

3 階線形常微分方程式の ∞ と 0 の近傍に於ける Stokes curve について

慶応義塾大学・理工学部 中野 實 (Minoru Nakano)

3 階常微分方程式の global Stokes curve configuration (Stokes geometry) について, 特に分類表 (§3) の type Ia' の BNR 方程式 (Berk et al.[3]) について 考察する.

そのために, “見掛け上 turning point でない” turning point なる概念を導入する (§3.2). この ‘点’ を考慮する事により, 全 turning point に於ける Stokes curve の本数と 不確定特異点に於ける Stokes curve の本数が一致して, global Stokes curve configuration が自然な形で得られる場合がある事を, 例を以て示す事が本稿の目的である.

準備として, §1 に 2 階微分方程式について知られていることを簡潔にまとめておく. §2 で, 3 階線形 O.D.E. の Stokes curve と WKB 解を定義する. §3 では, 1 次式係数 3 階 O.D.E. を turning point の個数と位数で分類する. また, 2 つの例をあげる. 最後の §4 で, BNR 方程式について考える.

§1. 2 階線形 O.D.E.

1.1. 多項式係数を持つ 2 階線形 O.D.E.

$$(1.1) \quad \varepsilon^2 y'' + 2 \varepsilon p(x) y' + q(x) y = 0 \quad (' := d/dx, x \in \mathbb{C})$$

($\varepsilon =$ 正の小さなパラメーター) は 変換

$$(1.2) \quad y := u(x) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int p(x) dx}$$

によって

$$(1.3) \quad \varepsilon^2 u'' - (p^2 - q + \varepsilon p') u = 0$$

に帰着される.

$\varepsilon p'(x)$ を regular perturbation の項と見なすと (1.3) の解の第 1 近似は 方程式

$$(1.4) \quad \varepsilon^2 y'' - Q(x) y = 0$$

において, $Q(x) := p^2 - q$ の場合の WKB 近似解 (形式 WKB 解)

$$(1.5) \quad \tilde{y}_{\pm}(x, \varepsilon) := \frac{1}{\sqrt[4]{Q(x)}} e^{\pm \frac{1}{\varepsilon} \int \sqrt{Q(x)} dx}$$

で与えられる. 以下, (1.5) を簡単に WKB 解 と呼ぶことにする.

(注) Olver[16] は (1.5) を LG 関数 (Liouville, Green) と呼んでいる. なお, ここで言う “WKB” は最近の “exact WKB” とは異なり 古典的なものである.

(1.4) の特性方程式は

$$(1.6) \quad \lambda^2 - Q(x) = 0$$

で与えられ, この解 (根)

$$\lambda_{\pm}(x) := \pm\sqrt{Q(x)}$$

は (1.4) の特性根と呼ばれる. 特性根は $Q(x)$ の零点において一致する. この零点は (1.4) の **turning point** (転回点, 転移点) と呼ばれる. turning point は (1.6) の判別式

$$(1.7) \quad D := Q(x)$$

の零点である.

今 $x = a$ を turning point として

$$(1.8) \quad \xi := \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx \quad (\lambda_+(a) = \lambda_-(a))$$

と置いて, $\Re \xi = 0$ から定まる曲線を (1.4) の **Stokes curve** と呼ぶ. また, $\Im \xi = 0$ から定まる曲線を (1.4) の **anti-Stokes curve** と呼ぶ. $\Re \xi = \text{const.}$ と $\Im \xi = \text{const.}$ は **level curve** (等高線) と呼ばれる. Stokes curve と anti-Stokes curve は level 0 の等高線である.

1.2. この節では, $Q(x)$ を一般の多項式とみなして, (1.4) の Stokes curve の性質について考えよう. このことについては, 実は, ほとんどすべてをロシア人 Fedoryuk[6], [7] が調べている. 主な性質は次の通りである.

(i) Stokes curve は turning point から出て 別の turning point へ向かう, または ∞ (不確定特異点) に向かう.

(ii) 閉じた Stokes curve は存在しない.

(注) 閉じた Stokes curve の内部には $Q(x)$ の少なくとも 2 位の極が存在する. (1.4) は多項式係数だから 極を持たない (cf. 図 1-3). (1.4) の特異点は $x = \infty$ のみでこれは不確定特異点である. 他の点はすべて, turning point も含めて, 正則点である.

Stokes curve の重要性は, 2 つの WKB 解 \tilde{y}_+ と \tilde{y}_- の dominance relation がそれを境にして入れ替わるところにある. 2 つの特性根 λ_+ と λ_- から定まる関係式

$$(1.9) \quad \Re \int_a^x \{\lambda_+(x) - \lambda_-(x)\} dx = 0 \quad (\lambda_+(a) = \lambda_-(a))$$

によって決まる曲線は $\Re \xi = 0$ と同値である. WKB 解 を漸近展開に持つ真の解の最大の存在領域を Fedoryuk は **canonical region** と名付けた. これは Stokes curve で囲まれた領域である (cf. Fedoryuk[7], Nakano[11], Nakano et al.[14]).

(1.4) の Stokes curve はただ 1 つの式 $\Re \xi = 0$ から定まる. 3 階以上の O.D.E. について考えなければ気付きにくいことは, (1.4) の Stokes curve は互いに交わらないことである (ただし, turning point と 不確定特異点を除く).

