, *On critical cases of Sobolev's inequalities*, J. Funct. Anal. **127** (1995), 259-269.

- [28] T. Ozawa, *Characterization of Trudinger's inequality*, J. Ineq. Appl. **1** (1997), 369-374.
- [29] T. Ozawa, *Scattering theory for nonlinear Schrödinger equations*, Sugaku **50** (1998), 337-349 (in Japanese).
- [30] H. Pecher, W. von Wahl, *Time dependent nonlinear Schrödinger equations*, Manuscripta Math. **27** (1979), 125-157.
- [31] H. Pecher, *Solutions of semilinear Schrödinger equations in  $H^s$* , Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théorique **67** (1997), 259-296.
- [32] W. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal. **41** (1981), 110-133.
- [33] M. Tsutsumi, *Nonlinear Schrödinger equations*, Sugaku **47** (1995), 18-37 (in Japanese).
- [34] Y. Tsutsumi,  *$L^2$ -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funkcial. Ekvac. **30** (1987), 115-125.
- [35] Y. Tsutsumi, *Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. TMA **11** (1987), 1143-1154.
- [36] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 415-426.