数理解析研究所講究録
1170 巻 2000 年 9-22

可積分な曲面—離散化された微分幾何へ向けて
(INTEGRABLE SURFACES AND THEIR DISCRETISATION)

井ノロ 順一 (JUN-ICHI INOGUCHI)

福岡大学理学部応用数学科 (Fukuoka University)

はじめに

平均曲率一定輪環面の発見以来, 可積分系理論的アプローチによる微分幾何学の研究は進展著しい. とくに平均曲率一定曲面 (CMC 曲面) の研究は高い関心を呼び飛躍的に進展した. 平均曲率一定輪環面は Pinkall と Sterling [31] により分類されさらに Bobenko[2] により ϑ 函数表示が与えられた.(finite-gap integration) 平均曲率一定曲面は Sinh-Gordon 場の幾何学的対応物であることから微分幾何学における研究成果を Sinh-Gordon 場の研究に還元することができる. Pinkall-Sterling-Bobenko の結果は「Sinh-Gordon 場の二重周期解はすべて有限帯ポテンシャル解である」という事実を導く. Bobenko はこの事実を[3] の序文で注意している.

さらに CMC 輪環面の単位法線場 (ガウス写像) は単位球面への非線型シグマモデル (調和写像) であることから輪環面からコンパクト対称空間への非線型シグマモデルの組織的構成理論 (有限型調和写像論) へと発展した。これらは 2 次元アファイン戸田場方程式の幾何学的対応物であることを注意しておく.

当然のことながら次のステップとして「離散可積分系」の幾何学的対応物が何であるかに関心が向く. これは可積分系・幾何学双方の領域の研究者がともに関心を持つ課題である。既に「離散化された微分幾何学」が可積分系・微分幾何学の双方で活躍する研究者により提唱されており続々と論文が発表されている.

「離散化された微分幾何学」の研究を始める際に可積分系の研究者にとって障害となるのは「どのような微分幾何学の知識が必要か」がわかりにくいことと「手っ取り早く必要な知識が得られる文献」が存在しないことである。[1] この講演ではどのような考え方をつかんでおけば「離散化された微分幾何学」の研究領域に入り込めるかを手短かに説明することを試みる. 具体的には「平均曲率一定曲面はどう離散化されるか」までを説明する. 離散化された曲面についての詳しい解説は次の機会にゆずりたい.

[1] ここで「微分幾何学」という語を「可積分系」の語に入れ替えてみれば微分幾何学者にとっての障害を説明していることになる.

Part I. 可積分な曲面（連続理論）

離散可積分系を理解するには連続な系をよく理解していなければならない．そこでまず Part I において連続理論すなわち 可積分な曲面について必要な知識をまとめておく．

§1. 曲面の Lax 表示.

ここでは「曲面の微分幾何学」の基本事項を「可積分系理論」の観点から書き直しておく．内容が「幾何学」なのでどうしても記号の説明から始めないといけない．

3 次元のユークリッド空間[2] を $\mathbf{E}^3$, その内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す． $M\subset\mathbf{C}$ を単連結領域, $F: M\to\mathbf{E}^3$ を曲面の位置ベクトル場とする．複素座標 $z=x+\sqrt{-1}y$ を用いて第一基本形式 I を $I=e^u dzd\bar{z}$ と表わす．単位法ベクトル場 N は $N=(F_x\times F_y)/|F_x\times F_y|$ を選んでおく． $Q^\#=Qdz^2$, $Q=\langle F_{zz},N\rangle$ と定め Hopf 微分とよぶ．局所理論的には「曲面は u,H,Q で決定される」ことを注意しておく．もちろんでたらめに与えてよいわけではなく次の可積分条件 (ガウス・コダッチ方程式と呼ばれる) に従わねばならない．

$$\text{(G)}\qquad u_{z\bar{z}}+\frac{1}{2}H^2e^u-2|Q|^2e^{-u}=0,$$

$$\text{(C)}\qquad H_z=2e^{-u}Q_{\bar{z}}$$

コダッチ方程式 (C) からただちにわかるように平均曲率が一定であることと $Q^\#$ が正則であることは同値である。あとで述べるように平均曲率一定輪環面は双等温であり「双等温座標」を使うと (GC) は Sinh-Gordon 方程式になる．

$F: M\to\mathbf{E}^3$ の正規直交枠場 $(N, e^{-\frac{u}{2}}F_x, e^{-\frac{u}{2}}F_y)$ を二重被覆 p :SU(2)→SO(3) を介して SU(2) に持ち上げたものを Φ と書く。この Φ を曲面のフレーミングと呼ぶ．フレーミングの挙動を表す方程式

$$\text{(GW)}\qquad \frac{\partial}{\partial z}\Phi=\Phi U,\quad \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\Phi=\Phi V$$

が幾何学でいう「ガウス・ワインガルテンの公式」である．これの可積分条件

$$\frac{\partial}{\partial z}V-\frac{\partial}{\partial\bar{z}}U+[U,V]=0$$

がガウス・コダッチ方程式 (GC) である．従って (GW) は (GC) の 2×2 行列線型問題 (AKNS 表示) を与える．とくに U,V は Lax 対である． U, V を具体的に書き下しておく。

$$U=\begin{pmatrix}\frac{u_z}{4} & \frac{H}{2}e^{\frac{u}{2}}\\ -Qe^{-\frac{u}{2}} & -\frac{u_z}{4}\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}-\frac{u_{\bar{z}}}{4} & \bar{Q}e^{-\frac{u}{2}}\\ -\frac{H}{2}e^{\frac{u}{2}} & \frac{u_{\bar{z}}}{4}\end{pmatrix}.$$

---

[2]普通の 3 次元空間のこと．

註.

