数理解析研究所講究録
1170 巻 2000 年 1-8

離散方程式の分子解と直交多項式

辻本 諭 近藤弘一
Satoshi Tsujimoto Koichi Kondo

大阪大学大学院基礎工学研究科
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

直交多項式と戸田方程式などの可積分系との関連性は，これまでも広く議論されてきた．例えば，次の直交多項式に対する 3 項間漸化式

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \qquad P_1(x) = x - c_0, \\
P_{n+1}(x) &+ c_n P_n(x) + u_n P_{n-1}(x) = x P_n(x) \qquad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

の c_n, u_n は，戸田方程式の半無限分子解を用いて書き表すことができることが知られている．また，Spiridonov らは，直交多項式の Christoffel-Darboux 変換を離散時間に対する時間発展とみなし，離散可積分系を導いている [5]．本稿では，3 項間漸化式を満たす直交多項式から導かれる離散戸田方程式と離散 Lotka-Volterra 方程式とその分子解について簡単に解説する．さらに上記の漸化式を持たない場合についても，2 次元離散戸田方程式や Hungry Lokta-Volterra 方程式などの離散時間ソリトン方程式の導出を試みたい．

2 Monic orthogonal polynomials $P_n(x)$

$f(x), g(x)$ を x の多項式とする．内積 $\langle f(x)g(x)\rangle$ を

$$\langle f(x)g(x)\rangle = \mathcal{L}[f(x)g(x)]$$

により決める．ここで $\mathcal{L}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)] &= \alpha_1 \mathcal{L}[f(x)] + \alpha_2 \mathcal{L}[g(x)] \\
\mathcal{L}[f(x)g(x)] &= \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)w(x)dx
\end{aligned}
$$

とする．n 次の モーメント a_n は $\mathcal{L}[x^n]$ により

$$a_n = \langle x^n\rangle = \mathcal{L}[x^n] \in \mathbb{R}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

と定まる．

この場合の直交性は，

$$\mathcal{L}[P_n(x)P_m(x)] = h_n\, \delta_{n,m}\,, \qquad h_n \neq 0, n, m = 0, 1, 2, \cdots$$

で与えられ, h_n はハンケル型行列式 Δ_n を用いて

$$
\begin{aligned}
h_n &= \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}, \\
\Delta_n &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & & \cdots \\ a_2 & a_3 & & & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & & & a_{2n-2} \end{vmatrix} = (\langle x^{i+j} \rangle)_{0 \le i,j \le n-1}
\end{aligned}
$$

と表される. この多項式 $P_n(x)$ は $c_n, u_n \in \mathbb{R}$ を用いた 3 項間漸化式

$$
P_{n+1}(x) = (x - c_n)P_n(x) - u_n P_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{1}
$$

を満たす.

2.1 離散戸田方程式

以下では, 離散戸田方程式との関係をみていく. (1) 式より次の恒等式

$$
\sum_{j=0}^{n} \frac{P_j(x)P_j(\mu)}{u_0 u_1 \cdots u_j} = \frac{1}{x-\mu} \cdot \frac{P_{n+1}(x)P_n(\mu) - P_n(x)P_{n+1}(\mu)}{u_0 u_1 \cdots u_n}
$$

が得られる. 上式は Christoffel-Darboux 恒等式と呼ばれる [2]. ここで Christoffel 変換

$$
P_n^*(x, \mu) = \frac{1}{x-\mu}\left(P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(\mu)}{P_n(\mu)}P_n(x)\right) \tag{2}
$$

より, 多項式 $P_n^*(x)$ を定義する. この P_n^* も新たな直交多項式となっており, 次の直交関係を持つ.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^*[f(x,\mu)] &= \mathcal{L}[(x-\mu)f(x)] \\
\mathcal{L}^*[P_m^*(x,\mu)P_n^*(x,\mu)] &= h_n^* \delta_{mn}
\end{aligned}
$$

また, Geronimus 変換と呼ばれる Christoffel 変換の逆変換

$$
P_n(x) = P_n^*(x,\mu) - A_n^* P_{n-1}^*(x,\mu) \tag{3}
$$

も存在する. ここで P_n を離散戸田方程式の波動関数 ψ_n とみなし, 新たな直交多項式 P_n^* への変換を時間発展とする. これにより, Christoffel 変換 (2) と Geronimus 変換 (3) は次のように書き直される.

$$
\psi_n^{t+1} = \left(\psi_{n+1}^t - C_{n+1}^{t+1}\psi_n^t\right)/(x - \lambda^{t+1}) \tag{4}
$$

$$
\psi_n^t = \psi_n^{t+1} - A_n^{t+1}\psi_{n-1}^{t+1}. \tag{5}
$$

ここで μ は λ^{t+1} とし, $C_{n+1}^{t+1} = P_{n+1}(\lambda^{t+1})/P_n(\lambda^{t+1})$ とおいた.

