数理解析研究所講究録
1174 巻 2000 年 32-44

最近ルート問題 (Nearest Route Problem)

九大・経済　岩本誠一 (Seiichi IWAMOTO)
Graduate School of Economics
Kyushu Univ.

Abstract

この報告では、次のような「最近ルート問題」といわれる新しい問題を考える。ある目標値を指定したとき、どのルートがこの値に一番近いだろうか? この問題は目標値を種々(小さく、または大きく)調整することによって、いわゆる最短ルート問題にもなり、最長ルート問題にもなる。最近ルート問題を不変埋没原理に基づく「前・後ろ向きの方法」と「後ろ・前向きの方法」で解き、典型的な最近ルートを例示する。

1　はじめに

いわゆる最短ルート問題は、理論、応用およびアルゴリズムの視点から幅広く研究されてきている重要な離散最適化問題である [1,2,4–7,15]。

本論文では、「最近ルート問題」という広いクラスの多段最適化問題を考える。最近ルート問題には目標値がある。目標値の多様な調整可能性により、最近ルート問題は最短ルート問題、最長ルート問題を含む [13]。

第2節では、加重をもつ有向グラフ上で一般最適化問題を考える。これを不変埋没原理 [2, 3, 12, 14] により、いわゆる「後ろ向きの方法」を「前・後ろ向きの方法」に押し進める。これは2段階からなる。第1段では新しく過去値集合を導入してその前向きの再帰式を導く。第2段では過去値を状態に組み入て状態空間を拡大し、その拡大状態空間上で最適値関数が満たす後ろ向きの再帰式を導く。

第3節では、未来値集合を導入して、「前向きの方法」を深化させた「後ろ・前向きの方法」で最適化問題を解く。

最後の第3節では、典型的な最近ルート問題を 前・後ろ向きと後ろ・前向きの二つの方法で解き、最近ルートが一致することを例示する

2　最適化問題

この節ではグラフ上で最近ルート問題を考える。すなわち、ある目標値を指定したとき、どのルートがその値に一番近いだろうか。たとえば小さい値を指定したとき、この最近ルート問題はいわゆる最短ルート問題になり、十分大きい値のときは最長ルート問題になる。

以下本論を通じて、$\mathcal{G} = (X, A)$ は加重関数 g をもつ有向グラフとする。簡単のため、グラフの**多段構造**を次のように仮定する。ノード集合 X は 有限個の部分ノード集合族 $\{X_n\}_{1\le n\le N+1}$ に分割されているとする:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N+1}.$$

各アーク $\overline{x_n, x_{n+1}}$ はあるノード $x_n (\in X_n)$ から次 (右隣り) の部分ノード集合 X_{n+1} のノード x_{n+1} に向きをもっているとする $(1 \le n \le N)$。 この有向アークは加重 $g_n(x_n, x_{n+1})$ を持つとする。従って、アーク集合 A と加重関数 $g : A \to R^1$ は次のように段毎に分割されている:

$$\begin{aligned} &A_n : X_n \to X_{n+1} && \text{ノード対ノード集合値関数} \\ &\quad A_n(x_n)(\subset X_{n+1}) && \text{空でないノード集合} \ (1 \le n \le N) \\ &g_n : X_n \times X_{n+1} \to R^1 && \text{加重関数.} \end{aligned}$$

さらに、次のデータが与えられているとする [9]:

$$
\begin{array}{ll}
k : X_{N+1} \to R^1 \quad \text{終端値関数}, \qquad l : X_1 \to R^1 \quad \text{初期値関数} & \\
\circ : R^1 \times R^1 \to R^1 \quad \text{左単位元 } \tilde{\lambda} \text{ および 右単位元 } \tilde{\mu} \text{ をもつ結合型二項演算} & (1) \\
\psi : R^1 \times R^1 \to R^1 \quad \text{複合関数}. &
\end{array}
$$

さて、複合関数の最適化問題:

$$
\mathrm{P}_1(x_1): \quad
\begin{array}{ll}
\text{Optimize} & \psi(g_1(x_1,x_2) \circ g_2(x_2,x_3) \circ \cdots \circ g_N(x_N,x_{N+1}) \circ k(x_{N+1})) \\
\text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \quad 1 \le n \le N
\end{array}
\qquad (2)
$$

を**前・後ろ向きの方法**で考える。これは以下に述べるように、パラメータ集合値関数に対する前向きの再帰式と最適値関数に対する後ろ向きの再帰式よりなる2段階法である。問題 $\mathrm{P}_1(x_1)$ の最適値を $u_1(x_1)$ としよう。以下、本節では $u_1(x_1)$ を不変埋没による方法で求める。

まず、第 n 段で状態 x_n に至る**過去値関数**を

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(x_1) &\triangleq \tilde{\lambda} \\
\lambda_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n) &\triangleq \tilde{\lambda} \circ g_1(x_1,x_2) \circ \cdots \circ g_{n-1}(x_{n-1},x_n) \quad 2 \le n \le N+1
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

で定義し、そこまでの**過去値集合**を

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1(x_1) &\triangleq \{\tilde{\lambda}\} \\
\Lambda_n(x_n) &\triangleq \{\tilde{\lambda} \circ g_1(x_1,x_2) \circ \cdots \circ g_{n-1}(x_{n-1},x_n) \mid \\
&\qquad \text{実行可能な } (x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}\} \quad 2 \le n \le N+1
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

で定義する。ただし、実行可能とは

$$
(\mathrm{i})_\mathrm{m} \quad x_{m+1} \in A_m(x_m) \quad 1 \le m \le n-1
$$

を意味する。このとき、次の前向きの再帰式がそれぞれ成り立つ:

補題 2.1

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(x) &= \tilde{\lambda} \qquad x \in X_1 \\
\lambda_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x,y) &= \lambda_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x) \circ g_n(x,y) \\
&\qquad (x_1,\ldots,x_{n-1},x,y) \in X_1 \times \cdots \times X_n \times X_{n+1}, \quad 1 \le n \le N
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1(x) &= \{\tilde{\lambda}\} \qquad x \in X_1 \\
\Lambda_{n+1}(y) &= \{\lambda \circ g_n(x,\, y) \mid \lambda \in \Lambda_n(x),\ y \in A_n(x)\} \\
&\qquad y \in X_{n+1}, \quad 1 \le n \le N.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