ところが、3階(以上)になると特性根が3つ(以上)あるから(1.9)に対応する組み合わせが3つ(以上)存在することになり、これが原因で Stokes curve の交差が起こり得るのである(cf. (2.13)). これが高階微分方程式の解の漸近性質を global に調べるため canonical region を決定する際の最大の問題となるのである. §3, 4 で3階微分方程式の例を幾つか考えることにしよう.

その前に $Q(x)$ が多項式の場合と有理式の場合について、Stokes curve を描いた例を幾つか挙げよう. (1.9) は、実際に積分するのではなく、微分方程式化出来るので数値解析が多少楽になる. 上智大学の内山康一氏が具合の良いパソコンソフト [17] を大分前に作成したが、それは n88basic 用であるので windows では使えない. そこで筆者が最近この内山ソフトを windows でも作動するように、しかもより高速により複雑な $Q(x)$ にも適用できるよう少し改造してみた. それを用いて描いたのが図 1-1 ~ 4 である. global Stokes curve configuration は微分方程式の理論面と応用面で重要な役割を果たす.

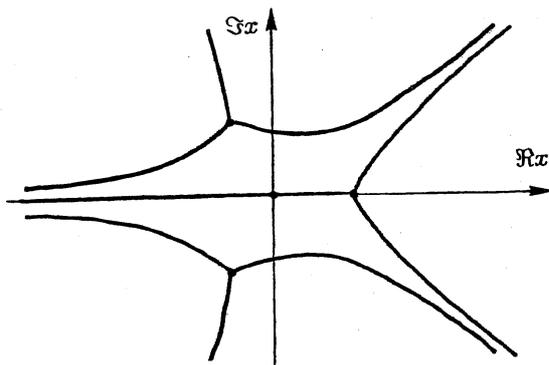


図 1-1. $Q(x) = x^3 - 1$

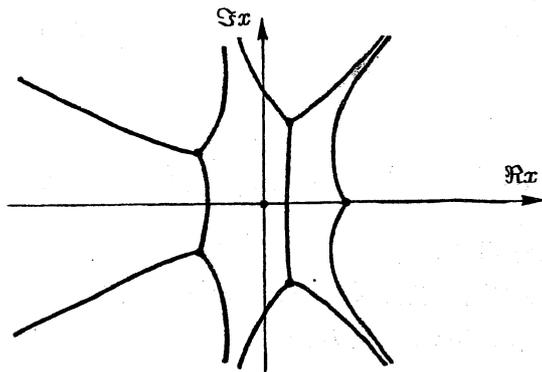


図 1-2. $Q(x) = 1 - x^5$

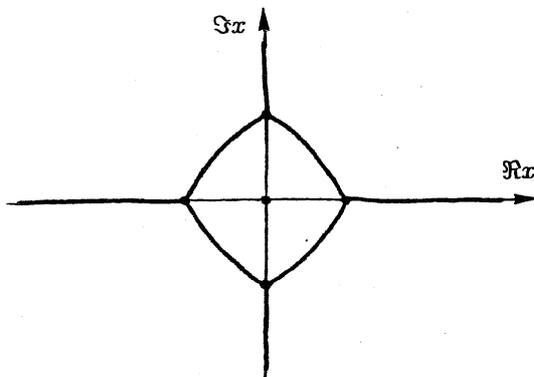


図 1-3. $Q(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$

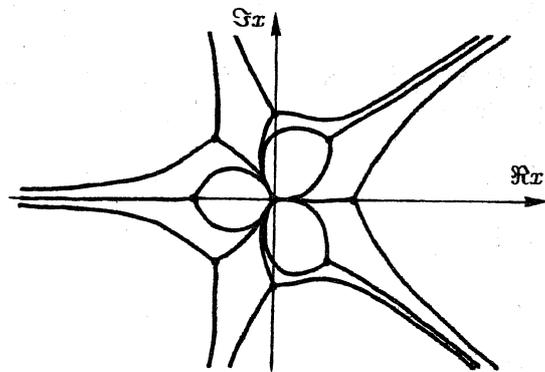


図 1-4. $Q(x) = x^3 - \frac{1}{x^5}$

図 1-1 は筆者が ^{エアリー} Airy 方程式 ($\varepsilon^2 y'' - xy = 0$) の (幾つかある内の一つの) 一般化として初めて扱ったものであるが, 最近全く別の観点から 同じ方程式が扱われている (Nakano et al.[13], Delabaere et al.[4]). Fröman-Fröman[8] は多くの方程式を扱っている. また, 最近 Dublin City Univ. の A. Wood 氏が彼の弟子 D. Dowling 氏と次の方程式を研究中である:

$$(1.10) \quad \varepsilon^2 y'' - \left(x^2 - \lambda - \frac{\varepsilon}{x^2 - 1 - \lambda} \right) y = 0$$

($\lambda =$ パラメーター).

§2. 3階線形 O.D.E.

2.1. 多項式係数を持つ 3階線形 O.D.E.

$$(2.1) \quad \varepsilon^3 y''' + 3\varepsilon^2 p(x) y'' + 3\varepsilon q(x) y' + r(x) y = 0 \quad (' := d/dx, x \in C)$$

($\varepsilon =$ 正の小さなパラメーター) は変換

$$(2.2) \quad y := u(x) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int p(x) dx}$$

によって

$$(2.3) \quad \varepsilon^3 u''' + 3\varepsilon(q - p^2 - \varepsilon p') u' + (2p^3 - 3pq + r - \varepsilon^2 p'') u = 0$$

に帰着される.

