

数理解析研究所講究録 1172

短期共同研究

Volume Conjecture の現状

京都大学数理解析研究所

2000年9月

RIMS Kokyuroku 1172

Recent Progress Towards the Volume Conjecture

September, 2000

Research Institute for Mathematical Sciences

Kyoto University, Kyoto, Japan

“Recent Progress Towards the Volume Conjecture”,
14 – 17 March, 2000, International Institute for Advanced Studies

Participants:

David De Wit (RIMS, Kyoto University), Kazuo Habiro (University of Tokyo), Kazuhiro Hikami (University of Tokyo), Teruaki Kitano (Tokyo Institute of Technology), Andrew Kriker (Tokyo Institute of Technology), Takayuki Morifuji (University of Tokyo), Hitoshi Murakami (Waseda University), Hideaki Nishihara (Osaka University), Miyuki Okamoto (University of the Sacred Heart), Toshie Takata (Kyushu University).

• Aim:

This workshop was a continuation of the workshop “Volume Conjecture” held at the International Institute for Advanced Studies in October 1999. At this workshop we discussed various advances made since that time.

The ‘Volume Conjecture’ is that a certain limit of the colored Jones polynomial of a knot determines the hyperbolic volume of its complement. In the previous workshop we proposed concrete methods to prove the conjecture and we are currently working very hard to develop those approaches.

Alternatively (as A. Kriker has pointed out), the volume of a knot complement can be interpreted in quite a different framework. That is, it may alternatively be recovered as the L^2 -torsion invariant of the 3-manifold. The combinatorial definition of this invariant suggests an analogy with the so-called twisted Alexander polynomial. Careful study of this analogy will provide a deeper understanding of the Volume Conjecture, and possibly a manageable framework for its proof.

The aim of the workshop was to exchange new ideas, and to develop new techniques toward the solution of the Volume Conjecture.

• Results:

We list below the abstracts of all the talks (notes taken by H. Nishihara).

T. Takata: Takata described a method for obtaining the limit of the colored Jones polynomial of a knot, illustrating with a concrete example. In particular, she showed techniques necessary for the application of the saddle point method in evaluating that limit.

H. Murakami: Murakami numerically calculated limits of the quantum $SU(2)$ invariants (Witten–Reshetikhin–Turaev (WRT) invariants) of several closed hyperbolic 3-manifolds obtained from integral surgeries on the figure-eight knot, using MAPLE. These results strongly suggest that we can obtain the volumes of these manifolds as certain limits of their WRT invariants, just as in the case for knots.

M. Okamoto: Okamoto described how to obtain the colored Jones polynomials corresponding to various doubles of a knot, by using those of the Whitehead link. Further study may confirm the Volume Conjecture

for doubles of knots. Note that doubles of any non-trivial knot are non-hyperbolic.

D. De Wit: De Wit reported numerical calculations, using Mathematica, of the limit predicted by the Volume Conjecture for the figure-eight knot. It turns out that the convergence is very slow and there is a gap between the theoretical and the experimental limits.

K. Hikami: Hikami explained how to calculate the limits of a class of formulae, of which the colored Jones polynomials are generic examples, by using the saddle-point method. This formalism may make it possible to directly construct a correspondence between the combinatorics of knot diagrams and the combinatorics of hyperbolic structures on their complements.

T. Morifuji: Following W. Lück, Morifuji introduced the combinatorial L^2 -torsion invariant for 3-manifolds. Moreover he described how to calculate the invariant for the figure-eight knot exterior.

T. Kitano: Looking at the analogy between the combinatorial L^2 -torsion and the Alexander polynomial, Kitano indicated the importance of invariants interpolating between these two invariants. More precisely, he suggested constructing a sequence of torsion invariants corresponding to the lower central series of the fundamental group. This sequence provides such an interpolation, as its first element is the Alexander invariant and the combinatorial L^2 -torsion appears as its infinite limit.

A. Kriker: Kriker described the random-walk interpretation of the colored Jones polynomial introduced by X.-S. Lin and Z. Wang. He then suggested that examining a certain alternative limit of the colored Jones polynomial, which yields the Alexander polynomial of the knot (called the Melvin-Morton conjecture, already well understood) may suggest a manageable framework for proving the Volume Conjecture. He indicated that the principal difficulty of this approach is to understand how the “trace in the group ring” is implemented by the limit process.

K. Habiro: Habiro described a linear skein theoretic method to calculate the effect on colored Jones polynomials of knots after applying $+1$ -surgeries on unknots in their exterior. Using this method, one can present the colored Jones polynomials of knots such as 3_1 and 4_1 , and of links such as the Whitehead link and the Borromean rings, in simple formulae.

- Conclusions:

The content of the talks recorded above shows that this investigation is well underway. We see that developments to date (based on our previous workshop) have already given exciting glimpses of the theory that awaits discovery.

Moreover, this workshop introduced significant developments that have occurred since the first workshop. Most importantly, we see that the Volume Conjecture has much wider applicability than we could have hoped

for, in that it is probably applicable to non-splittable links and irreducible three-manifolds. Furthermore, we see that the Conjecture lives within a broader theoretical context, with intimate relations to other important concepts, such as L^2 -torsion.

This English version was polished by D. De Wit and A. Kricker. I would like to express my gratitude to them.

