数理解析研究所講究録
1175 巻 2000 年 16-30

Singular Euclidean structures on a simplicial complex with weighted edges

東京大学大学院数理科学研究科
亀井　聡（KAMEI Satoshi）

1　概要

I.Rivin は [6] において、三次元双曲空間 $\mathbf{H}^3$ 上にある理想多面体の面角が満たすべき必要条件を論じた。逆にそれらは十分条件でもあることも示され（[4])、それによって理想多面体はアイソトピー類を除き、一意に決まることがわかる。

一方、理想多面体を $\mathbf{H}^3$ の上半空間モデルに、一点が無限遠点にあるよう配置したとき、その無限遠点からの無限遠面 $\mathbf{C}$ への射影は、Euclide 構造を持った 2 単体複体となり、さらに三角形 2 個が形成する四角形の対角の和と、対角線に対応する理想多面体の面角の値は一致することが知られている。このことの拡張として、Rivin は曲面と同相な 2 単体的複体について、その各辺に重みを与え、それを対角の和と見たときに付与される幾何構造を論じた（[5] 及び [7])。

Rivin が幾何構造として扱ったのは、相似構造及び有限個の cone singularity を持つ Euclide 構造である。これらは、各 2 単体を Euclide 三角形として、それを局所座標と見たとき、貼り合わせ部分での座標変換写像がそれぞれ相似変換であること、及び等長変換であることに対応している。これらについて Rivin は、[7] において相似構造が入るための必要十分条件を、また、[5] においては相似構造全体が作る解空間の中での、cone singularity を持つ Euclide 構造の存在と一意性を示したのである。

[3] では、1 単体において 3 以上の分岐がある、より一般の 2 単体的複体に対して、辺の重みの定義を拡張することで、その幾何構造について論じ、さらにそれを高次元の単体的複体の幾何構造の決定に利用した。この場合の 2 単体的複体については、相似構造に対応して局所 Euclide 構造が、また cone singularity に対応して完備構造がそれぞれ定義できる。これら二つの幾何構造について、[5] 及び [7] と全く平行に議論を進めることで、結果各辺に与えた重みに対して、局所 Euclide 構造が入る必要十分条件、及びその解空間の中での完備構造の存在と一意性を示すことができた。

高次元単体的複体については、その 2 骨格に対してその結果を適用する。2 骨格について上記のことがわかれば、それがそのまま高次元単体的複体そのものの、cone

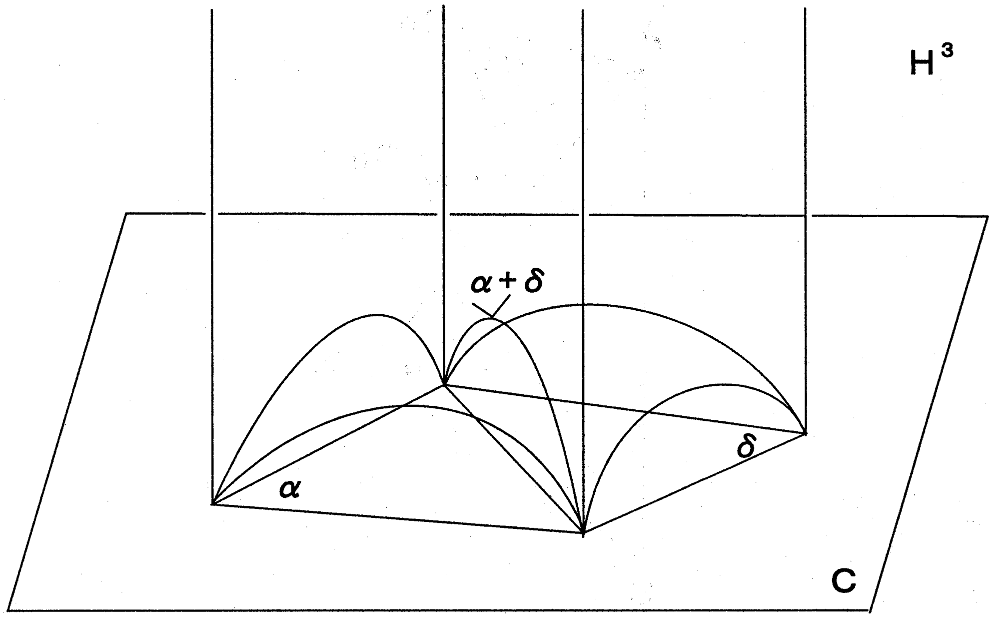

図 1: 面角と無限遠への射影

singularity を許す Euclide 構造の入る必要十分条件とその一意性まで示せる。つまり、高次元単体的複体の cone singularity を許す Euclide 構造全体の作る空間は、高々その1単体の個数分のパラメータ分の次元しかないことが言えるのである。