2階 O.D.E. の場合と同様に, (2.1) の第 1 近似解は, (2.3) で regular perturbation の項を省略した方程式

$$(2.4) \quad \varepsilon^3 u''' + 3\varepsilon(q - p^2) u' + (2p^3 - 3pq + r) u = 0$$

の WKB 近似解 (形式 WKB 解) (以下単に WKB 解と呼ぶ) で与えられる. なお, WKB 解は下の (2.12) で与えられる. 微分方程式 (2.4) の特性方程式は

$$(2.5) \quad \lambda^3 + 3(q - p^2) \lambda + (2p^3 - 3pq + r) = 0$$

で定義され, その解 (根) を (2.4) の特性根と呼ぶ.

(注) 微分方程式 (2.1) の特性方程式

$$(2.6) \quad \lambda^3 + 3p\lambda + 3q\lambda + r = 0$$

は変換

$$(2.7) \quad \lambda := \mu - p$$

によって

$$(2.8) \quad \mu^3 + 3(q - p^2) \mu + (2p^3 - 3pq + r) = 0$$

に帰着される。(2.8) は (2.5) と同じものである。

2.2. 微分方程式 (2.4) は次のように表される:

$$(2.9) \quad \varepsilon^3 y''' + 3\varepsilon Q(x) y' + R(x) y = 0, \quad Q(x) := q - p^2, \quad R(x) := 2p^3 - 3pq + r.$$

微分方程式 (2.9) の特性方程式は

$$(2.10) \quad \lambda^3 + 3Q\lambda + R = 0$$

で, この解 (根) が (2.9) の特性根である. 特性根は Cardano の公式から次のような形を持つ:

$$(2.11)_1 \quad \begin{cases} \lambda_1(x) := \alpha^{1/3} + \beta^{1/3}, \\ \lambda_2(x) := \omega^2 \alpha^{1/3} + \omega \beta^{1/3}, \\ \lambda_3(x) := \omega \alpha^{1/3} + \omega^2 \beta^{1/3}, \end{cases} \quad \left(\alpha := \frac{-R + \sqrt{D}}{2}, \quad \beta := \frac{-R - \sqrt{D}}{2} \right)$$

$$(2.11)_2 \quad D(x) := R^2 + 4Q^3 \quad (\omega^3 = 1, \quad \omega \neq 1).$$

最後の $D(x)$ は代数方程式 (2.10) の判別式である. 2階微分方程式と同様に, 判別式 $D(x)$ の零点は (2.9) の **turning point** (転回点, 転移点) と呼ばれる. turning point において2つ以上の特性根が一致する.

3階微分方程式の **WKB 解** \tilde{y}_j は次のように定義される:

$$(2.12) \quad \tilde{y}_j(x, \varepsilon) := \frac{1}{\sqrt{(\lambda_j - \lambda_{j+1})(\lambda_j - \lambda_{j+2})}} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^x \lambda_j(x) dx \right) \quad (j = 1, 2, 3).$$

ここで, $\lambda_4 := \lambda_1, \lambda_5 := \lambda_2$ である. (2.12) は (1.5) の一般化である. 2階方程式では $\lambda_1 = \sqrt{Q(x)}, \lambda_2 = -\sqrt{Q(x)}, \lambda_3 = \text{無し}$, に相当する.

$$(2.13) \quad \xi_{jk} := \int_a^x \{\lambda_j(x) - \lambda_k(x)\} dx \quad (\lambda_j(a) = \lambda_k(a), \quad j \neq k)$$

と置くと,

$$(2.13)_{\Re} \quad \Re \xi_{jk} = 0$$

で定まる曲線を (2.9) の **Stokes curve**,

$$(2.13)_{\Im} \quad \Im \xi_{jk} = 0$$

で定まる曲線を **anti-Stokes curve** と呼ぶ. 曲線 $\Re \xi_{jk} = \text{const.}$, $\Im \xi_{jk} = \text{const.}$ は **level curve** (等高線) と呼ばれる. Stokes curve と anti-Stokes curve は level 0 の等高線である.

汎 $\xi_{jk} = 0$ は (j, k) の組み合わせで異なる 3通りがある (cf. (1.9)). 3階 O.D.E. の Stokes curve も 2階 O.D.E. と同じ性質を持つ (cf. §1.2, Kelly[10]).

(注) 不確定特異点 ($x = \infty$) から出る (又は, $x = \infty$ に入る) Stokes curve も turning point から出る (又は, 入る) Stokes curve も同じ方程式 (2.13)_R で決定される.

2.3. 逆数変換 $x := 1/t$ によって (2.1) は次の形に帰着される:

$$(2.14)_\varepsilon \quad \varepsilon^3 \ddot{y} + 3\varepsilon^2 P_\varepsilon \dot{y} + 3\varepsilon Q_\varepsilon y + R_\varepsilon y = 0 \quad (\dot{\cdot} := d/dt),$$

$$(2.14)'_\varepsilon \quad P_\varepsilon := \frac{-p + 2\varepsilon t}{t^2}, \quad Q_\varepsilon := \frac{q - 2\varepsilon p t + 2\varepsilon^2 t^2}{t^4}, \quad R_\varepsilon := \frac{-r}{t^6}.$$

ここで regular perturbation の項を省略した微分方程式

$$(2.14)_0 \quad \varepsilon^3 \ddot{y} + 3\varepsilon^2 P_0 \dot{y} + 3\varepsilon Q_0 y + R_0 y = 0$$