ここでは Lax 対 U, V の計算は省略したがこの「導出」自体には深い幾何学的背景が潜んでいる「補講　A」を参照されたい. また計算については[4], [28] が参考になる.

§2. 双等温曲面.

以下の議論で中心的な役割を演ずる特別な座標系をここで導入しておく.

[定義 **2.1**]. $\mathbf{E}^3$ 内の曲面 (M, F) 上の局所座標系 (x, y) が双等温[3] (*isothermic*) であるとは次の条件を満たすことをいう

$$I = e^u(dx^2 + dy^2), \quad II = h_{11}dx^2 + h_{22}dy^2.$$

ここで II は第二基本形式を表す. とくに双等温座標は I と II を同時対角化していることが特徴である.

[幾何学的説明 **2.2**]. $\kappa_1 = e^{-u}h_{11}$, $\kappa_2 = e^{-u}h_{22}$ は曲面の主曲率であり座標曲線は曲率線である.

双等温座標に対応する複素座標 $z = x + \sqrt{-1}y$ も単に双等温座標と呼ぶ.

[定義 **2.3**]. $\mathbf{E}^3$ 内の曲面 (M, F) が双等温 (*isothermic*) であるとは M の各点で双等温座標系が採れることをいう.

とくに臍点のない平均曲率一定曲面は双等温である. また回転面も双等温曲面の例である. 次節でみるように双等温曲面は「巨大な可積分系」である.

第二基本形式の成分 (h_{ij}) を使うと Hopf 微分の係数 Q は

$$Q = \left\{(h_{11} - h_{22}) - 2\sqrt{-1}h_{12}\right\}/4$$

と計算される[4] から双等温座標は次のように言い換えられる.

(M, F) : 双等温曲面 $\Longleftrightarrow$ $\exists z;\ Q(z, \bar{z})$ は実数値函数.

とくに臍点のない平均曲率一定曲面は双等温である. また回転面も双等温曲面の例である. 次節でみるように双等温曲面は「巨大な可積分系」である.

平均曲率一定曲面の場合に双等温座標系を用いて (GC) を書いてみよう.

$H = 0$ の場合:

$Q = 1/\sqrt{8}$ となる双等温座標をとれば (GC) は

$$\Delta u = e^{-u}$$

となりこれは Liouville 方程式である.

---

[3]上の条件のみ満たす座標系は常に存在し等温座標系 (*isother*mal) と呼ばれている上下を満たす座標系は必ずしも存在せずいわばこの座標系の存在が「可積分性」を保証する. isother**mic** と isother**mal** のどちらも通常「等温」と和訳されるが紛らわしいのでここでは isother**mic** に「双等温」の語を当てた. いっそ isothermic を bisothermic に改めればよいのだが.

[4]この式から Q の零点と臍点が一致することがわかる.

$H \neq 0$ の場合:

$H = 1/2$ と選んでも一般性を失わない．双等温座標系を $Q = 1/4$ であるように選べば (GC) は

$$\Delta u + \sinh u = 0$$

となりこれは Sinh-Gordon 方程式である．前節で与えた Lax 対 $\{U, V\}$ は

$$U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} u_z & e^{\frac{u}{2}} \\ -e^{-\frac{u}{2}} & -u_z \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -u_{\bar{z}} & e^{-\frac{u}{2}} \\ -e^{\frac{u}{2}} & u_{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

となりこれは Sinh-Gordon の Lax 対としてよく知られたものである[5]

双等温曲面の基本的な性質は次の命題である．

[命題 **2.4**].

(M, F) が双等温ならば M の単連結領域 $\mathfrak{D}$ で定義されたはめ込み $\tilde{F}$ で

(1) $(M, \tilde{F})$ は双等温；

(2) $(M, \tilde{F})$ は (M, F) と反共形的；

(3) $e^{\tilde{u}} = e^{-u}$, $\tilde{H} = q$, $\tilde{Q} = H/2$

をみたすものが存在する．$(M, \tilde{F})$ を (M, F) のクリストッフェル変換 または共軛曲面 (*dual surface*) と呼ぶ．

離散可積分系の理論においては「クリストッフェル変換」の名称は別の意味で使われるのでここでは「共軛曲面」の名称を使う．とくに平均曲率一定 ($\neq 0$) の場合共軛曲面は単純な形で与えられる．

[系 **2.5**]. (M, F) が臍点の無い平均曲率一定曲面 ($H \neq 0$) ならばその共軛曲面は

$$F^* = F + N/H$$

で与えられる．

Part II ではこの性質が「離散化のキー」であることを説明する．幾何学サイドからの双等温曲面についての詳しい情報は[25] をみるとよい．

§3 可積分系理論からみた曲面論.