Hitoshi Murakami

「Volume Conjecture の現状」
(京都大学数理解析研究所短期共同研究)
2000年3月14日～17日 於 国際高等研究所

参加者 (10名) :

岡本 美雪 (聖心女子大学) 北野 晃朗 (東京工業大学) Andrew Kricker (東京工業大学) 高田 敏恵 (九州大学) David De Wit (京都大学) 西原 秀明 (大阪大学) 葉広 和夫 (東京大学) 樋上 和弘 (東京大学) 村上 斉 (早稲田大学) 森藤 孝之 (東京大学)

● 目的 :

昨年 (1999年) 10月, 国際高等研究所において「Volume Conjecture について」という研究会が開かれた. 本研究会は, それ以降の研究の発展に鑑み, 引き続き volume conjecture についての研究を行なうものである.

volume conjecture とは, 結び目の colored Jones 多項式のある種の極限が, その結び目の補空間の体積を決定するであろうというものである. 前回の研究会では, この予想を解決するための具体的な方針が立てられ, 現在その方針に沿って, 活発に研究が進められている.

一方, 全く別のアプローチからも結び目補空間の体積が得られることが Kricker 氏により指摘された. それは L^2 -torsion という不変量であり, その組み合わせ的な定義を見ると, いわゆる twisted Alexander 多項式との類似が見られる. この類似点を考察することにより, volume conjecture 解決への新たな展開が開けるであろう.

以上のように, volume conjecture に関する新たな情報交換を行ない, この予想に関する新たな知見を得るのが本研究会の目的である.

● 成果 :

まず, 各参加者の講演内容について発表順に簡単に記しておく. なお, 西原秀明は講演のノートを取りまとめた.

高田 敏恵 : 結び目の colored Jones 多項式の具体例から, 実際に極限を求める方法を説明した. 特に鞍点法を用いる際に必要な手法を解説した.

村上 斉 : 4_1 結び目の整数係数手術から得られる双曲的 3次元閉多様体の量子 $SU(2)$ 不変量 (Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量) の極限に関して, MAPLE を使った数値実験を行なった. その結果, 結び目と同じような極限を取ると体積が得られることがいくつかの例で分かった.

岡本 美雪 : Whitehead 絡み目の colored Jones 多項式を使って, 一般の結び目の double の colored Jones 多項式を計算する方法を紹介した.

この後研究が進めば、結び目の double に関する volume conjecture の研究が進むものと考えられる。

David De Wit : Volume conjecture が主張する極限の, Mathematica による数値実験を報告した. 収束はずいぶん遅く, 理論値と具体的な数値の間にはずいぶん隔たりがあるようである.

樋上 和弘 : colored Jones 多項式のような形の式の極限を, 鞍点法によっていかに計算するかを解説した. この方法を使うと, 結び目の図式からすぐに極限が計算できるようである.

森藤 孝之 : W. Lück に従い, combinatorial L^2 -torsion の紹介を行なった. また, 4_1 結び目の補空間の combinatorial L^2 -torsion の計算方法を具体的に解説した.

北野 晃朗 : combinatorial L^2 -torsion と Alexander 多項式の類似性に着目し, その間をつなぐ不変量の有用性を示唆した. 具体的には, 基本群の lower central series に対応した torsion 不変量を考えれば, その最初のものが Alexander 多項式になり, 無限列の極限として combinatorial L^2 -torsion が出てくると考えられる.

Andrew Krickner : X.-S. Lin と Z. Wang による colored Jones 多項式の random walk を使った解釈を説明し, これを使って, colored Jones 多項式の (volume conjecture に関したものは別の) ある種の極限が Alexander 多項式に一致することを示した (これは Melvin-Morton 予想と呼ばれており, 今までにいくつかの証明が与えられている). また, 同じようなアイデアで結び目の volume conjecture が証明できるのではないかという示唆も与えた.

葉広 和夫 : linear skein theory を使った colored Jones 多項式の計算方法を説明した. この方法を使うと, 例えば, 3_1 , 4_1 や, Whitehead link, Borromean rings などの絡み目の colored Jones 多項式を簡単な形に表すことができる.

以上の講演内容を総合すると, 前回の研究会の成果を生かした研究が現在着実に行われていることのみならず, volume conjecture の解決に向けて新たな道が開けたことがわかるであろう. また, 単なる解決の手段だけでなく, volume conjecture の一般化, および他の概念 (L^2 -torsion など) との関わりにおいても大きな進展があったと言えよう.

村上 斉

Volume Conjecture の現状
Recent Progress Towards the Volume Conjecture
短期共同研究報告集

2000年 3月14日～3月17日
研究代表者 村上 斉 (Hitoshi Murakami)

目次

1. 二重化結び目の colored Jones 多項式の計算方法について-----1
聖心女子大・文 岡本 美雪(Miyuki Okamoto)
2. L^2 -torsion of 3-manifolds-----8
東工大・理工学 北野 晃朗(Teruaki Kitano)
東工大・情報理工学 高沢 光彦(Mitsuhiko Takasawa)
東大・数理 森藤 孝之(Takayuki Morifuji)
3. ON THE COLORED JONES POLYNOMIALS OF SOME SIMPLE LINKS-----34
東大・数理 葉広 和夫(Kazuo Habiro)
4. Notes on Construction of the Knot Invariant from Quantum Dilogarithm Function-----44
東大・理学系 樋上 和弘(Kazuhiro Hikami)
5. OPTIMISTIC CALCULATIONS ABOUT THE WITTEN-RESHETIKHIN-TURAEV
INVARIANTS OF CLOSED THREE-MANIFOLDS OBTAINED FROM THE
FIGURE-EIGHT KNOT BY INTEGRAL DEHN SURGERIES-----70
東工大・理工学 村上 斉(Hitoshi Murakami)