の特性方程式は

$$(2.15) \quad \mu^3 - 3 \frac{p(1/t)}{t^2} \mu^2 + 3 \frac{q(1/t)}{t^4} \mu - \frac{r(1/t)}{t^6} = 0$$

であり, 3次方程式 (2.15) の解は前節の方法で Cardano の公式を適用して求められる. (2.15) の判別式 $D_0(t)$ は

$$(2.16) \quad D_0(t) := \frac{D(1/t)}{t^{12}}$$

であり, $D(1/t)$ は (2.11)₂ で $x = 1/t$ と置いたものである. (2.14)₀ の turning point は $D_0(t)$ の零点で与えられる. (2.1) が多項式係数をもつことから, つねに $t = \infty$ は (2.14)₀ の turning point である. 当然, $t = \infty$ は $x = 0$ に対応する. $x = 0$ の近傍に於ける Stokes curve の様子を調べることは $t = \infty$ の近傍で調べることと同じことである.

§3. 1次式係数 3階 O.D.E. の分類

3.1. 我々の目的は BNR 方程式

$$(3.1) \quad \varepsilon^3 y''' - 3y' - 2xy = 0$$

について考察することにある. この方程式は見掛けは簡単な形を持つが, その解の性質を調べることはかなり困難である. そこで, BNR 方程式がこれと同類の微分方程式, 即ち 1次式係数を持つ微分方程式, の中でどのような位置にあるのかを見るために turning point に注目して分類を試みた.

Airy 方程式 $\varepsilon^2 y'' - xy = 0$ は 1次式係数 2階 O.D.E. であるから, 1次式係数 3階 O.D.E. は Airy 方程式の高階 O.D.E. への一般化の一つと見なせるだろう.

(注) $\varepsilon^n y^{(n)} - x^m y = 0$ も Airy 方程式の高階 O.D.E. への一般化である.

1 次式係数の微分方程式とその特性方程式は次の形を持つ:

$$(3.2) \quad \varepsilon^3 y''' + 3\varepsilon^2(ax+b)y'' + 3\varepsilon(cx+d)y' + (ex+f)y = 0,$$

$$(3.3) \quad \lambda^3 + 3(ax+b)\lambda^2 + 3(cx+d)\lambda + (ex+f) = 0.$$

よって, 前節の方法で (3.3) の判別式 D を求めると

$$(3.4) \quad D = \begin{aligned} & \left(-3b^2d^2 + 4d^3 + 4b^3f - 6bdf + f^2 \right) \\ & + \left(-6b^2cd - 6abd^2 + 12cd^2 + 4b^3e - 6bde + 12ab^2f - 6bcf - 6adf + 2ef \right) x \\ & + \left(-3b^2c^2 - 12abcd + 12c^2d - 3a^2d^2 + 12ab^2e - 6bce - 6ade + e^2 + 12a^2bf - 6acf \right) x^2 \\ & + \left(-6abc^2 + 4c^3 - 6a^2cd + 12a^2be - 6ace + 4a^3f \right) x^3 + a^2 \left(-3c^2 + 4ae \right) x^4 \end{aligned}$$

となる. 複素定数 a, b, \dots, f を適当に定めることにより, turning point の個数と位数を決められる. こうして決められたすべての type が下の分類表に載っている.

(注) $D = 0$ は 4 次方程式であるから, turning point の位数の合計は 4 まで. simple turning point の個数が 1 個の D.E. と 4 位の turning point 1 個の D.E. は存在しない.

type	1ple	2ble	3ple	characteristic equation	discriminant D	turning points
Ia	oo			$\lambda^3 + 3d\lambda + (ex+f) = 0$	$4d^3 + (ex+f)^2$	$\{-f \pm 2(-d)^{3/2}\}/e$
Ia'	oo			$\lambda^3 - 3\lambda - 2x = 0$	$4(x^2 - 1)$	$-1, 1$
Ia''	oo			$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4x = 0$	$16x(x-1)$	$0, 1$
Ib	ooo			$\lambda^3 - 4x\lambda - 2 = 0$	$4\{1 - (4x/3)^3\}$	$3/4, 3\omega/4, 3\omega^2/4$
Ib'	ooo			$\lambda^3 - 3x\lambda^2 + 4 = 0$	$16(1 - x^3)$	$1, \omega, \omega^2$
Ib''	ooo			$\lambda^3 - 3x\lambda + 2 = 0$	$4(1 - x^3)$	$1, \omega, \omega^2$
Ic	oooo			$\lambda^3 + 3\alpha x\lambda^2 - 3\alpha\lambda + x = 0$	$4\alpha^3(x^4 - 1)$	$\pm 1, \pm i$
Ic'	oooo			$\lambda^3 + 3x\lambda^2 - 3\alpha^2\lambda + x = 0$	$18(x^4 - \alpha^6)/5$	$\pm\alpha^{3/2}, \pm i\alpha^{3/2}$
IIa		o		$\lambda^3 - x = 0$	x^2	$0, 0$
IIb	o	o		$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9x\lambda = 0$	$108x^2(x-1)$	$0, 0, 1$
IIb'	o	o		$\lambda^3 - 3x\lambda + 2x = 0$	$4x^2(1-x)$	$0, 0, 1$
IIb''	o	o		$\lambda^3 - \lambda^2 - x\lambda + x = 0$	$-4x(x-1)^2/27$	$0, 1, 1$
IIb'''	o	o		$\lambda^3 - (x+1/3)\lambda + (18x-2)/27 = 0$	$-4x(x-1)^2/27$	$0, 1, 1$
IIc	oo	o		$\lambda^3 + 3x\lambda^2 - 4x = 0$	$16x^2(1-x^2)$	$-1, 1, 0, 0$
IIId		oo		$\lambda^3 + 3x\lambda^2 + 3\lambda + x = 0$	$4(x^2 - 1)^2$	$-1, -1, 1, 1$
IIId'		oo		$\lambda^3 - x\lambda^2 - \lambda + x = 0$	$-4(x^2 - 1)^2/27$	$-1, -1, 1, 1$
IIIa			o	$\lambda^3 - x\lambda = 0$	$-4x^3/27$	$0, 0, 0$
IIIb	o		o	$\lambda^3 + 6x\lambda^2 + 9x\lambda = 0$	$108x^3(1-x)$	$0, 0, 0, 1$
IIIb'	o		o	$\lambda^3 + 3x\lambda^2 + 3x\lambda + 1 = 0$	$-3(x-1)^3(x+1/3)$	$-1/3, 1, 1, 1$
IIIb''	o		o	$\lambda^3 + x\lambda^2 + x\lambda + 1 = 0$	$-(x-3)^3(x+1)/27$	$-1, 3, 3, 3$