この節では「平均曲率一定曲面のクラス」より広いクラスの可積分系を探してみる．そのためにまず CMC 輪環面のもつ性質をいくつか列挙してみる．

(0)　臍点がない,

(I)　“よい座標”で覆われている (双等温),

(II)　同伴族をもつ,

---

[5] (可積分) 方程式の Lax 対を見つける一般的な方法は無いがこの導出でわかるように「幾何学的実体」が見つかってしまえば Lax 対を見つける標準的な手続きは (大抵) 幾何学の知識で得られる．このことからも「可積分系の研究」において幾何学の知識・技術が有効なことがうかがえる．これはいくら強調してもしすぎることは無いと (筆者は) 考えている．

(III)　零曲率表示 (ZCR)[6] をもつ,
(IV)　ガウス写像が S^2 値シグマモデル.

輪環面では (0) が成立していることから (I) の "よい座標[7]" の存在と (II) の同伴族の存在が導かれることを注意しておく. 正確に述べると、臍点がないことから各点で双等温座標系がとれる. この座標系のもとではガウス・コダッチ方程式は Sinh-Gordon 方程式の形になる. ふたたび臍点がないことから（局所的に）平均曲率を保ったまま等長的に連続変形できる.（O. Bonnet [12].）

平均曲率一定曲面 (Sinh-Gordon) の「可積分性」を理解するためには平均曲率一定曲面を「可積分系のまま拡張する」ことが有効なアプローチであろう. そこで (II), (III) に着目する.

(II) の観点での一般化は「平均曲率を保ったまま等長的に連続変形できる曲面」である. 但しここでいう変形は局所的でもよく且つ非自明とする. すなわちユークリッド空間の合同変換群の一径数部分群の作用によるものは除外する. このような曲面はボンネ曲面と呼ばれている. 定義の仕方からボンネ曲面は「純幾何学的拡張」といえる.

次に (III) の観点からの一般化を考える. すなわち ZCR を許容するという観点から CMC という条件を拡張してみる. 一般の曲面に対する Lax 表示を思い出そう. スペクトル・パラメータ λ を U, V に導入する. スペクトル・パラメータの（意味の自然な）挿入の仕方には次の 3 通りがある.

(1) $U_\lambda^{[1]}$, $V_\lambda^{[1]}$: U, V において $Q \mapsto Q_\lambda = \lambda Q$, $\lambda \in S^1 = \{\, \lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda|^2 = 1 \,\}$ と変える;

(2) $U_\lambda^{[2]}$, $V_\lambda^{[2]}$: 次で定める;

$$U_\lambda^{[2]} = \begin{pmatrix} \frac{u_z}{4} & \lambda\frac{H}{2}e^{\frac{u}{2}} \\ -Qe^{-\frac{u}{2}} & -\frac{u_z}{4} \end{pmatrix}, \quad V_\lambda^{[2]} = \begin{pmatrix} -\frac{u_{\bar z}}{4} & \bar{Q}e^{-\frac{u}{2}} \\ -\lambda^{-1}\frac{H}{2}e^{\frac{u}{2}} & \frac{u_{\bar z}}{4} \end{pmatrix}$$

(3) $U_\lambda^{[3]}$, $V_\lambda^{[3]}$: 次で定める;

$$U_\lambda^{[3]} = \begin{pmatrix} \frac{u_z}{4} & \lambda\frac{H}{2}e^{\frac{u}{2}} \\ -\lambda Qe^{-\frac{u}{2}} & -\frac{u_z}{4} \end{pmatrix}, \quad V_\lambda^{[3]} = \begin{pmatrix} -\frac{u_{\bar z}}{4} & \lambda^{-1}\bar{Q}e^{-\frac{u}{2}} \\ -\lambda^{-1}\frac{H}{2}e^{\frac{u}{2}} & \frac{u_{\bar z}}{4} \end{pmatrix}$$

$d + \alpha_\lambda^{[i]}, \alpha^{[i]} = U_\lambda^{[i]}dz + V_\lambda^{[i]}d\bar{z}$ をゲージポテンシャル（接続）とするゲージ場（曲率）を $F_\lambda^{[i]}$ とする. これら 3 つの場合について「零曲率条件」を書き下してみる.

[命題 **3.1**]. $Q \neq 0,\ H \neq 0$ とする.
(1) $F_\lambda^{[1]} = 0 \iff \lambda = (1 - 2\sqrt{-1}t\bar{f})/(1 + 2\sqrt{-1}tf),\ \frac{1}{Q} = f + \bar{f}$, ここで f は

(B)
$$f_{zz}(f + \bar{f}) - f_z^2 = \bar{f}_{\bar z\bar z}(f + \bar{f}) - \bar{f}_{\bar z}^2$$

の解.[8]
(2) $F_\lambda^{[2]} = 0 \iff \lambda = -\bar{f}/f,\ \frac{1}{H} = f + \bar{f},\ f$: 正則函数 (すなわち 1/H は調和函数)

[6] Zero Curvature Representation
[7] 大雑把にいえば曲面の可積分性は特殊な座標系の存在と等価である
[8] あとで説明するようにボンネ曲面は双等温である. z を双等温座標系にとりかえると f の満たす微分方程式がこの形になる.