証明　自明。

さて、実行可能なルート $(x_1,x_2,\ldots,x_N,x_{N+1})$ を任意に与えよう。このとき、実パラメータ列 $\{\lambda_n\}_{1 \le n \le N+1}$ を

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &\triangleq \tilde{\lambda} \\
\lambda_n &\triangleq \tilde{\lambda} \circ g_1(x_1,x_2) \circ \cdots \circ g_{n-1}(x_{n-1},x_n) \quad 2 \le n \le N+1
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

で定義する。この (7) は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tilde{\lambda} \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n \circ g_n(x_n, x_{n+1}) \quad 1 \le n \le N \end{aligned} \tag{8}$$

に同値である。したがって、条件 (8) より、次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} & g_1(x_1, x_2) \circ g_2(x_2, x_3) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ k(x_{N+1}) \\ = \ & \tilde{\lambda} \circ g_1(x_1, x_2) \circ g_2(x_2, x_3) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ k(x_{N+1}) \\ = \ & \lambda_1 \circ g_1(x_1, x_2) \circ g_2(x_2, x_3) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ k(x_{N+1}) \\ = \ & \lambda_2 \circ g_2(x_2, x_3) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ k(x_{N+1}) \\ & \quad \vdots \\ = \ & \lambda_n \circ g_n(x_n, x_{n+1}) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ k(x_{N+1}) \\ & \quad \vdots \\ = \ & \lambda_{N+1} \circ k(x_{N+1}). \end{aligned} \tag{9}$$

ゆえに、$\mathrm{P}_1(x_1)$ の目的関数は次の型に表される：

$$\begin{aligned} & \psi(g_1(x_1, x_2) \circ g_2(x_2, x_3) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ k(x_{N+1})) \\ = \ & \psi(\lambda_n \circ g_n(x_n, x_{n+1}) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ k(x_{N+1})) \quad 1 \le n \le N \\ = \ & \psi(\lambda_{N+1} \circ k(x_{N+1})). \end{aligned} \tag{10}$$

ここで与問題 $\mathrm{P}_1(x_1)$ を 1 次元拡大された部分問題群 $\mathcal{P} = \{\mathrm{P}_n(x_n; \lambda_n)\}$ ：

$$\mathrm{P}_n(x_n; \lambda_n): \quad \begin{array}{ll} \text{Optimize} & \psi(\lambda_n \circ g_n(x_n, x_{n+1}) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ k(x_{N+1})) \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{m} \quad x_{m+1} \in A_m(x_m) \quad n \le m \le N \end{array} \tag{11}$$

$$x_n \in X_n, \quad \lambda_n \in \Lambda_n(x_n), \quad 1 \le n \le N+1$$

に埋め込もう。このとき、部分問題 $\mathrm{P}_n(x_n; \lambda_n)$ は終端（型評価関数をもつ）問題：

$$\mathrm{P}_n(x_n; \lambda_n): \quad \begin{array}{lll} \text{Optimize} & \psi(\lambda_{N+1} \circ k(x_{N+1})) & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{m} & x_{m+1} \in A_m(x_m) \\ & (\mathrm{ii})_\mathrm{m} & \lambda_{m+1} = \lambda_m \circ g_m(x_m, x_{m+1}) \quad n \le m \le N \\ & (\mathrm{iii})_\mathrm{m} & \lambda_m \in \Lambda_m(x_m) \end{array} \tag{12}$$

に表されることに注意しよう。

問題 $\mathrm{P}_n(x_n; \lambda_n)$ の最適値 $u_n(x_n; \lambda_n)$ の間には後ろ向きの再帰式が成り立つ。

定理 2.1

$$u_n(x; \lambda) = \operatorname*{Opt}_{y \in A_n(x)} u_{n+1}(y; \lambda \circ g_n(x, y)) \tag{13}$$

$$x \in X_n, \quad \lambda \in \Lambda_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

$$u_{N+1}(x; \lambda) = \psi(\lambda \circ k(x)) \qquad x \in X_{N+1}, \quad \lambda \in \Lambda_{N+1}(x). \tag{14}$$

証明　自明。

与問題 $\mathrm{P}_1(x_1)$ の最適値 $u_1(x_1)$ は $u_1(x_1;\tilde{\lambda})$ で与えられる：

$$u_1(x_1) = u_1(x_1;\tilde{\lambda}).$$

さらに、式 (13) の最適（値を与える）点全体を $\pi_n^*(x;\lambda)$ とすると、政策 $\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_N^*\}$ から、次のように最適ルート $x_1 \to x_2^* \to \cdots \to x_N^* \to x_{N+1}^*$ が生成される。

$$\begin{aligned}
&x_2^* := \pi_1^*(x_1;\tilde{\lambda}), \quad \lambda_2 := \tilde{\lambda} \circ g_1(x_1, x_2^*)\\
&x_3^* := \pi_2^*(x_2^*;\lambda_2), \quad \lambda_3 := \lambda_2 \circ g_2(x_2^*, x_3^*)\\
&\qquad\vdots\\
&x_N^* := \pi_{N-1}^*(x_{N-1}^*;\lambda_{N-1}), \quad \lambda_N := \lambda_{N-1} \circ g_{N-1}(x_{N-1}^*, x_N^*)\\
&x_{N+1}^* := \pi_N^*(x_N^*;\lambda_N).
\end{aligned} \tag{15}$$

3　後ろ・前向きの方法

今度は、次の複合関数の最適化問題を**後ろ・前向きの方法**で考える：

$$\mathrm{Q}_{N+1}(x_{N+1}): \quad \begin{array}{ll} \text{Optimize} & \psi(l(x_1) \circ g_1(x_1, x_2) \circ g_2(x_2, x_3) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}))\\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n} \;\; x_{n+1} \in A_n(x_n) \quad 1 \le n \le N. \end{array} \tag{16}$$