本稿は、それらの結果及び証明の手法についての紹介である。

2　基本的用語の定義及び主結果

この章では、まず基本的な用語の定義を行い、主結果について述べる。

定義2．1．　単体の集合 $\mathcal{C}$ で、以下の条件を満たすものを単体的複体と呼ぶ。

i. $\sigma \in \mathcal{C}$ なら、σ の全ての面は $\mathcal{C}$ の元である。

ii. $\sigma, \tau \in \mathcal{C}$ なら、$\sigma \cap \tau$ は σ, τ 両方の面となる。

iii. $\mathcal{C}$ の各単体について、それを面とする $\mathcal{C}$ の単体は有限個である。(局所有限性)

単体的複体 $\mathcal{C}$ の部分集合 $\mathcal{C}'$ が複体をなすとき、$\mathcal{C}'$ を部分複体という。

$\mathcal{C}$ の0次元の面を頂点、1次元の面を辺、各単体についての面に関する包含関係で、極大のものをファセットと呼ぶ。全てのファセットの中で最大の次元を、単体的複体 $\mathcal{C}$ の次元とする。また、全てのファセットの次元が等しいとき、$\mathcal{C}$ は純 (pure) であるという。

以降では2単体的複体として、コンパクト、連結かつ純であり、さらに任意の2単体 F について、$F \cap \{C \setminus F\}$ が純な1単体的複体となるようなものを考え、これ

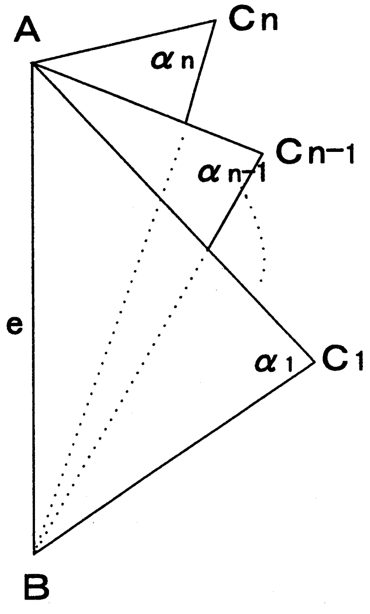

図 2: 重みの定義

を $\mathcal{C}$ とする。尚、以下では $\mathcal{C}$ のファセットの集合を $F(\mathcal{C})$、辺の集合を $E(\mathcal{C})$、点の集合を $V(\mathcal{C})$ とする。

まず、以下に [3] において [5] より拡張した辺についての重みを定義する。

定義２．２． e を $\mathcal{C}$ の辺とし、$e = AB$ は $t_1 = ABC_1, t_2 = ABC_2, \cdots, t_n = ABC_n$ の交わりとする。このとき、e の重み $w(e)$ を t_1 における角 C_1 から t_n における角 C_n までの和とする。

このときこれら $\mathcal{C}$ における辺の集合 $E(\mathcal{C})$ について、逆に重み $w : E(\mathcal{C}) \to (0, \infty)$ を与え以下のような問題を考える。

問題. $E(\mathcal{C})$ に重みを与え、先の定義のように対角に分配するとき、$\mathcal{C}$ はどのような幾何構造を持つと考えられるか。

これを考えるために、以下のような幾何構造を定義する。

定義２．３． (局所 Euclide 構造) $\mathcal{C}$ の任意の元 $t \in \mathcal{C}$ について、$\alpha_t + \beta_t + \gamma_t = \pi$ が満たされているとき、$\mathcal{C}$ は局所 Euclide 構造を持つという。

定義２．４． (完備構造) $\mathcal{C}$ が局所 Euclide 構造を持ち、かつ任意の 2 単体同士の 1 単体における貼り合わせが等長的であるとき、$\mathcal{C}$ は完備構造を持つという。

これらの構造は、$\mathcal{C}$ が多様体（つまり曲面）であるとき、局所座標間の変換写像が、それぞれ相似、合同になっているということを意味する。また、完備構造にお