(3) $F_\lambda^{[3]}=0 \iff \lambda$ は z に独立 (H は一定)

各 $\alpha_\lambda^{[i]}$ ごとにフレーミングの方程式（Maurer-Cartan 方程式）を解きフレーミングの S^1-族を作る.

$$(\Phi_\lambda^{[i]})^{-1}d\Phi_\lambda^{[i]}=\alpha_\lambda^{[i]},\quad \Phi_\lambda^{[i]}(0,0)\equiv\mathbf{1}.$$

とくに $\Phi_\lambda^{[3]}$ は S^2 へのシグマモデルに対する extended framing とよばれるものになっている.[9] 3種のフレーミングは次のようにゲージ同値である.

$$\Phi_\lambda^{[2]}=\Phi_\lambda^{[1]}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda}\end{pmatrix},\quad \Phi_\lambda^{[3]}=\Phi_{\lambda^2}^{[1]}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda}\end{pmatrix}.$$

(1) ではボンネ曲面を記述する微分方程式が得られた.[10]
(2) では「平均曲率の逆数が調和函数」という条件が導かれた. これも平均曲率一定曲面の拡張概念である. この条件をみたす曲面を HIMC 曲面と呼ぶ.[11] この概念は A. I. Bobenko [4] により導入された. HIMC 曲面は可積分系の観点からの（平均曲率一定曲面の）拡張である. ([15] も参照されたい.) ここではスペクトル・パラメータが「点に依存している」ことに注意してほしい. すなわち HIMC 曲面に対する Lax 表示は Burtsev, Zakharov, Mikhairov [13] のいう *Inverse scattering problem with variable spectral parameter* の例を与えている.[12]

ボンネ曲面と HIMC 曲面はともに平均曲率一定曲面の拡張概念であるがこの 2 つの概念はどのような関連にあるのだろうか. この疑問には「双等温座標系」を使うことで答えられる.

[命題 **3.2**]. (L. Raffy, W. C. Graustein [32],[22])
臍点のない曲面 (M,F) がボンネであるための必要十分条件は
(1) (M,F) は双等温で;
(2) 双等温座標系に関し $\Delta(1/Q)=0$ である.

さらに命題 2.4 から次を得る.

[系 **3.3**]. 臍点のない曲面がボンネであればその共軛曲面は HIMC である.

この系の逆は成立しない. HIMC 曲面は一般には双等温ではないため共軛曲面が存在するとは限らない. 双等温性のもとでは「共軛をとる操作」を通じて（局所理論的には）ボンネ曲面の研究は双等温 HIMC の研究と等価になる.

幾何の問題の範疇において Sinh-Gordon の拡張に当たるクラスを求めたがこれらは既知の可積分系と対応しているのかが気にかかる. この疑問に対する回答は既に得られている.

CMC 輪環面の特徴 (I) を

(I′) ガウス・コダッチ方程式が可積分方程式（Sinh-Gordon）の形になる座標系がとれる

---

[9] Extended framing は 無限自由度対称性 (無限次元群作用) を考える際に基本的な役割を演ずる. [30] 参照.

[10] この方程式については [6], [7], [18] を参照.

[11] **H**armonic **I**nverse **M**ean **C**urvature

[12] 彼らによれば物理学的に興味ある方程式で固有値が時間変数に依存するものがあり, 逆散乱法は拡張されなければならないという. (実際には空間変数にも依存するものも考えなければならない) 彼らはこの「拡張された逆散乱法」を *Inverse scattering method with variable spectral parameter* と呼んだ.

と言い換えてみる．ガウス・コダッチ方程式が（なんらかの意味で）Sinh-Gordonの拡張にあたる方程式になる曲面は(I′)の観点からの「CMC曲面の一般化」といえる．CMC輪環面は(0)を満たしていたためSinh-Gordonの形にできたことに注意する．種数≥ 2としたりCMC条件を緩めたりすれば「特異性をもつ可積分方程式」が表れてくると予想される．可積分系理論においては特異性をもつ可積分方程式はパンルヴェ性をもつと考えられている（経験的事実）ことから「パンルヴェ方程式で記述される曲面」を「CMC曲面の一般化」と考えるのはそう不自然なことではない．実際, 本節で取り上げたHIMC曲面, ボンネ曲面はパンルヴェ方程式P_{III}, P_V, P_{VI}で記述される.[13]

ここではこれ以上詳しく説明する余裕はないので[6],[7]等を参照されたい．とりあえずは「双等温曲面がSinh-Gordon, P_{III}, P_V, P_{VI}を含む広いクラスの可積分系である」ことを了解されたい．

この節で説明した「平均曲率一定曲面の可積分系としての一般化」については[18]に手短かなサーベイがある．

この講演ではユークリッド空間内の曲面のみを取り上げたが3次元球面, 3次元双曲空間内の可積分な曲面も興味深い対象である．例えば3次元球面内の平坦な曲面は線型波動方程式$-u_{tt}+u_{xx}=0$と対応する．

ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面は球面及び双曲空間に対応物をもつことが知られている．(ローソン対応と呼ばれている.) だが双曲空間には $0<H^2<1$の場合球面やユークリッド空間に対応物を持たない平均曲率一定曲面が存在する．それらはCosh-Gordon場：$\Delta u+\cosh u=0$の幾何学的対応物である．

藤岡[16]はHIMC曲面の概念を球面と双曲空間にも拡げた．ただし外側の空間が曲がっている場合は定義式$\Delta(1/H)=0$を修正する必要がある． HIMC曲面の場合にもローソン対応が成立するがやはり $0<H^2<1$ の場合, 双曲空間にはユークリッド空間や球面には対応物がないHIMC曲面が存在する．$0<H^2<1$であるHIMC曲面はLax表示をもつことから「新しいクラスの可積分曲面」であると思われる．これらの曲面が既知の可積分系, 例えばパンルヴェ方程式等と対応するかどうかはまだわかっていない．詳細については[14]を参照されたい．ローレンツ定曲率空間内の可積分曲面については[19]-[21]を参照されたい．

[13] P_V, P_{VI}の任意パラメータを特定したもの．パンルヴェ方程式の初等函数解で記述されるボンネ曲面については[17]を参照.