ここでは第 n 段の状態 x_n からの**未来値関数**

$$\begin{aligned}
\mu_{N+1}(x_{N+1}) &\triangleq \tilde{\mu}\\
\mu_n(x_n, \ldots, x_{N+1}) &\triangleq g_n(x_n, x_{n+1}) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ \tilde{\mu} \quad 1 \le n \le N
\end{aligned} \tag{17}$$

および**未来値関集合**

$$\begin{aligned}
\Gamma_{N+1}(x_{N+1}) &\triangleq \{\tilde{\mu}\}\\
\Gamma_n(x_n) &\triangleq \{g_n(x_n, x_{n+1}) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ \tilde{\mu} \,|\\
&\qquad \text{実行可能な } (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{N+1}) \in X_n \times X_{n+1} \times \cdots \times X_{N+1}\} \quad 1 \le n \le N
\end{aligned} \tag{18}$$

を導入する。ただし、実行可能とは

$$(\mathrm{i})_\mathrm{m} \;\; x_{m+1} \in A_m(x_m) \quad n \le m \le N.$$

このとき、未来値については後ろ向き再帰式

補題 3.1

$$\begin{aligned}
\mu_{N+1}(x) &= \tilde{\mu} \qquad x \in X_{N+1}\\
\mu_n(x, y, x_{n+2}, \ldots, x_{N+1}) &= g_n(x, y) \circ \mu_{n+1}(y, x_{n+2}, \ldots, x_{N+1})\\
&\qquad (x, y, x_{n+2}, \ldots, x_{N+1}) \in X_n \times X_{n+1} \times \cdots \times X_{N+1}, \quad 1 \le n \le N
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{N+1}(x) &= \{\tilde{\mu}\} \qquad x \in X_{N+1}\\
\Gamma_n(x) &= \{g_n(x,\, y) \circ \mu \,|\, \mu \in \Gamma_{n+1}(y),\; y \in A_n(x)\}\\
&\qquad x \in X_n, \quad 1 \le n \le N
\end{aligned} \tag{20}$$

が成り立つ。

任意に実行可能なルート $(x_1, x_2, \ldots, x_{N+1})$ を与えると、列 $\{\mu_n\}_{1\leq n\leq N+1}$ が

$$\begin{aligned} \mu_{N+1} &= \tilde{\mu} \\ \mu_n &= g_n(x_n, x_{n+1}) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ \tilde{\mu} \quad 1 \leq n \leq N \end{aligned} \tag{21}$$

を満たす必要十分条件は

$$\begin{aligned} \mu_{N+1} &= \tilde{\mu} \\ \mu_n &= g_n(x_n, x_{n+1}) \circ \mu_{n+1} \quad 1 \leq n \leq N \end{aligned} \tag{22}$$

である。したがって、条件 (22) の下では

$$\begin{aligned} & l(x_1) \circ g_1(x_1, x_2) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \\ = \ & l(x_1) \circ g_1(x_1, x_2) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1}) \circ \tilde{\mu} \\ = \ & l(x_1) \circ g_1(x_1, x_2) \circ \cdots \circ g_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \circ \mu_n \quad 1 \leq n \leq N+1 \end{aligned} \tag{23}$$

が成り立ち、目的関数は

$$\begin{aligned} & \psi(l(x_1) \circ g_1(x_1, x_2) \circ \cdots \circ g_N(x_N, x_{N+1})) \\ = \ & \psi(l(x_1) \circ g_1(x_1, x_2) \circ \cdots \circ g_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \circ \mu_n) \quad 2 \leq n \leq N+1 \\ = \ & \psi(l(x_1) \circ \mu_1) \end{aligned} \tag{24}$$

で表される。

さて、拡大部分問題群 $\mathcal{Q} = \{\mathrm{Q}_n(x_n; \mu_n)\}$:

$$\mathrm{Q}_n(x_n; \mu_n): \quad \begin{array}{ll} \text{Optimize} & \psi(l(x_1) \circ g_1(x_1, x_2) \circ \cdots \circ g_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \circ \mu_n) \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{m} \quad x_{m+1} \in A_m(x_m) \\ & (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad \mu_m = g_m(x_m, x_{m+1}) \circ \mu_{m+1} \quad 1 \leq m \leq n-1 \\ & (\mathrm{iii})_\mathrm{m} \quad \mu_m \in \Gamma_m(x_m) \end{array} \tag{25}$$

$$x_n \in X_n, \quad \mu_n \in \Gamma_n(x_n), \quad 1 \leq n \leq N+1$$

を導入して、与問題 $\mathrm{Q}_{N+1}(x_{N+1})$ を群 $\mathcal{Q}$ に埋め込む（の問題のひとつと考える）。部分問題 $\mathrm{Q}_n(x_n; \mu_n)$ は初期（型評価関数）問題：

$$\mathrm{Q}_n(x_n; \mu_n): \quad \begin{array}{ll} \text{Optimize} & \psi(l(x_1) \circ \mu_1) \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{m}, \ (\mathrm{ii})_\mathrm{m}, \ (\mathrm{iii})_\mathrm{m} \quad 1 \leq m \leq n-1 \end{array} \tag{26}$$

でも表されている。$\mathrm{Q}_n(x_n; \mu_n)$ の最適値 $v_n(x_n; \mu_n)$ は次の前向きの再帰式を満たす。

定理 3.1

$$v_1(x; \mu) = \psi(l(x) \circ \mu) \qquad x \in X_1, \quad \mu \in \Gamma_1(x) \tag{27}$$

$$v_{n+1}(y; \mu) = \underset{x\,;\,y \in A_n(x)}{\mathrm{Opt}} v_n(x\,; g_n(x, y) \circ \mu) \tag{28}$$

$$y \in X_{n+1}, \quad \mu \in \Gamma_{n+1}(y), \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

$v_{N+1}(x_{N+1};\tilde{\mu})$ は与問題 $Q_{N+1}(x_{N+1})$ の最適値である。(28) の最適点全体 $\tilde{\pi}_{n+1}(y;\mu)$ なら成る政策 $\tilde{\pi}=\{\tilde{\pi}_2,\tilde{\pi}_3,\ldots,\tilde{\pi}_{N+1}\}$ によって、最適ルート $x_{N+1}\leftarrow\tilde{x}_N\leftarrow\cdots\leftarrow\tilde{x}_2\leftarrow\tilde{x}_1$ が以下のように定まる。