(4) 式と (5) 式の両立条件より,

$$
\begin{aligned}
A_n^{t+1}C_n^{t+1} &= A_n^t C_{n+1}^t \\
A_n^t + C_n^t - \lambda^t &= A_{n-1}^{t+1} + C_n^{t+1} - \lambda^{t+1}
\end{aligned}
$$

を得る．さらに従属変数を

$$
\begin{aligned}
A_n^t &= -\delta^t V_n^t \\
C_n^t &= -I_n^t/\delta^t = -(1-\delta^t J_n^t)/\delta^t \\
\lambda^t &= -1/\delta^t
\end{aligned}
$$

と書き直すことにより，不等間隔離散戸田方程式が得られる．

不等間隔離散戸田方程式 (Hirota, 1997)

$$
\begin{aligned}
V_n^{t+1}(1-\delta^{t+1}J_n^{t+1}) &= V_n^t(1-\delta^t J_{n+1}^t) \\
J_n^t - \delta^t V_n^t &= J_n^{t+1} - \delta^{t+1}V_{n-1}^{t+1}
\end{aligned}
$$

また，ここで用いた ψ_n^t, A_n^t, C_n^t は，ハンケル行列式による表示も持つ．Christoffel 変換 (2) と Geronimus 変換 (3) を行列式間の関係式としてみると，それぞれプリュッカー関係式，ヤコビの恒等式とみなすことも可能である．

2.2 離散 Lotka-Volterra 方程式

Symmetric orthogonal polynomials $S_n(x)$ より，離散 Lotka-Volterra 方程式を導く．
この多項式は，monic orthogonal polynomial $P_n(x)$ に対称性 $S_n(-x) = (-1)^n S_n(x)$ を要請したものであり，モーメント b_n は

$$
\begin{aligned}
&b_n = \langle 1, x^n \rangle = \mathcal{S}[x^n] \in \mathbb{R}, \qquad n = 0,1,2,\cdots \\
&b_{2n+1} = 0
\end{aligned}
$$

となる．この場合の内積，直交性は

$$
\begin{aligned}
\langle f(x)g(x) \rangle &= \mathcal{S}[f(x)g(x)] \\
\mathcal{S}[S_n(x)S_m(x)] &= k_n\,\delta_{n,m}\,, \qquad n,m = 0,1,2,\cdots \\
k_n &= \frac{E_{n+1}}{E_n}, \quad E_n = (b_{i+j})_{0\le i,j\le n}
\end{aligned}
$$

で与えられる．これにより $S_n(x)$ の満たす 3 項間漸化式は

$$
S_{n+1}(x) = xS_n(x) - v_n S_{n-1}(x), \qquad n = 1,2,\cdots. \tag{6}
$$

となる．

$P_n(x)$ と $S_n(x)$ との間には

$$
\mathcal{S}[x^{2n}] = \mathcal{L}[x^n] \Leftrightarrow b_{2n} = a_n
$$

$$
\begin{aligned}
S_{2n}(x) &= P_n(x^2) \\
S_{2n+1}(x) &= xP_n^*(x^2, 0)
\end{aligned}
$$

の関係がある．

$S_n(x)$ に対する Christoffel 変換は

$$
S_n^*(x,\kappa) = \frac{1}{(x)^2 - (\kappa)^2}\left(S_{n+2}(x) - \frac{S_{n+2}(\kappa)}{S_n(\kappa)}S_n(x)\right) \tag{7}
$$