PART II 可積分曲面の離散化

§4 離散曲面.

現代数学では「3 次元空間内の曲面」を次のように定式化している.

[定義 **4.1**]. 定義 2 次元多様体からユークリッド空間 $\mathbf{E}^3$ への共形はめ込みを $\mathbf{E}^3$ 内の曲面とよぶ.

この「現代数学的定義」に従えば「離散化された曲面」は次のように定義されるであろう:

[定義 **4.2**]. quard-graph G から $\mathbf{E}^3$ への "写像"を **discrete surface**[14] とよぶ.

しかしながら単に写像というだけではただのお題目であって何の実態もない. discrete surface は可積分系であることを課さないと数学的には意味をなさない対象と思われる.[15]

[記法 **4.3**].
v : (vertex)
V = 頂点全体の集合;
$e = [v, v']$: 頂点 v, v' を結ぶ辺 (edge);
E : 辺全体の集合;
$q = (v, v', v'', v''')$: (v, v', v'', v''') を頂点とする基本四辺形 (elementary quardrilateral);
Q : 基本四辺形の全体.

ここで「基本四辺形」を説明する. 頂点の 4 つ組 (v, v', v'', v''') が次の条件を満たすとき基本四辺形とよぶ.

(1) 頂点は丁度四本の辺:

$$[v, v'],\ [v', v''],\ [v'', v'''],\ [v''', v'] \in E$$

で結ばれる. とくに $[v, v''],\ [v', v'''] \notin E$ である.

(2) 基本四辺形の各辺は一つまたは二つの基本四辺形に含まれる.

とくに辺 e が一つの四辺形のみに含まれるとき $e \in \partial G$ と書き 「辺 e は G の境界上にある」と言い表す. 本講演では記述の簡略化のためグラフとして整数格子 $G = \mathbf{Z}^2$ を選ぶ. $F : \mathbf{Z} \to \mathbf{E}^3$ に対し次の記法を用いる.

$F_{n,m}$: 頂点;

$[F_{n+1,m}, F_{n,m}],\ [F_{n,m+1}, F_{n,m}]$: 辺;

$(F_{n,m}, F_{n+1,m}, F_{n+1,m+1}, F_{n,m+1})$: 基本四辺形.

---

[14] "discrete surface" や "discritized differential geometry" の邦訳は幾何学者の間ではまだ定まっていない. 廣田先生は[27] の中で「差分幾何」とよばれている. 後述するが discrete surface の本質的な部分は discrete net である.

[15] 連続理論では可積分でない曲面も重要である事実とは対比的である.

§5. 離散双等温曲面.

双等温曲面の離散化を考えたい. そのためには「双等温曲面」について更に詳しく理解しておく必要がある. 興味深いことにケーリーに溯る双等温曲面の「古典的定義」が離散化のヒントを与える.

[定理 5.1]. (Cayley; 1872) ユークリッド空間内の曲面 M が双等温であるための必要十分条件は M が曲率線を辺とする無限小正方形に分割できることである.

もちろんこの「定理」はこのままでは現代数学的には意味を為さないが以下で導入する「複比」を用いることで厳密化できる.

[註]. ケーリーの定理を「無限小」を厳密化してこのままの形で活かすことができると面白い. これは超準解析 (Nonstandard Analysis) を取り込むことで実現できることを Hertrich-Jeromin[23] が証明した. 微分幾何学の離散化によって「古典幾何学における無限小概念」が正当化されたことは幾何学サイドからは注目すべきことと思われる. これから説明する双等温曲面の離散化は無限小正方形の正当化と理解できる.

[命題 5.2].
双等温曲面は共形的概念である. すなわち次が成立する.

$F : M \to \mathbf{E}^3$ を双等温曲面とする. $\mathbf{E}^3$ の任意の共形変換（メビウス変換）$\mathcal{M}$ に対し $\tilde{F} := \mathcal{M} \circ F$ も双等温曲面である.

共形普遍性に鑑みここで「複比」を導入する.

[定義 5.3]. ユークリッド空間を四元数体の虚部と同一視する:

$$\mathbf{E}^3 = \mathrm{Im}\ \mathbf{H} = \{x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}.$$

4 点 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathrm{Im}\ \mathbf{H}$ に対し複素数 $DV(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ を

$$DV(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) := \mathrm{Re}\ Q(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) + \sqrt{-1}\ |\mathrm{Im}\ Q(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)|,$$

$$Q(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) := (Q_1 - Q_2)(Q_2 - Q_3)^{-1}(Q_3 - Q_4)(Q_4 - Q_1)^{-1} \in \mathrm{Im}\ \mathbf{H}$$

で定め 4 点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 の複比という.

もちろん 4 点がすべて複素数のときは函数論でいう「複素数に対する複比」と一致する. 基本四辺形 q が与えられているとき q の頂点 $q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ に対し複比を計算することができる. この複比を q の複比とよぶ.