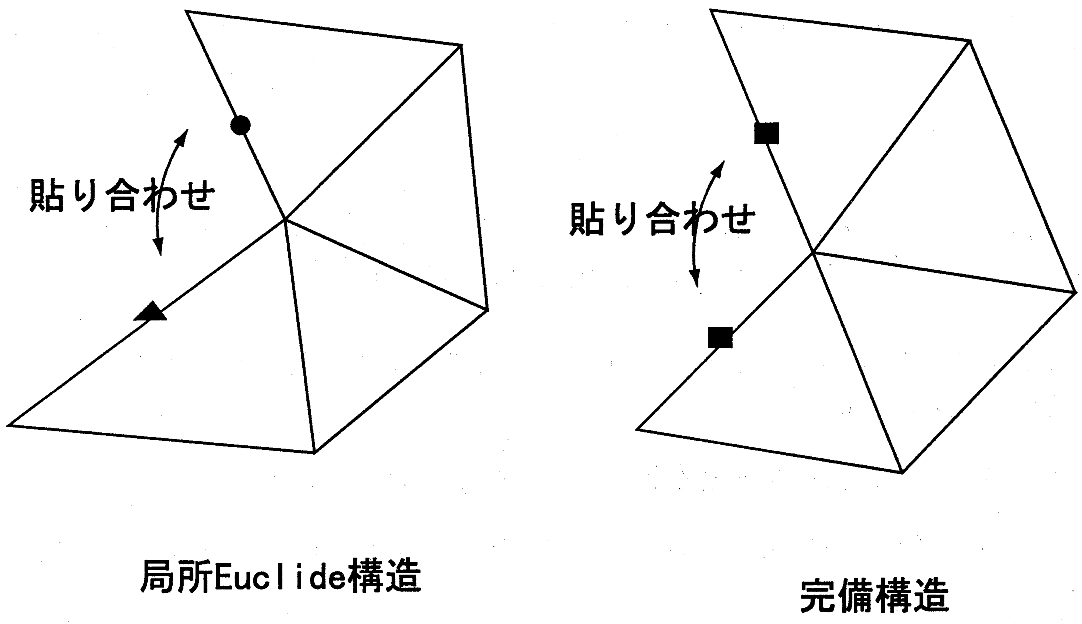

図 3: 局所 Euclide 構造と完備構造

いては、有限個の点を除いて、ある 2 単体に入った Euclide 構造が等長的に全体へと延長できる。除いた有限個の点を cone point と呼び、このとき $\mathcal{C}$ は cone singularity を持つという。

cone singularity の定義は、以下のように一般次元に拡張できる。

定義２．５． n 単体的複体について、各 $n-2$ 単体上での n 単体の面角の和が 2π に等しくないとき、その $n-2$ 単体を cone singularity という。

さて、[3] では先の問題に対して、上記二つの幾何構造に関する以下のような結果を得た。

定理 [3, Theorem 4.1.] 任意の部分集合 $F' \subset F(\mathcal{C})$ をとり、$E' \subset E(\mathcal{C})$ を F' の辺となっている 1 単体の集合とする。これらが常に

$$\sum_{e \in E'} w(e) \geq \pi |F'|$$

を満たし、かつ $F' = F(\mathcal{C})$ と $F' = \phi$ においてのみ等号が成立するとき、$\mathcal{C}$ には完備な構造が唯一存在する。

これを高次元単体的複体の 2 骨格とみることで、さらに以下のことが示せる。

定理 [3, Theorem 4.2.] n 次元多様体と同相な単体的複体 $\mathcal{C}_n$ について、その 1 単体に重みを与える。$\mathcal{C}_n$ の 2 骨格を $\mathcal{S}$ とする。$\mathcal{S}$ の 2 単体について任意の部分集合

$F' \subset F(\mathcal{S})$ をとり、$E' \subset E(\mathcal{S})$ を F' の辺となっている 1 単体の集合とする。これらが常に

$$\sum_{e \in E'} w(e) \geq \pi |F'|$$

を満たし、かつ $F' = F(\mathcal{S})$ と $F' = \phi$ においてのみ等号が成立するとき、$\mathcal{C}_n$ には cone singularity を許す n 次 Euclide 構造が唯一存在する。