で与えられ, (6) 式と (7) 式より

$$
\begin{aligned}
\psi_{n+1}^{t} &= x\,\psi_n^t - v_n^t \psi_{n-1}^t && (8)\\
\psi_n^{t+1} &= \left(\psi_{n+2}^t - w_n^t \psi_n\right)/((x)^2 - (\lambda^{t+1})^2) && (9)
\end{aligned}
$$

が得られる. ここで $\kappa = \lambda^{t+1}$ とし,

$$
\begin{aligned}
v_n^t &= V_{n+1}^t(\lambda^t + V_n^t)\\
w_n^t &= -(\lambda^t + V_{n+1}^t)(\lambda^t + V_{n+2}^t)
\end{aligned}
$$

とおいた. (8) 式と (9) 式の両立条件より, 不等間隔離散 Lotka-Volterra 方程式

$$
\frac{V_n^{t+1}}{V_n^t} = \frac{\lambda^t + V_{n+1}^t}{\lambda^{t+1} + V_{n-1}^{t+1}} \tag{10}
$$

が導かれる.

3 String-orthogonal polynomials $P_n^{(1)}(x)$, $P_n^{(2)}(x)$

Adler,Moerbeke らは次の直交性を持つ多項式 $P_n^{(1)}(x)$, $P_n^{(2)}(x)$ を導入した [1].

$$
\begin{aligned}
\langle P_n^{(1)}(x), P_m^{(2)}(x)\rangle &= h_n \delta_{n,m}\,, \quad n, m = 0, 1, 2, \cdots && (11)\\
h_n &= \frac{\bar{\Delta}_{n+1}}{\bar{\Delta}_n} \neq 0\\
\bar{\Delta}_n &= |a_{ij}|_{0\le i,j\le n-1}\\
a_{ij} &= \langle x^i, x^j\rangle
\end{aligned}
$$

この多項式は次の行列式

$$
P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\bar{\Delta}_n}\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} & 1\\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & x^n \end{vmatrix}
$$

$$
P_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\bar{\Delta}_n}\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n}\\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n}\\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}
$$

で表される. この多項式 $\{P_n^{(1)}(x), P_n^{(2)}(x)\}$ を string orthogonal polynomials と呼ぶ. 以下では, 簡単のため $P_n^{(1)}(x)$, $P_n^{(2)}(x)$ をそれぞれ $P_n(x)$, $Q_n(x)$ と表す.

3.1 2 次元離散戸田方程式

以下では, 2 次元離散戸田方程式を導く. $\{P_n(x), Q_n(x)\}$ に対する新たな string-orthogonal polynomials $\{P_n^{1,0}(x), Q_n^{1,0}(x)\}$ と $\{P_n^{0,1}(x), Q_n^{0,1}(x)\}$ を導くことが可能である. P_n と Q_n との関係は, 行列式

の恒等式であるプリュッカー関係式より,

$$P_n^{1,0}(x,\delta) = \frac{1}{x-\delta}\left(P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(\delta)}{P_n(\delta)}P_n(x)\right) \tag{12}$$

$$Q_n^{0,1}(x,\epsilon) = \frac{1}{x-\epsilon}\left(Q_{n+1}(x) - \frac{Q_{n+1}(\epsilon)}{Q_n(\epsilon)}Q_n(x)\right) \tag{13}$$

さらにヤコビの恒等式より,

$$P_{n+1}^{0,1}(x,\epsilon) = P_{n+1}(x) + \frac{k_{n+1}Q_n(\epsilon)}{k_nQ_{n+1}(\epsilon)}P_n^{0,1}(x,\epsilon) \tag{14}$$

$$Q_{n+1}^{1,0}(x,\delta) = Q_{n+1}(x) + \frac{k_{n+1}P_n(\delta)}{k_nP_{n+1}(\delta)}Q_n^{1,0}(x,\delta) \tag{15}$$

が得られる. $\{P_n^{1,0},Q_n^{1,0}\}$, $\{P_n^{0,1},Q_n^{0,1}\}$ のモーメントをそれぞれ $a_{ij}^{1,0},a_{ij}^{0,1}$ とすると, これらは a_{ij} を用いて

$$a_{ij}^{1,0} = a_{i+1,j} - \delta\, a_{ij}, \qquad a_{ij}^{0,1} = a_{i,j+1} - \epsilon\, a_{ij}$$

と表される.