次の命題は複素数の場合によく知られている事実の自然な拡張である.

[命題 5.4].

(1) 複比は $\mathbf{E}^3 = \mathrm{Im}\ \mathbf{H}$ のメビウス変換で不変.

(2) $\mathrm{Im}\ Q = 0 \Leftrightarrow q$ の頂点は同一円周上にある (concircular).

(3) $\mathrm{Im}\ Q = -1 \Leftrightarrow q$ は正方形の 4 頂点.

とくに (3) に注目しよう. ケーリーの古典的定義と比較すれば $DV = Q = -1$ が「双等温曲面の離散化は, どう定義されねばならないか」を説明している.

[定義 5.5]. 曲面 $F: M \to \mathbf{E}^3$ の一点 (x_0, y_0) を固定する. $\varepsilon \in \mathbf{R}$ に対し

$$F_1 = F + \varepsilon(-F_x - F_y) + \frac{\varepsilon^2}{2}(F_{xx} + F_{yy} + 2F_{xy}),$$
$$F_2 = F + \varepsilon(F_x - F_y) + \frac{\varepsilon^2}{2}(F_{xx} + F_{yy} - 2F_{xy}),$$
$$F_3 = F + \varepsilon(F_x + F_y) + \frac{\varepsilon^2}{2}(F_{xx} + F_{yy} + 2F_{xy}),$$
$$F_4 = F + \varepsilon(-F_x + F_y) + \frac{\varepsilon^2}{2}(F_{xx} + F_{yy} - 2F_{xy}),$$

で定まる基本四辺形の一径数族 $F^\epsilon := (F_1, F_2, F_3, F_4)(x_0, y_0)$ を F の (x_0, y_0) における無限小基本四辺形とよぶ.

ここで定義した「無限小基本四角形」を使うと次の特徴づけが得られる.

[定理 5.6].
F が双等温であるための必要十分条件は

$$Q(F^\epsilon) = -\mathbf{1} + O(\varepsilon^2).$$

これは「ケーリーの定義した双等温曲面」の厳密な再定式化を与えているここまでくれば双等温曲面の離散化がどうあるべきかは自ずと決まる.

[定義 5.7].
離散曲面 F が次の条件をみたすとき離散双等温曲面[16] (*discrete isothermic surface*)[17] とよぶ.

$$Q(F_{n,m}, F_{n+1,m}, F_{n+1,m+1}, F_{n,m+1},) = -1, \ m, n \in \mathbf{Z}$$

このように定めれば「離散双等温曲面」が共形不変概念になっていることは明らかである.

[定義 5.8].
離散双等温曲面 F に対し

$$F^*_{n+1,m} - F^*_{n,m} = \frac{F_{n+1,m} - F_{n,m}}{\|F_{n,m}F_{n+1,m}\|^2}, \quad F^*_{n,m+1} - F^*_{n,m} = \frac{F_{n+1,m} - F_{n,m}}{\|F_{n,m}F_{n,m+1}\|^2}$$

で定まる離散曲面 F^* もまた双等温である. F^* を F の共軛とよぶ.

離散曲面に対し「曲率」をどう定義すればよいのだろうか. 「平均曲率」の定義に依存して様々な種類の「平均曲率一定離散曲面」が定義できるかもしれない. しかし我々は「離散可積分系」に関心があり, そして連続理論 (通常の平均曲率一定曲面) と自然に結びつく系が欲しいのである. そうすると系 2.5 に着目すればよいことに気づく.

[16] ここまで見てくると図形としての曲面の姿というよりは座標系が主役であることが了解されるだろう. 「可積分系として曲面を見る」ことはとりもなおさず「可積分性を主張する特殊な座標系」に関心を集中させることなのである. すなわち「可積分系の研究としての曲面論」は「座標系の復興」である. この精神をとらないと discrete differential geometry の考え方は掴みにくいだろうと (筆者は) 感じる.

[17]「座標系が主役」という立場からは離散曲面というよりは discrete net とか discrete isothermic net という命名が望ましいかもしれない. 実際[9] はこの名称を使っている.

[定義 **5.9**]. 離散双等温曲面 F が次を満たすとき平均曲率一定離散曲面 (discrete CMC surface) とよぶ.

$$\| F_{n,m} - F^*_{n,m} \| = \frac{1}{H^2}$$

ここで $H \neq 0$ は定数である.[18]

ようやく平均曲率一定離散曲面の定義に到達した. この定義にもとづき平均曲率一定離散曲面の研究が開始され興味深い仕事が続々と発表されている. まず最初は[24] をみるとよい.

ここで導入した「平均曲率一定離散曲面」がふさわしいものであると言い切るにはまだ残された問題がある. 平均曲率一定離散曲面が廣田先生による「差分化された Sinh-Gordon 方程式」と結びつくかどうかを検証することである. この検証については平均曲率一定曲面に対する Lax 表示 (extended framing) の離散化を行うことが有効である. この検証については[30] を見てもらいたい. Sine-Gordon の場合については[8] に詳しく説明されているので参照されるとよい.

補講

§A. Lax 対の導出.