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_N := \tilde{\pi}_{N+1}(x_{N+1};\tilde{\mu}), \quad \mu_N := g_N(\tilde{x}_N, x_{N+1})\circ\tilde{\mu}\\
&\tilde{x}_{N-1} := \tilde{\pi}_N(\tilde{x}_N;\mu_N), \quad \mu_{N-1} := g_{N-1}(\tilde{x}_{N-1},\tilde{x}_N)\circ\mu_N\\
&\qquad\vdots\\
&\tilde{x}_2 := \tilde{\pi}_3(\tilde{x}_3;\mu_3), \quad \mu_2 := g_2(\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)\circ\mu_3\\
&\tilde{x}_1 := \tilde{\pi}_2(\tilde{x}_2;\mu_2).
\end{aligned} \tag{29}$$

ただし $x_{N+1}\leftarrow\tilde{x}_N$ は状態 x_{N+1} には $\tilde{x}_N$ から到達すべきであることを示している。

4 最近ルート問題

グラフ上で加法型評価が目標値に一番近いルートを探す問題 — 最近ルート問題 — を考えよう。図 1 は加重をもつ有向ネットワークであり、各アークは左から右へ向いている [8, 図 1.2, p.2]。（最短ルート問題については [8, p.2] [10, 11] 参照。）

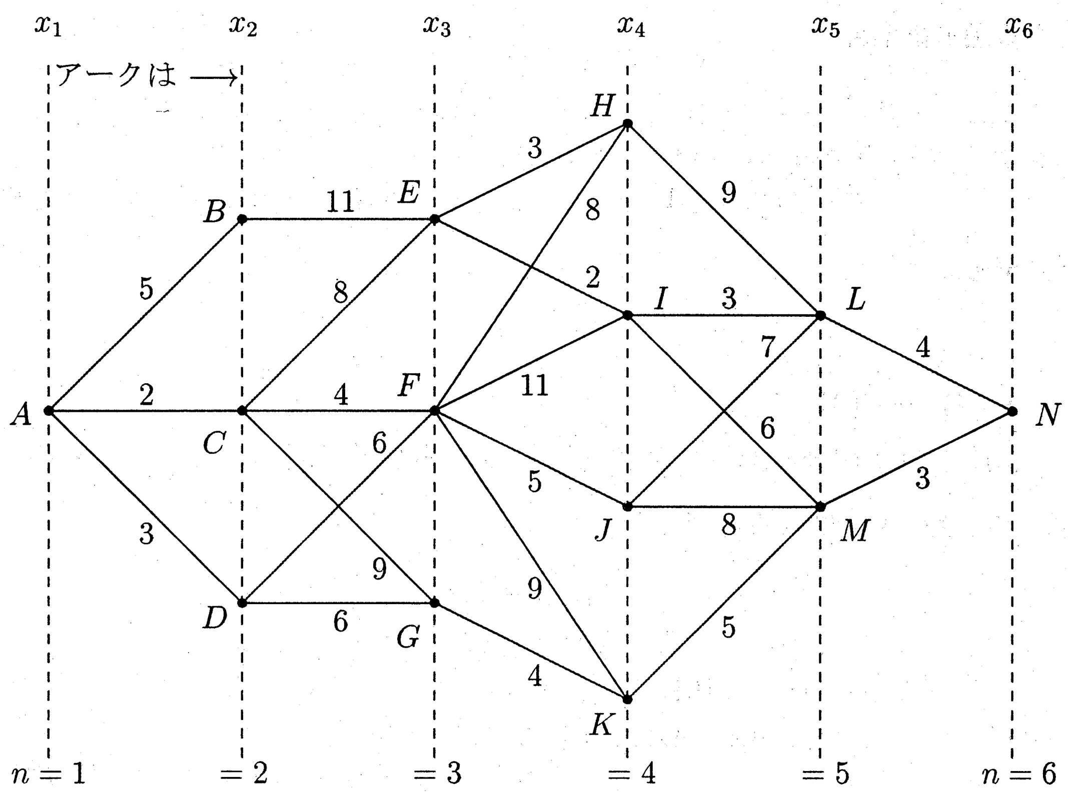

図 1　最近ルート問題

ここでは状態空間 $X=\{A,B,\ldots,N\}$ を 6 つの部分集合：

$$\begin{aligned}X_1=\{A\},\quad X_2=\{B,C,D\},\quad X_3=\{E,F,G\},\\ X_4=\{H,I,J,K\},\quad X_5=\{L,M\},\quad X_6=\{N\}\end{aligned} \tag{30}$$

に分割している。さらに、$A_n(x_n)$ を x_n から直接行ける状態（ノード）の全体とすると、次になる：

$$\begin{aligned}A_1(A)=\{B,C,D\},\quad A_2(B)=\{E\},\quad A_2(C)=\{E,F,G\},\\ A_2(D)=\{F,G\},\quad A_3(E)=\{H,I\},\ \ldots\ ,\ A_5(L)=\{N\}, A_5(M)=\{N\}.\end{aligned} \tag{31}$$

4.1 前・後ろ向きの方法

さて、以後、24 を目標値と定めよう。加法型評価値が絶対値の意味で 24 に一番近いルートを求めよう。この問題は次で表される：

$$\mathrm{B}_1(A):\quad \begin{array}{ll}\text{minimize} & |g_1(A,x_2)+g_2(x_2,x_3)+\cdots+g_5(x_5,N)-24|\\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n}\quad x_{n+1}\in A_n(x_n)\quad 1\le n\le 5.\end{array} \tag{32}$$

これに対する過去値集合

$$\begin{aligned}\Lambda_1(A) &= \{0\}\\ \Lambda_n(x_n) &= \{0+g_1(A,x_2)+\cdots+g_{n-1}(x_{n-1},x_n)\mid\\ &\qquad \text{実行可能な } (A,x_2,\ldots,x_{n-1})\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1}\}\quad 2\le n\le 6\end{aligned} \tag{33}$$