さらに (1 次元) 離散戸田方程式の場合と同様に P_n を波動関数 ψ_n とし, 新たな直交多項式系への変換を時間発展とみなす. これにより (12), (14) 式は, 離散時間 t,s を用いて,

$$\psi_n^{t+1,s} = \frac{1}{x-\lambda^{t+1}}\left(\psi_{n+1}^{t,s} - C_n^{t,s}\psi_n^{t,s}\right) \tag{16}$$

$$\psi_{n+1}^{t,s+1} = \psi_{n+1}^{t,s} + A_n^{t,s+1}\psi_n^{t,s+1} \tag{17}$$

と書き表せる. ここで

$$C_n^{t,s} = \frac{P_{n+1}(\delta)}{P_n(\delta)}, \qquad A_n^{t,s+1} = \frac{k_{n+1}Q_n(\epsilon)}{k_nQ_{n+1}(\epsilon)}$$

とし, δ を λ^{t+1} とおいた. (16) 式と (17) 式より,

$$A_{n-1}^{t,s+1}C_n^{t,s} = A_{n-1}^{t+1,s+1}C_{n-1}^{t,s+1} \tag{18}$$

$$A_n^{t,s+1} + C_n^{t,s} = A_{n-1}^{t+1,s+1} + C_n^{t,s+1} \tag{19}$$

2 次元離散戸田方程式が得られる.

3.2 離散 Hungry Lotka-Volterra 方程式

次に Hungry Lotka-Volterra 方程式の導出を試みる. 漸化式

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = x^2$$

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - v_nT_{n-2}(x) \qquad n = 2,3,\ldots \tag{20}$$

で与えられる多項式 $T_n(x)$ から始める.

この漸化式を満たす多項式は,

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= \frac{1}{\tau_n}\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} & 1 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & x^n \end{vmatrix} \\
\tau_n &= |a_{ij}|_{0\le i,j\le n-1} \\
a_{i,j} &= \begin{cases} z_{(2i+j)/3} & (i \bmod 3) = (j \bmod 3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

で表すことができる. 例えば $n = 8$ の時

$$
T_8(x) = \frac{\begin{vmatrix} z_0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 1 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & z_3 & x \\ 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & x^2 \\ z_2 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & z_4 & 0 & x^3 \\ 0 & z_3 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & z_5 & x^4 \\ 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & x^5 \\ z_4 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & z_6 & 0 & x^6 \\ 0 & z_5 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & z_7 & x^7 \\ 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & x^8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & z_4 & 0 \\ 0 & z_3 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & z_5 \\ 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 \\ z_4 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & z_6 & 0 \\ 0 & z_5 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & z_7 \end{vmatrix}}
$$

となる.

$T_n(x)$ に対し, 直交関係

$$
\langle T_n(x), U_m(x)\rangle = k_n\delta_{n,m}\,, \qquad n, m = 0, 1, 2, \cdots
$$
$$
k_n = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \neq 0
$$

を持つ多項式 $U_n(x)$

$$
U_n(x) = \frac{1}{\tau_n}\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} \tag{22}
$$

を準備する. $T_n(x)$ と同様に $U_n(x)$ に対しても漸化式

$$
U_{n+1}(x) = x^2U_{n-1}(x) - w_nU_{n-2}(x) \tag{23}
$$

が存在し, w_n は行列式 τ_n を用いて

$$w_n = \frac{\tau_n\tau_{n-2}}{\tau_{n-1}\tau_{n-1}}$$

と表される. (20) 式の v_n も

$$v_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-2}}{\tau_n\tau_{n-1}}$$

と表すことができる.

さらに z_j から $z_j^{1,0}$ と $z_j^{0,1}$ を

$$\begin{aligned} z_j^{1,0} &= z_{j+2}^{0,0} - (\delta)^3 z_j^{0,0} \\ z_j^{0,1} &= z_{j+1}^{0,0} - (\epsilon)^3 z_j^{0,0} \end{aligned}$$

と定め, 離散時間 t, s を導入することにより, 次の線形関係式

$$\begin{aligned} z_j^{t+1,s} &= z_{j+2}^{t,s} - (\delta^{t+1})^3 z_j^{t,s} \\ z_j^{t,s+1} &= z_{j+1}^{t,s} - (\epsilon^{s+1})^3 z_j^{t,s} \end{aligned}$$