3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{E}^3$ を四元数体 $\mathbf{H}$ を用いて $\mathrm{Im}\,\mathbf{H} = \mathbf{E}^3$ と同一視する. このとき四元数の単位円 $G = \mathrm{Sp}(1) = \{\xi \in \mathbf{H} \mid \xi\bar{\xi} = 1\}$ はコンパクト (リー) 群であり 3 次元球面 S^3 と同一視される. G のリー代数は $\mathfrak{g} = \mathrm{Im}\,\mathbf{H} = \mathbf{E}^3$ である. $\mathbf{H}$ の自然な基底を $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ と書くと $S^2 = \mathrm{Ad(G)}\mathbf{i} = G/K$, $K = \mathrm{U}(1)$ であることがわかる. 更に $\mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{k}\mathbf{C}$ により $\mathbf{H}$ を右線型空間として $\mathbf{C}^2$ と同一視する. 「四元数を左から掛ける操作」は右複素線型なので四元数体 $\mathbf{H}$ から 2×2 複素行列環への準同型写像を定める.

$$\mathbf{H} \ni \alpha + \mathbf{k}\beta \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2\mathbf{C}$$

この対応により Sp(1)=SU(2) と同一視される. $g \in G$ に対し $\mathrm{Ad}(g)$ の $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ に関する表現行列を $\rho(g)$ と書けば $\rho(g) \in \mathrm{SO}(3)$ である. これらの対応 (同一視) を用いて Φ を偏微分すれば Lax 対 $\{U, V\}$ が求められる.

ソリトン方程式に対する Ablowitz-Kaup-Newell-Segur による 2 行 2 列の線型問題 (AKNS 表示) は (幾何学的には) 四元数 (および亜四元数[19]) を用いた「フレーミング」の導出と理解される

一方, Part II において「四元数の複比」が重要であった. 可積分曲面の研究において「四元数」は基本的な役割を演じることが最近明らかになってきた.(四元数函数論と呼ばれる) 詳しくは[29] をみるとよい.

---

[18] ここでは平均曲率の概念を導入することを避けて discrete CMC surface を定義した. 最近 Bobenko は isothermic とは限らない discrete net に対し「平均曲率」が自然に定義できることを示した.

[19] Split-quaternions, [19]-[20] 参照. footnote 5 も参照.

§**B.** 射影微分幾何学.

H. Wely はリーマン幾何学 (計量の幾何学) において角度の概念のみに注目することより「共形微分幾何学」を創始した. また測地線の概念を抽出し「射影微分幾何学」を, 平行移動の概念を抽出して「アファイン微分幾何学」を創始した.

連続および離散双等温曲面は共形不変概念であった. その意味で双等温曲面の幾何学は「共形微分幾何学」に属するといえる. 「射影構造」はある意味で「共形構造」と双対的な関係にある当然「射影微分幾何学」に可積分系を見出すことを期待したくなる. 実際, 射影微分幾何学に多くの可積分系を見出すことができる. とくに注目すべき対象はラプラス系列とよばれるものであろう. これは 3 次元実射影空間内の曲面の為す列であるがとくに周期的なラプラス系列は 2 次元戸田場方程式で記述される.[20] 射影微分幾何学における「周期的ラプラス系列」は離散化されている更に高次元化も為されている (discrete lattice model) これらの仕事は主に A. Doliwa, M. Manas, P. M. Santini らにより進められている. Discrete lattice model の物理学的解釈とくに弦理論の観点からの解説は齋藤[33] をみるとよい. 射影微分幾何学については

佐々木武, Projective Differential Geometry and Linear Homogeneous Differential Equations, Rokko Lectures in Mathematics, Vol. 5, 1999.

を薦める.[21] 可積分系の「数学的構造」は計量・共形構造・射影構造・等積構造などの何らかの幾何構造により必ず説明できるであろうと幾何学者は信じている.[22]

註. 等積アファイン微分幾何学は統計学・情報科学との関連が深く「情報幾何学」が甘利らにより創始された. 情報幾何学と可積分系理論との関連は興味深い研究課題であることはいうまでもないが古典的な等積アファイン微分幾何学には重要な可積分系が存在する. 3 次元アファイン空間内のアファイン球面とよばれる曲面である. それは BC_1 型戸田方程式 (=Dodd-Bullough 方程式) で記述される.[23] アファイン球面の離散化は A. Bobenko, W. Schief により研究が進められている.

謝辞.

講演の機会を与えてくださりました. 中村佳正先生, 辻本論先生に感謝したく思います. また講演の際に青本和彦先生, 廣田良吾先生, 高崎金久先生からいただきました有益なコメントはこの原稿をまとめる際に非常に励みとなりました. ありがとうございました.

References

1. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Spoerri, 1902.
2. A. I. Bobenko, All constant mean curvature surfaces in $\mathbf{R}^3$, S^3, H^3 in terms of theta-functions, Math. Ann. **290** (1991), 209–245.
3. ______, Constant mean curvature surfaces and integrable equations, Russian Math. Surveys **46** (4) (1991), 1–45.

---

[20]「Darboux の曲面論に戸田方程式が既に書かれている」ということは可積分系に携わったことがある人なら誰でも知っているが戸田方程式が記述する「幾何学的実態」が何であるかはそれほど理解されていないように見受けられる

[21]てっとり早く「ラプラス系列」がどんなものかを知りたい方には拙著, Integrable systems in projective differential geometry, to appear in Hamiltonian Systems in Differential Geometry (R. Miyaoka ed.) を

[22]そのように考えている「幾何学者」は筆者だけかもしれないが.