は前向きの再帰式

系 4.1

$$\begin{aligned}\Lambda_1(A) &= \{0\}\\ \Lambda_{n+1}(y) &= \{\lambda+g_n(x,y)\mid \lambda\in\Lambda_n(x),\ y\in A_n(x)\}\quad y\in X_{n+1},\quad 1\le n\le 5\end{aligned} \tag{34}$$

で生成されて、次のようになる（図２）：

$$\begin{aligned}&\Lambda_1(A)=\{0\}\\ &\Lambda_2(B)=\{5\},\quad \Lambda_2(C)=\{2\},\quad \Lambda_2(D)=\{3\}\\ &\Lambda_3(E)=\{10,16\},\quad \Lambda_2(F)=\{6,9\},\quad \Lambda_3(G)=\{9,11\}\\ &\Lambda_4(H)=\{13,14,17,19\},\quad \Lambda_4(I)=\{12,17,18,20\},\\ &\qquad\Lambda_4(J)=\{11,14\},\quad \Lambda_4(K)=\{13,15,18\}\\ &\Lambda_5(L)=\{15,18,20,21,22,23,26,28\},\quad \Lambda_5(M)=\{18,19,20,22,23,24,26\}\\ &\Lambda_6(N)=\{19,21,22,23,24,25,26,27,29,30,32\}\end{aligned} \tag{35}$$

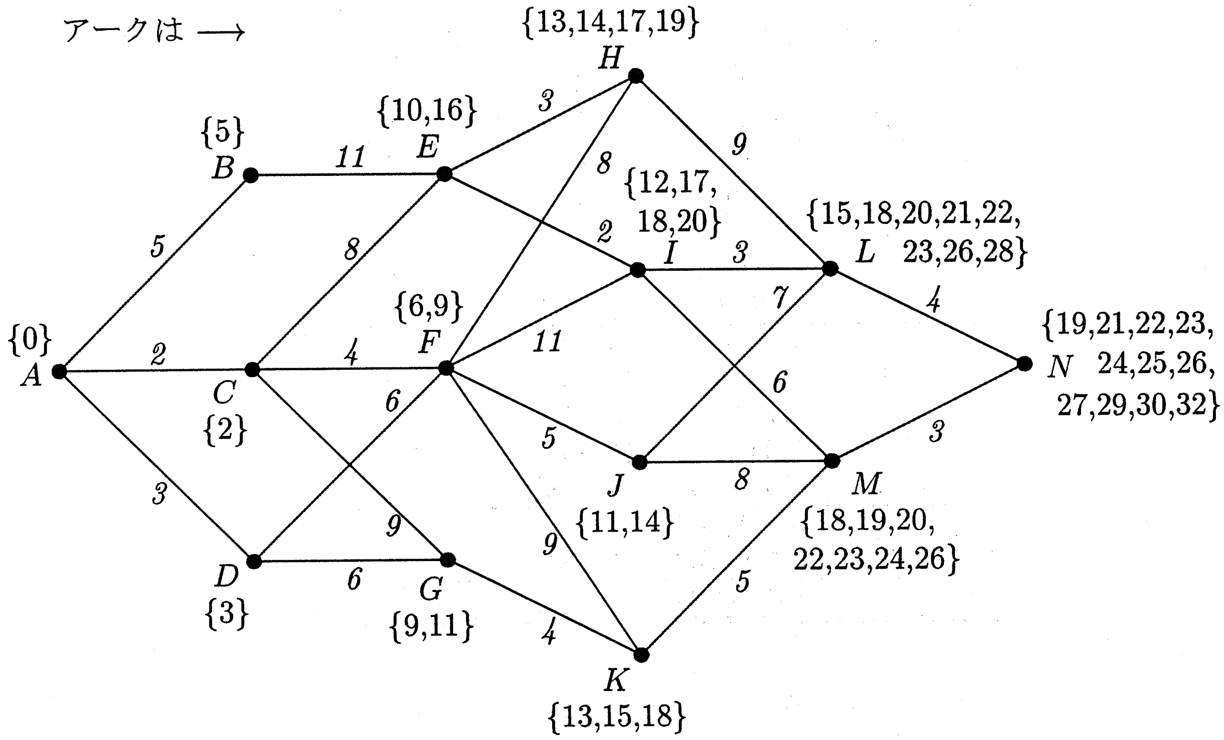

図 2 過去値をもつ最近ルート問題

拡大部分問題

$$\mathrm{B}_n(x_n;\lambda_n): \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & |\lambda_n + g_n(x_n, x_{n+1}) + \cdots + g_5(x_5, N) - 24| \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_{\mathrm{m}} \quad x_{m+1} \in A_m(x_m) \quad n \le m \le 5. \end{array} \tag{36}$$

の最小値 $u_n(x_n;\lambda_n)$ は、始発ノード A から値 λ_n で x_n に来て、そこから最終ノード N に行くとき、全体の距離の目標値 24 とのズレ（差の絶対値）の最小値を表している。この最小値関数は後ろ向きの再帰式

系 4.2

$$u_n(x;\lambda) = \min_{y \in A_n(x)} u_{n+1}(y\,;\lambda + g_n(x,\,y)) \tag{37}$$

$$x \in X_n, \quad \lambda \in \Lambda_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, 5$$

$$u_6(N;\lambda) = |\lambda - 24| \qquad \lambda \in \Lambda_6(N). \tag{38}$$

を満たす。式(37),(38) を解くと、最小値関数列 $\{u_1, u_2, \ldots, u_6\}$ および最適政策 $\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_5^*\}$ が得られる (表 1)。

段 n	ノード X	過去値 λ	最小値 $u_n(X;\lambda)$	最適次期ノード $\pi_n^*(X;\lambda)$
1	A	0	0	C
2	B	5	1	E
	C	2	0	F
	D	3	1	F
3	E	10	2	H
		16	1	I
	F	6	0	I
		9	1	J
	G	9,11	$\|\lambda - 12\|$	K
4	H	$\lambda \in \Lambda_4(H)$	$\|\lambda - 11\|$	L
	I	12	$\|\lambda - 15\|$	M
		17,18,20	$\|\lambda - 17\|$	L
	J	11,14	$\|\lambda - 13\|$	M,L
	K	13,15,18	$\|\lambda - 16\|$	M
5	L	$\lambda \in \Lambda_5(L)$	$\|\lambda - 20\|$	N
	M	$\lambda \in \Lambda_5(M)$	$\|\lambda - 21\|$	N
6	N	$\lambda \in \Lambda_6(N)$	$\|\lambda - 24\|$	-