を用意する. これによりプリュッカー関係式から,

$$T_n^{t+1,s}(x) = \frac{1}{(x)^3-(\delta^{t+1})^3}\left(T_{n+3}^{t,s}(x) - V_n^{t,s}T_n^{t,s}(x)\right) \tag{24}$$

$$U_n^{t,s+1}(x) = \frac{1}{(x)^3-(\epsilon^{s+1})^3}\left(U_{n+3}^{t,s}(x) - W_n^{t,s}U_n^{t,s}(x)\right) \tag{25}$$

の恒等式が得られる。ここで

$$V_n^{t,s} = \frac{T_{n+3}^{t,s}(\delta^{t+1})}{T_n^{t,s}(\delta^{t+1})}, \qquad W_n^{t,s} = \frac{U_{n+3}^{t,s}(\epsilon^{s+1})}{U_n^{t,s}(\epsilon^{s+1})}$$

とおいた. さらに $v_n^{t,s}$ と $V_n^{t,s}$ を

$$\begin{aligned} v_n^{t,s} &= u_{n+1}^{t,s}(\delta^{t+1} + u_n^{t,s})(\delta^{t+1} + u_{n-1}^{t,s}) \\ V_n^{t,s} &= -(\delta^{t+1} + u_{n+1}^{t,s})(\delta^{t+1} + u_{n+2}^{t,s})(\delta^{t+1} + u_{n+3}^{t,s}) \end{aligned}$$

とすると (20) 式と (24) 式の両立条件より, Hungry Lotka-Volterra 方程式

$$\frac{u_n^{t+1}}{u_n^t} = \frac{(\delta^{t+1} + u_{n+2}^t)(\delta^{t+1} + u_{n+1}^t)}{(\delta^{t+2} + u_{n-2}^{t+1})(\delta^{t+2} + u_{n-1}^{t+1})} \tag{26}$$

が得られる. また, w_n^t と $W_n^{t,s}$ を

$$\begin{aligned} w_n^{t,s} &= (y_n^{t,s}y_{n-1}^{t,s} - (\epsilon^{s+1})^2)y_{n-2}^{t,s} \\ W_n^{t,s} &= -y_{n+1}^{t,s}y_n^{t,s}y_{n-1}^{t,s} \end{aligned}$$

とすると (23) 式と (25) 式からも

$$\frac{y_n^{s+1}}{y_{n+3}^s} = \frac{(\epsilon^{s+1})^2 - y_{n+1}^s y_{n+2}^s}{(\epsilon^{s+2})^2 - y_{n+1}^{s+1}y_{n+2}^{s+1}} \tag{27}$$

が得られる.

4 おわりに

いくつかの例を用いて，離散可積分系と直交多項式系との関連を見てきた．行列式の恒等式であるプリュッカー関係式やヤコビの恒等式を用いて直交多項式間の関係を導き，それらを離散時間の時間発展を決める関係式とみなす．これにより，離散 Hungry Lotka-Volterra 方程式等の離散可積分系を導くことができた．この議論から不等間隔差分化された離散方程式の分子解も自然に得られる．また，Kato, Aomoto らによる 4 項間漸化式

$$
\begin{aligned}
P_{n+2}(x) &= (x-\alpha_n)P_{n+1}(x) - \beta_n P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \\
&\qquad \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \cdots .
\end{aligned}
$$

をみたす直交多項式系 [4] と離散高次戸田方程式の間の関連性も最近の計算により明らかになりつつある．さらに，パフィアン解も持つ離散方程式に対しても同様の議論ができることが期待される．

参考文献

[1] M.Adler and P.V.Moerbeke, String-orthogonal polynomials, string equations, and 2-Toda symmetries, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 50 (1997)241.

[2] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, New York: Gordon and Breach (1978).

[3] R. Hirota and S. Tsujimoto, Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations, J. Phys. Soc. Jpn. 64 (1995)3125.

[4] Y. Kato and K. Aomoto, Jacobi-Perron algorithms, bi-orthogonal polynomials and inverse scattering problems, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984)635.

[5] V. Spiridonov and A. Zhedanov, Discrete-time Volterra chain and classical orthogonal polynomials, J.Phys.A: Math. Gen. 30 (1997)8272.