$$\left(\alpha := (1 + 2/\sqrt{3})^{1/2}, \omega^3 = 1 (\omega \neq 1), d \cdot e \neq 0 \right)$$

表の見方: type Ia から type IIIb'' まであり, I, II, III はそれぞれ必ず 1 位, 2 位, 3 位の turning point を持つ. 例えば, type IIc は 2 位と 1 位の turning point を持つことが左方の 3 つの ◦ 印 から分かる. 2 位の turning point "0" を 1 個持ち 1 位 (simple) の turning point "±1" を 各 1 個持つことが右端の turning points の欄から読みとれる.

Berk et al.[3] は type Ia' を考察した. そこで Ia' を **BNR 方程式** と名付けることにしよう. BNR 方程式は 2 個の simple turning point を持つ. 2 個の simple turning point を持つ一般の形の D.E. は Ia であり, $d = -1$, $e = 2$, $f = 0$ と置いた特別な場合が Ia' である. 方程式 Ia を一般 **BNR 方程式** と呼ぼう. 2 個の simple turning point を持つ方程式はもう 1 つあり それは Ia'' である. これは y'' の項を持つから BNR 方程式とは別な type である.

Berk 達がなぜこの方程式を選んだのかは知られていない. この分類表を見る限りでは最も簡単な微分方程式と勘違いされそうである. これが勘違いかどうかは Berk 達の論文を見れば明らかだ. 彼らは大変な努力をしている. IIb'' は遙かに扱いやすい.

type Ib は ^{ベアリー}**Paury 方程式** と呼ばれる (cf. §3.3). この分類表の中の幾つかとそれに似た D.E. は既に Nakano et al.[14] で調べられている.

次に幾つか例を挙げてそれらの Stokes curve について考えてみよう.

3.2. まず, turning point を持たない trivial な方程式

$$(3.5) \quad \varepsilon^3 y''' - \varepsilon y' = 0 \quad (':= d/dt)$$

を考えてみよう. 定数係数方程式だから turning point は無い.

特性根は $\lambda_0 := 0$, $\lambda_{\pm} := \pm 1$, WKB 解は

$$(3.6) \quad \tilde{y}_0 := 1, \quad \tilde{y}_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm \frac{x}{\varepsilon}}$$

であるが実は真の解である. $\varepsilon > 0$ と仮定しているから x -平面の右半分では \tilde{y}_+ が dominant であり, 左半平面では \tilde{y}_- が dominant である. 従って, 虚軸は Stokes curve の役割を果たすが, これは turning point から出るものではない. turning point は存在しないのであるから. ただし, $x = \infty$ は不確定特異点であるから, $x = \infty$ から $x = 0$ に向かって延びていると考えられる. その辺を別な視点から見るために逆数変換を試みよう.

$x := 1/t$ と置くと (3.5) は

$$(3.7) \quad \varepsilon^3 \ddot{y} - \varepsilon \frac{1}{t^4} \dot{y} = 0 \quad (':= d/dt)$$

となり, 特性方程式, 判別式はそれぞれ

$$(3.8) \quad \mu^3 - \frac{1}{t^4} \mu = 0, \quad D = \frac{4(-1/3)^3}{t^{12}}$$

である. 従って, $t = \infty$ で $D = 0$ となるから $t = \infty$ は (3.7) の turning point である.

$$\mu_{\pm} := \pm \frac{1}{t^2} \text{ と置くと}$$

$$(3.9) \quad \xi := \int_{\infty}^t (\mu_- - \mu_+) dt = \frac{2}{t}$$

から分かるように, turning point $t = \infty$ から 2本の Stokes curve が出る. $t = \infty$ に対応する点 $x = 0$ から出る 虚軸の上半分と下半分の 2本が Stokes curve である. これらは $\oint_0^x (\lambda_+ - \lambda_-) dx = 0$ から定まる曲線 (実は直線) である.

このように, “本来の turning point” でない点が “実質的な turning point” の役割をする点を “見掛け上 turning point でない” turning point と呼ぼう.

3.3. 次に, ^{ペアリ-}Pairy 方程式 (分類表 の type Ib)

$$(3.10) \quad \varepsilon^3 y''' - 4\varepsilon x y' - 2y = 0 \quad (' := d/dx)$$

を考察しよう.