表 1　前・後ろ向きの方法による最適解

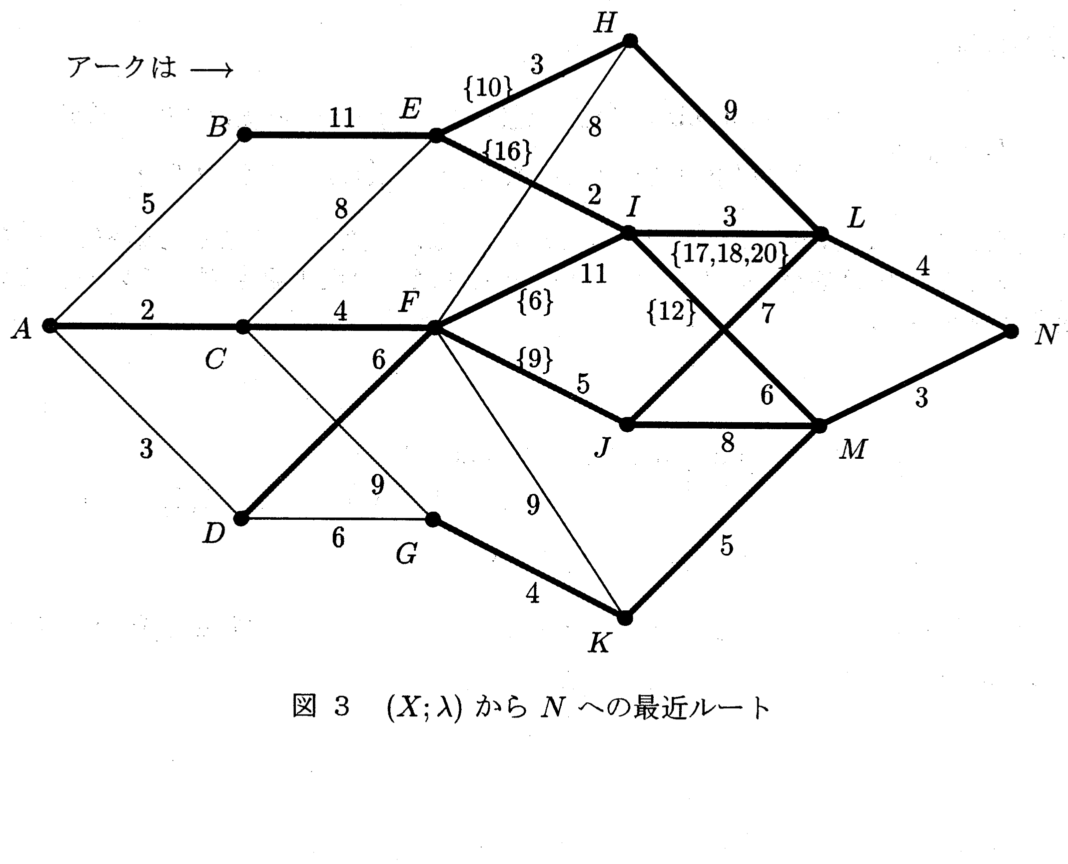

図 3　$(X;\lambda)$ から N への最近ルート

図 3 では、A から距離 λ で X に来たとき、X から次への最適ノードを $\pi_n^*(X;\lambda)$ で表している。すなわち、これは $(X;\lambda)$ から行くべき最適次期ノードである。

初期状態 $s_1 := (x_1, \lambda_1) = (A, 0)$ から最適政策 $\pi^* = \{\pi_n^*(x;\lambda);\ \lambda \in \Lambda_n(x)\}$ を適用すると、最適行動（状態と決定の交互列）が次のように求められる：

$$s_1 = (A,0) \to \left\{ \begin{array}{l} \pi_1^*(A;0) = C \\ \lambda_2 := \lambda_1 + g_1(A,C) = 0 + 2 = 2 \end{array} \right\} \to$$

$$s_2 = (C,2) \to \left\{ \begin{array}{l} \pi_2^*(C;2) = F \\ \lambda_3 := \lambda_2 + g_2(C,F) = 2 + 4 = 6 \end{array} \right\} \to$$

$$s_3 = (F,6) \to \left\{ \begin{array}{l} \pi_3^*(F;6) = I \\ \lambda_4 := \lambda_3 + g_3(F,I) = 6 + 11 = 17 \end{array} \right\} \to$$

$$s_4 = (I,17) \to \left\{ \begin{array}{l} \pi_4^*(I;17) = L \\ \lambda_5 := \lambda_4 + g_4(I,L) = 17 + 3 = 20 \end{array} \right\} \to$$

$$s_5 = (L,20) \to \left\{ \begin{array}{l} \pi_5^*(L;20) = N \\ \lambda_6 := \lambda_5 + g_5(L,N) = 20 + 24 = 24 \end{array} \right\} \to s_6 = (N,24).$$

したがって、求める（24 に一番近い）ルートは

$$A \xrightarrow{2} C \xrightarrow{4} F \xrightarrow{11} I \xrightarrow{3} L \xrightarrow{4} N$$

になり、この問題の場合**ちょうど**目標値 $24 = 2 + 4 + 11 + 3 + 4$ になっている。

この前・後ろ向きの方法では任意の $(X;\lambda)$（ただし、$\lambda \in \Lambda_n(X)$）から N までの（24 に一番近いという意味で）最近ルートを求めることができる。たとえば、次のようになる。

1. 拡大状態 $(E;16)$ からの最近ルートは

$$(E;16) \xrightarrow{2} (I;18) \xrightarrow{3} (L;21) \xrightarrow{4} (N;25)$$

すなわち

$$A \xRightarrow{16} E \xrightarrow{2} I \xrightarrow{3} L \xrightarrow{4} N$$

である。この加法値と 24 との差の絶対値は最小値は $|16+2+3+4-24| = |25-24| = 1$, である。ただし、$\Longrightarrow$ は最適性を意味していない。ここでは A から E へ 距離 16 の（どれかの）ルートで行くことを示している。