[23]筆者も現在アファイン球面の研究を進めている. なおこの方程式は複素射影平面 $\mathbf{C}P^2$ 内のラグランジュ極小曲面をも記述する.

4. ______, Surfaces in terms of 2 by 2 matrices– Old and new integrable cases, *Harmonic Maps and Integrable Systems* (A. P. Fordy and J. C. Wood, eds.), Aspects of Math., vol. E 23, Viewig, Braunschweig, 1994, pp. 83–127.
5. ______, Discrete integrable systems and geometry, 12th *International Congress of Mathematical Physics* ICMP '97, Brisbane, Australia, July 1997 (D. De Eit, A. Bracken, M. Gould and P. Pearce, eds.), International Press.
6. A. I. Bobenko and U. Eitner, Bonnet surfaces and Painléve equations, J. reine Angew Math. **499** (1998), 47–79.
7. A. I. Bobenko, U. Eitner and A. Kitaev, Surfaces with harmonic inverse mean curvature and Painléve equations, Geom. Dedicata **68** (1997), 187–227.
8. A. I. Bobenko and U. Pinkall, Discrete surfaces with constant negative Gaussian survature and the Hirota equation, J. Differ. Geom. **43** (1996), 527–611.
9. ______, Discrete isothermic surfaces, J. reine Angew. Math. **475** (1996), 187–208.
10. ______, Discretization of surfaces and integrable systems, *Discrete Integrable Geometry and Physics.*
11. A. I. Bobenko and R. Seiler (eds.), *Discrete Integrable Geometry and Physics*, Oxford University Press, 1999.
12. O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables, J. Éc. Polyt. **42** (1867), 72–92.
13. S. P. Burtsev, V. E. Zakharov and A. V. Mikhairov, Inverse scattering method with variable spectral parameter, Theo. Math. Phys. **70** (1987), 227–240.
14. E. Christoffel, Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen, J. reine Angew. Math. **67** (1867), 218–228.
15. A. S. Focas and I. M. Gelfand, Surfaces on Lie groups, Lie algebras and their integrability, (with an appendix by J. C. A. Paiva), Comm. Math. Phys. **177** (1996), 203–220.
16. A. Fujioka, Surfaces with harmonic inverse mean curvature in space forms, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3021–3025.
17. A. Fujioka and J. Inoguchi, Bonnet surfaces with constant curvature, Results in Math. **33** (1998), 288–293.
18. ______, On some generalisations of constant mean curvature surfaces, Lobachevskii Math. J. **3** (1999), 73–95 (http:ljm.ksu.ru/vol3/fujioka.htm).
19. ______, Spacelike surfaces with harmonic inverse mean curvature, preprint.
20. ______, Timelike surfces with harmonic inverse mean curvature, (in preparation).
21. ______, Timelike Bonnet surfaces in space forms, preprint.
22. W. C. Graustein, Applicability with preservation of both curvatures, Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1924), 19–23, Duke Math. J. **2**(1936),177–191.
23. U. Hertrich-Jeromin, The surfaces capable of division into infinitesimal squares by their curves of curvature, G.A.N.G., IV preprint **32** (1997).
24. U. Hertrich-Jeromin, T. Hoffmann and U. Pinkall, A discrete version of the Darboux transform for isothermic surfaces, *Discrete Integrable Geometry and Physics*, Oxford University Press.
25. U. Hertrich-Jeromin and F. Pedit, Remarks on the Darboux transform of isothermic surfaces , Doc. Math. J. DMV **2** (1997), 313–333 (http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/ documenta/vol-02/12.html).
26. R. Hirota, Nonlinear partial difference equations III, Discrete sine-Gordon equation, J. Phys. Soc. Japan **43** No. 6 (1977), 2079–2086.
27. ______, 差分学入門, 培風館, 1998.
28. J. Inoguchi, 曲面の微分幾何とソリトン方程式, *Workshop on Harmonic Maps and Related Topics* (Y. Ohnita, ed.), Tokyo Harmonic Map Club, 1996, pp. 1–50.
29. F. Pedit and U. Pinkall, Quaternionic analysis on Riemann surfaces and differential geometry, *Proc. International Congress of Mathematics, Berlin*, 1998 Vol. II, Doc. Math. J. DMV Extra Volume II,, p. 389–400 (http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/ documenta/xvol-icm/ 05/Pinkall.MAN.html).
30. F. Pedit and H. Wu, Discretizing constant curvature surfaces via loop group factorizations: the sine- and sinh-Gordon equations, J. Geom. Phys. **17** (1995), 245–260.
31. U. Pinkall and I. Sterling, On the classification of constant mean curvature tori, Ann. Math. **130** (1989), 407–451.

32. L. Raffy, Sur une classe nouvelle des surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sons altèration des courbures principales, Bull. Soc. Math. France **21** (1893), 70–72.
33. S. Saito, 弦模型の離散幾何学, 京都大学数理解析研究所講究録 **1098** (1999), 96–103.
34. W. Wunderlich, Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung, Österreich Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. S.B. II **160**, 39–77.
35. K. Voss, Bonnet surfaces in space of constant curvature, *First MSJ International Reserch on Geometry and Global Analysis, Lecture Notes*, vol. 2, Tôhoku Univ., Sendai, 1993, pp. 295–307.

福岡市城南区七隈
E-mail address: inoguchi@bach.sm.fukuoka-u.ac.jp