この方程式の線形独立な 3つの解は Airy 関数の積 $\text{Ai}^2(x)$, $\text{Bi}^2(x)$, $\text{Ai}(x) \cdot \text{Bi}(x)$ である. (3.10) はいろいろな文献 (Abranowitz et al.[1], Zwillinger[20] など) に出てくるが名前を持たない. 中にはハッキリ unnamed equation と書いた文献もある. そこで, 1999年6月に香港城市大学で行われた微分方程式の国際会議で, 筆者が Olver 先生達の前で Pairy の名を提唱したのであるが, 今のところ認知されていない. Pairy の由来は Pairy = (Product + Airy)/2 である (Nakano[12]).

(3.10) の特性方程式と特性根は

$$(3.11) \quad \lambda^3 - 4x\lambda - 2 = 0,$$

$$(3.12)_1 \quad \begin{cases} \lambda_1(x) := \alpha^{1/3} + \frac{4x}{3}\alpha^{-1/3}, \\ \lambda_2(x) := \omega^2 \alpha^{1/3} + \frac{4x}{3}\omega \alpha^{-1/3}, \\ \lambda_3(x) := \omega \alpha^{1/3} + \frac{4x}{3}\omega^2 \alpha^{-1/3}, \end{cases}$$

$$(3.12)_2 \quad \alpha := 1 + \sqrt{D}, \quad D := 1 - \left(\frac{4x}{3}\right)^3.$$

判別式 D から turning point は

$$x = \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{4}\omega, \quad \frac{3}{4}\omega^2$$

であり, 特性根と turning point の関係は次の通り:

$$(3.13) \quad \lambda_1 = \lambda_2 \left(\text{at } x = \frac{3}{4}\omega^2 \right), \quad \lambda_2 = \lambda_3 \left(\text{at } x = \frac{3}{4} \right), \quad \lambda_3 = \lambda_1 \left(\text{at } x = \frac{3}{4}\omega \right).$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ となる点は存在しない。

3つの simple turning point $x = 3/4, 3\omega/4, 3\omega^2/4$ から3本ずつ Stokes curve が出るが、そのうちの1本は $x = 0$ を通る。従って、3本の Stokes curve が $x = 0$ で交わる (図 3-1)。しかし、 $x = 0$ は turning point ではない。

方程式 (3.10) を逆数変換 ($x := 1/t$) すると

$$(3.14) \quad \varepsilon^3 \ddot{y} - \varepsilon \frac{4}{t^4} \dot{y} + \frac{2}{t^6} y = 0 \quad (\dot{} := d/dt)$$

で、その特性方程式と特性根は次のようになる:

$$(3.15) \quad \mu^3 - \frac{4}{t^4} \mu + \frac{2}{t^6} = 0,$$

$$(3.16)_1 \quad \begin{cases} \mu_1(x) := \alpha^{1/3} + \frac{4}{3t^5} \alpha^{-1/3}, \\ \mu_2(x) := \omega^2 \alpha^{1/3} + \frac{4}{3t^5} \omega \alpha^{-1/3}, \\ \mu_3(x) := \omega \alpha^{1/3} + \frac{4}{3t^5} \omega^2 \alpha^{-1/3}, \end{cases}$$

$$(3.16)_2 \quad \alpha := -\frac{1}{t^6} + \sqrt{D}, \quad D := \frac{4}{t^{15}} \left\{ t^3 - \left(\frac{4}{3} \right)^3 \right\}.$$

判別式 D より、 $t = \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\omega, \frac{4}{3}\omega^2, \infty$ の4つが turning point である。

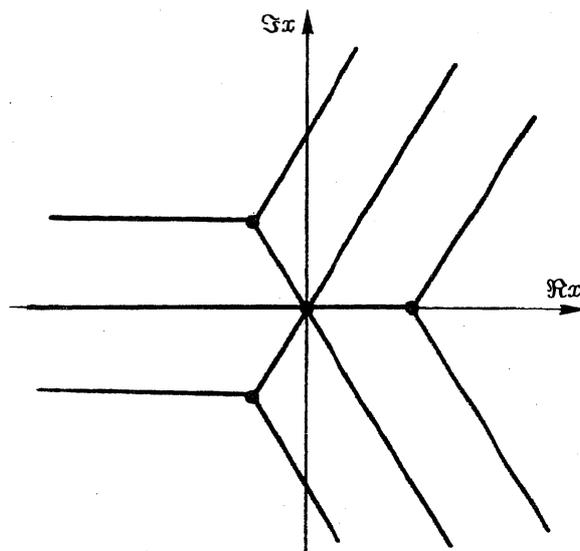


図 3-1.

(3.16) から, $t \rightarrow \infty$ のとき次が成り立つ:

$$(3.17) \quad \int_{\infty}^t (\mu_1 - \mu_2) dt \sim \frac{\omega^2 - 1}{t}, \quad \int_{\infty}^t (\mu_2 - \mu_3) dt \sim \frac{\omega - \omega^2}{t}, \quad \int_{\infty}^t (\mu_3 - \mu_1) dt \sim \frac{1 - \omega}{t}.$$

このことから, turning point $t = \infty$ から 6本の Stokes curve が $\pm\pi/3, \pm 2\pi/3, 0, \pi$ の方向に出ることが分かる. これは $t = \infty$ に対応する $x = 0$ の近傍の様子と一致する. 即ち, $x = 0$ では 3本の Stokes curve が交差しているから, $x = 0$ から 6本出ているように見える. $x = 0$ は turning point ではないが “見掛け上 turning point でない” turning point である.