2. $(D;3)$ からの最近ルートは

$$\begin{tikzcd} & & & (L;21) \arrow[dr, "4"] & \\ (D;3) \arrow[r, "6"] & (F;9) \arrow[r, "5"] & (J;14) \arrow[ur, "7"] \arrow[dr, "8"'] & & (N;25) \\ & & & (M;22) \arrow[ur, "3"'] & \end{tikzcd}$$

すなわち

$$\begin{tikzcd} & & & L \arrow[dr, "4"] & \\ A \arrow[r, Rightarrow, "3"] & D \arrow[r, "6"] & F \arrow[r, "5"] & J \arrow[ur, "7"] \arrow[dr, "8"'] & & N \\ & & & M \arrow[ur, "3"'] & \end{tikzcd}$$

この最小値は $|3+6+5+7+4-24| = |3+6+5+8+3-24| = |25-24| = 1.$

4.2 後ろ・前向きの方法

ここでも目標値 24 に一番近い問題を考えるが、以下では後ろ・前向きの方法で解く。

$$\mathrm{F}_6(N): \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & |g_1(A,x_2)+g_2(x_2,x_3)+\cdots+g_5(x_5,N)-24| \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n} \quad x_{n+1}\in A_n(x_n) \quad 1\le n\le 5. \end{array} \tag{39}$$

この問題 $\mathrm{F}_6(N)$ の最小値を $v_6(N)$ とする。未来値集合

$$\begin{aligned} \Gamma_6(N) &= \{0\} \\ \Gamma_n(x_n) &= \{g_n(x_n,x_{n+1})+\cdots+g_5(x_5,N)+0\mid \\ &\qquad \text{実行可能な } (x_n,\ldots,x_5,N)\in X_n\times\cdots\times X_5\times X_6\} \quad 1\le n\le 5 \end{aligned} \tag{40}$$

を後ろ向きの再帰式

系 4.3

$$\begin{aligned} \Gamma_6(N) &= \{0\} \\ \Gamma_n(x) &= \{g_n(x,\,y)+\mu\mid \mu\in\Gamma_{n+1}(y),\ y\in A_n(x)\} \quad x\in X_n,\ \ 1\le n\le 5 \end{aligned} \tag{41}$$

で生成する。この未来値集合族 $\{\Gamma_n(X)\}$ を図 1 に図示すると、図 4 が得られる。

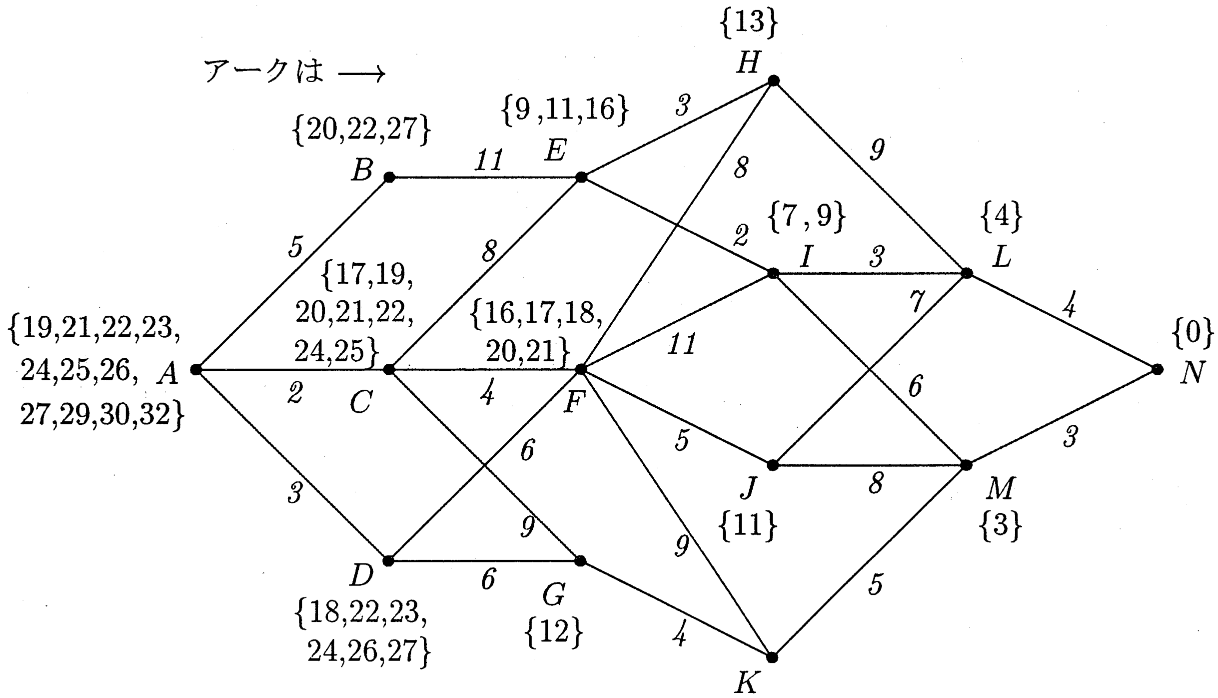

図 4 未来値をもつ最近ルート問題

パラメータを含む部分問題：

$$\mathrm{F}_n(x_n;\mu_n): \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & |g_1(A,x_2)+\cdots+g_{n-1}(x_{n-1},x_n)+\mu_n-24| \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{m} \quad x_{m+1}\in A_m(x_m) \quad 1\le m\le n-1. \end{array} \tag{42}$$

の最小値を $v_n(x_n;\mu_n)$ がみたす前向きの再帰式

系 4.4

$$
\begin{aligned}
v_1(A;\mu) &= |\mu - 24| \qquad \mu \in \Gamma_1(A) && (43)\\
v_{n+1}(y;\mu) &= \min_{x\,;\,y\in A_n(x)} v_n(\,x\,;g_n(x,\,y)+\mu) && (44)\\
&\qquad y \in X_{n+1},\quad \mu \in \Gamma_{n+1}(y),\quad n=1,2,\ldots,5
\end{aligned}
$$

を解いて、求める値 $v_6(N)$ が $v_6(N;0)$ で与えられる：

$$v_6(N) = v_6(N;0).$$

段 n	ノード X	未来値 μ	最小値 $v_n(X;\mu)$	最適直前ノード $\tilde{\pi}_n(X;\mu)$
1	A	$\mu \in \Gamma_1(A)$	$\|\mu - 24\|$	-
2	B	$\mu \in \Gamma_2(B)$	$\|\mu - 19\|$	A
	C	$\mu \in \Gamma_2(C)$	$\|\mu - 22\|$	A
	D	$\mu \in \Gamma_2(D)$	$\|\mu - 21\|$	A
3	E	9,11	$\|\mu - 8\|$	B
		11,16	$\|\mu - 14\|$	C
	F	16	$\|\mu - 15\|$	D
		17,18,20,21	$\|\mu - 18\|$	C
	G	12	$\|\mu - 13\|$	C
4	H	13	2	E
	I	7,9	$\|\mu - 7\|$	F
	J	11	1	F
	K	8	1	F,G
5	L	4	0	I
	M	3	1	J,K
6	N	0	0	L

表 2　後ろ・前向きの方法による最適解

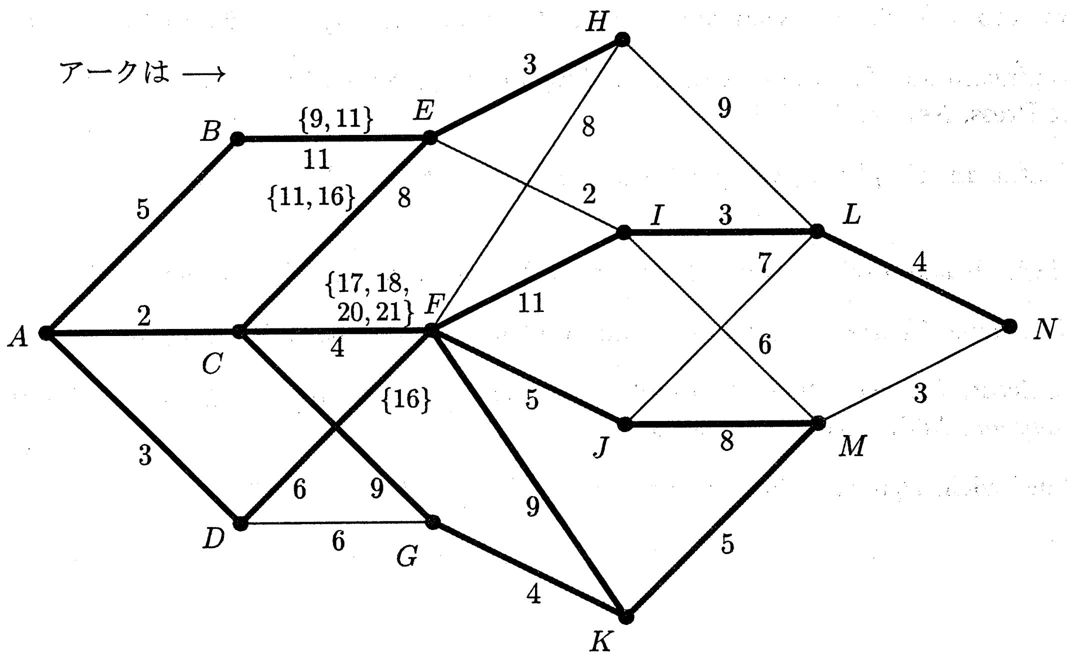

図 5 A から $(X;\mu)$ への最近ルート

拡大終端状態 $s_6 := (x_6, \mu_6) = (N, 0)$ において最適政策 $\tilde{\pi} = \{\tilde{\pi}_n(x;\mu);\ \mu \in \Gamma_n(x)\}$ を適用して最適行動を求めることによって、24 に一番近いルートは

$$N \xleftarrow{4} L \xleftarrow{3} I \xleftarrow{11} F \xleftarrow{4} C \xleftarrow{2} A$$

すなわち

$$A \xrightarrow{2} C \xrightarrow{4} F \xrightarrow{11} I \xrightarrow{3} L \xrightarrow{4} N$$

として得られる。ルートの値は**ちょうど**目標値 24 になっている。この最適ルートは前・後ろ向きの方法による最適ルートに一致している。

References

[1] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] R.E Bellman, *Eye of the Hurricane: an Autobiography*, World Scientific, Singapore, 1984.

[3] R.E. Bellman and E.D. Denman, *Invariant Imbedding*, Lect. Notes in Operation Research and Mathematical Systems, Vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[4] List of Publications: Richard Bellman, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-26**(1981), No.5(Oct.), 1213-1223.

[5] R.E. Bellman, A.O. Esogbue and I. Nabeshima, *Mathematical Aspects of Scheduling and Applications*, Pergamon Press, New York, 1982.

[6] E.V. Dijkstra, A note of two problems in connection with graphs, Numerishe Mathematik **1**(1959), 269-271.

[7] 茨木 俊秀, **組合せ最適化の理論**, コロナ社, 東京, 1979.

[8] 岩本 誠一, **動的計画論**, 九州大学出版会, 福岡, 1987.

[9] S. Iwamoto, Associative dynamic programs, J. Math. Anal. Appl., **201**(1996), 195-211.

[10] A. Kaufmann and R. Cruon, *Dyanamic Programming; Sequential Scientific Management*, Academic Press, New York, 1967.

[11] A. Kaufmann, *Graphs, Dyanamic Programming, and Finite Games*, Academic Press, New York, 1967.

[12] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.

[13] Y. Maruyama, Shortest and longest path problems, Optimization **38**(1998), 56-74.

[14] M. R. Scott, *Invariant Imbedding and its Applications to Ordinary Differential Equations : An introduction*, Addison-Wesly, London, 1973.

[15] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Inc. NY, 1992.