§4. BNR 方程式

4.1. BNR 方程式 は分類表の type Ia':

$$(4.1) \quad \varepsilon^3 y''' - 3\varepsilon y' - 2xy = 0 \quad (' := d/dx)$$

である. 特性方程式と特性根はそれぞれ

$$(4.2) \quad \lambda^3 - 3\lambda - 2x = 0,$$

$$(4.3)_1 \quad \begin{cases} \lambda_1(x) := \alpha^{1/3} + \alpha^{-1/3}, \\ \lambda_2(x) := \omega^2 \alpha^{1/3} + \omega \alpha^{-1/3}, \\ \lambda_3(x) := \omega \alpha^{1/3} + \omega^2 \alpha^{-1/3}, \end{cases}$$

$$(4.3)_2 \quad \alpha := x + \sqrt{D}, \quad D := x^2 - 1.$$

従って, turning point は $x = \pm 1$ でいずれも 1位である. $x = \infty$ は不確定特異点である. 特性根と turning point との関係は

$$(4.4) \quad \lambda_1 = \lambda_2 \text{ (at } x = -1), \quad \lambda_2 = \lambda_3 \text{ (at } x = 1), \quad \lambda_1 \neq \lambda_3 \text{ (at any } x).$$

(注) 特性根をリーマン面で考えれば, $\lambda_1 = \lambda_3$ となる点があるが, 今は 1枚の複素平面で考えている.

$x = 1$ からは $0, \pm 2\pi/3$ の 3方向に 3本の Stokes curve が出る. $x = -1$ からは $\pm\pi/3, \pi$ の 3方向に 3本の Stokes curve が出る. これら 6本は全部 $x = \infty$ に向かう (図 4-1). 一方, $x = \infty$ の近傍では次のようになる:

$$(4.5) \quad \alpha = O(x^{1/3}) \quad (x \rightarrow \infty)$$

だから

$$(4.6) \quad \int^x (\lambda_j - \lambda_k) dx = O(x^{4/3}) \quad (x \rightarrow \infty, j \neq k)$$

である. $\arg(1-\omega)$, $\arg(\omega^2-\omega)$, $\arg(1-\omega^2)$ の値を考慮すると 次の方向の順に $x = \infty$ から出る (または, $x = \infty$ に入る):

$$0, 3\pi/4, 6\pi/4, 9\pi/4, 12\pi/4, 15\pi/4, 18\pi/4, 21\pi/4.$$

その内 2つの方向 $6\pi/4$, $18\pi/4$ の Stokes curve は虚軸である. 他の 6本は $x = \pm 1$ に向かう. 8本の Stokes curve が $x = \infty$ から出る (又は, $x = \infty$ に入る) 方向は 1枚の複素平面に project すると, $\arg x = 0$ から始まって $\pi/4$ の間隔である.

$x = 1$ から $2\pi/3$ の角度で出る Stokes curve は $3\pi/4$ の方向で $x = \infty$ に, $-2\pi/3$ の角度で出るものは $-3\pi/4$ の方向で $x = \infty$ に向かう. また, 角度 0 で出るものはそのまま正の実軸上で $x = \infty$ に向かう. 同様に, $x = -1$ から $\pm\pi/3$ の角度で出る Stokes curve はそれぞれ $\pm\pi/4$ の方向で, π の角度で出るものはそのまま負の実軸上を $x = \infty$ に向かう.

虚軸上にある 2本の Stokes curve は turning point $x = \pm 1$ に入る (または, $x = \pm 1$ から出る) 訳にはいかない. Berk et al.[3] は $x = \pm 1$ から出る Stokes curve の交点から “new” Stokes line が出ることを示した ((注) Stokes line=Stokes curve). この交点は虚軸上にある (cf. Aoki et al.[2]).

我々はこのことを違う観点から見てみることにしよう.

4.2. 微分方程式 (4.1) を逆数変換 ($x := 1/t$) し, regular perturbation の項を省略すると

$$(4.7)_0 \quad \varepsilon^3 \ddot{y} - 3\varepsilon \frac{1}{t^4} \dot{y} + \frac{2}{t^7} y = 0 \quad (\dot{} := d/dt),$$

この特性方程式は

$$(4.8)_0 \quad \mu^3 - \frac{3}{t^4} \mu + \frac{2}{t^7} = 0$$

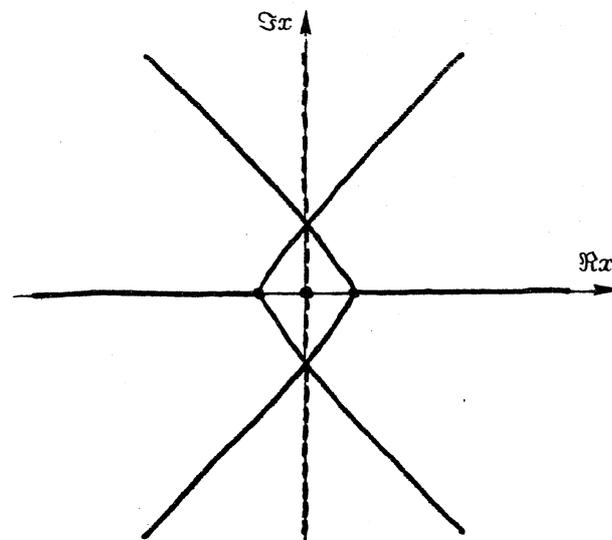


図 4-1.

である. (4.8)₀ の判別式は

$$(4.9)_0 \quad D_0 := \frac{4(1-t^2)}{t^{14}}$$

だから, $t = \pm 1, \infty$ が turning point である. $t = \pm 1$ は $x = \pm 1$ にそれぞれ対応し, $t = \infty$ は $x = 0$ に対応する.

(4.8)₀ の特性根を μ_1, μ_2, μ_3 とするとき

$$(4.10) \quad \int_{\infty}^t (\mu_j - \mu_k) dt = O(t^{-1}) \quad (t \rightarrow \infty, j \neq k)$$

であり, t^{-1} の係数は実数であることが分かる. 従って, 虚軸上に 2 本の Stokes curve が $t = \infty$ から出る (又は, $t = \infty$ に入る) ことになる. 即ち, $x = 0$ は “見掛け上 turning point でない” turning point である.

また,

$$(4.11) \quad x := r e^{(1+2m)\pi i/2} (= \pm i r, r \geq 0)$$

と置くと

$$(4.12) \quad \alpha = e^{(1+2m)\pi i/2} (r + \sqrt{r^2 + 1})$$

だから

$$(4.13) \quad \lambda_1(x) - \lambda_3(x) = (1 - \omega)\alpha^{1/3} + (1 - \omega^2)\alpha^{-1/3}$$

は, $m = 0, \pm 3, \pm 6, \dots$ のとき, 実数となる. 従って, この m に対して 虚軸上に於ける積分の値

$$(4.14) \quad \int_0^{\pm ia} \{\lambda_1(x) - \lambda_3(x)\} dx \quad (a \in \mathbf{R})$$

が 純虚数となることが分かる. 即ち,

$$(4.15) \quad \Re \int_0^x \{\lambda_1(x) - \lambda_3(x)\} dx = 0 \quad (x \in i\mathbf{R})$$

である.

従って, 虚軸を境にして $\Re \int_0^x \lambda_1(x) dx > \Re \int_0^x \lambda_3(x) dx$ 又は $\Re \int_0^x \lambda_1(x) dx < \Re \int_0^x \lambda_3(x) dx$ となるのであるから, “見掛け上 turning point でない” turning point $x = 0$ から出る正の虚軸と負の虚軸は $x = \infty$ に向かう 2 本の Stokes curve であるとみなせる. この Stokes curve は $x = \pm 1$ から出る Stokes curve の交点を通る. $\lambda_1(0) \neq \lambda_3(0)$ であるから, $\Re \int_0^x \{\lambda_1(x) - \lambda_3(x)\} dx = 0$ は turning point から出る Stokes curve としては正式な Stokes curve ではないが, 不確定特異点 $x = \infty$ から出る Stokes curve としては正式な Stokes curve である.

References

- [1] Abramowitz, M. and I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*. Dover.
- [2] Aoki, T., Kawai, T. and Y. Takei, New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations. RIMS Dec., 1991, 1-16.
- [3] Berk, H.L., W.M. Nevins and K.V. Roberts, New Stokes line in WKB theory. J. Math. Phys. **23**. 988-1002, 1982.
- [4] Derabaere, E. and D.T. Trinh, Special analysis of the complex cubic oscillator. Prépublication No. 555, Univ. Nice-Sophia Antipolis, 1999.
- [5] Evgrafov, M.A. and M.V. Fedoryuk, Asymptotic behavior as $\lambda \rightarrow \infty$ of solutions of the equation $w''(z) - p(z, \lambda)w(z) = 0$ in the complex z -plane. Uspehi Mat. Nauk **21**, or Russian Math. Surveys **21**, 1-48, 1966.
- [6] Fedoryuk, M.V., The topology of Stokes lines for equations of the second order. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **29**, 645-656, 1965, or A.M.S. Transl. (2) **89**. 89-102, 1970.
- [7] Fedoryuk, M.V., *Asymptotic Analysis*. Springer Verlag. 1993.
- [8] Fröman, N. and P.O. Fröman, *Phase-integral method*. Springer Verlag. 1995.
- [9] Fukuhara, M., Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre. Mem. Fac. Engrg., Kyushu Imp. Univ. **8**, 249-280, 1937.
- [10] Kelly, B.J., Admissible domains for higher order differential equations. Studies in Appl. Math. **60**, 211-240, 1979.
- [11] Nakano, M., Second order linear ordinary differential equations with turning points and singularities II. Kodai Math. J. **1** (1978), 304-312.
- [12] Nakano, M., On products of the Airy functions and the WKB method, J. of Tech. Univ. at Plovdiv. **1**, 27-38, 1995.
- [13] Nakano, M. and T. Nishimoto, On a secondary turning point problem. Kodai Math. Sem. Rep. **22** (1970), 355-384.
- [14] Nakano, M., M. Namiki and T. Nishimoto, On the WKB method for certain third order ordinary differential equations. Kodai Math. J. **14**. 432-462, 1991.
- [15] Ng, B.S. and W.H. Reid, Simple asymptotics for the temporal spectrum of an Orr-Sommerfeld problem. Appl. Math. Lett.
- [16] Olver, F.W.J., *Asymptotics and special functions*. Academic Press, 1974.
- [17] Uchiyama, K., 2階微分方程式の Stokes curve を描く computer program.
- [18] Wasow, W., *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Wiley (Interscience), 1965.
- [19] Wasow, W., *Linear turning point theory*. Springer Verlag, 1985.
- [20] Zwillinger, D., *Handbook of differential equations*. Academic Press, 1989.