以下次の章から、上記二つ（主に前者）の定理の証明に使われた手法を見ていく。前者の定理の証明は、

1. $\mathcal{C}$ が局所 Euclide 構造を持つための必要十分条件を求める。

2. 局所 Euclide 構造の入る解の空間の中で、完備構造を持つ場合を探す。

の 2 段階に分かれる。

3 局所 Euclide 構造と線形計画法

先の章で述べたように、ここでは $\mathcal{C}$ が局所 Euclide 構造を持つための必要十分条件を考える。

ここで以下、$n = |F(\mathcal{C})|$、$m = |E(\mathcal{C})|$ としておく。このとき、重み w の満たすべき必要条件として、まず以下の補題を得る。証明は、重みの定義より明らかである。

補題３．１． $\mathcal{F}' \subset F(\mathcal{C})$ とし、E' を F' の辺となるような $E(\mathcal{C})$ の元の集合とする。このとき、

$$\sum_{e \in E'} w(e) \geq \pi |F'|$$

が成り立つ。

実は、これはそのまま十分条件にもなることがわかる。以下そのことを見ていく。

まず、局所 Euclide 構造は以下のように言い換えることが出来る。

「$\mathcal{C}$ に局所 Euclide 構造が入る」 $\Leftrightarrow$ 「$\mathcal{A} = \{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \cdots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n) | \alpha_t, \beta_t, \gamma_t > 0, \alpha_t + \beta_t + \gamma_t = \pi \text{ at } 1 \leq t \leq n, \sum \alpha_i = w(e) \text{ at } 1 \leq t \leq m\}$ が空でない」

これを線形計画問題に見立てることにする。まず、後で利用することになる、双対定理について述べておこう。尚、線形計画についての基本的な用語などは [1] を参照のこと。

定理３．２．（双対定理） P を以下のような線形問題とする。

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{a}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ の範囲内で } \mathbf{c}^{\perp}\mathbf{x} \text{ を最大にする。}$$

これに対し P の双対問題 P^* として、以下のようなものを考える。

$$\lambda^{\perp}\mathbf{A} \leq \mathbf{c} \text{ の範囲内で、} \mathbf{a}^{\perp}\lambda \text{ を最小化する。}$$

これらについて、P^* の目的関数が有界でないとき、P の解空間が空で、また、P の目的関数が有界でないとき、P^* の解空間が空になる。さらに、一方に目的関数の最適解が存在すれば、もう一方も最適解を持ち、このとき主問題、双対問題両者の最適値は一致する。

先に言い換えを行った局所 Euclide 構造 $\mathcal{A}$ が空でない条件について、上記の定理を利用することを考えるのだが、まず最初に

「全ての角が真に正である」

という条件を緩め、

「全ての角が非負である」

として考え、後にこの条件について吟味しなおすことにする。
従って、最初に考える線形問題（以下これを主問題 P とする）は次のようになる。

- 全ての角は非負。
- 任意のファセット t についてて、$\alpha_t + \beta_t + \gamma_t = \pi$。
- 各辺 e について、$w(e) = \sum \alpha_i$。
- 目的関数は $(0, \cdots, 0) \cdot (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \cdots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$。

これを行列の形で書くと、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \\ w(e_1) \\ \vdots \\ w(e_m) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

の範囲内で、

$$(0, \cdots, 0) \cdot (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \cdots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$$

を最小にする。

この問題について、双対問題 P^* は以下のようになる。

- 各 $t \in F(\mathcal{C})$ とその辺 e について、$u_t + v_e \leq 0$ を満たす。
- 目的関数は $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi \sum_{t \in F(\mathcal{C})} u_t + \sum_{e \in E(\mathcal{C})} w(e) v_e$。

主問題 P の解空間が空でないことを示すためには、P^* の目的関数に最適解が存在することを言えばよい。実際次の補題が成り立つ。

補題３．３． 補題３．１の条件が満たされているとき、先の双対問題 P^* の目的関数 $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ は非負である。さらに、目的関数が0になることと、全ての $t \in F(\mathcal{C}), e \in E(\mathcal{C})$ について、$u_t = v_e = u$ を満たすある値 u が存在することは同値である。

証明 $u = \min(u_1, \cdots, u_n)$ とし、$u_i^{(1)} = u_i - u$、$v_j^{(1)} = v_j + u$ とする。このとき、$u^{(1)}$ と $v^{(1)}$ は主問題の制約を満たす。さらに、$\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - u(\pi|F(\mathcal{C})| - \sum_{e \in E(\mathcal{C})} w(e))$ で、右辺第二項は0であることが、補題３．１からわかるため、$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(1)})$ である。

さらに、全ての i について $u_i^{(1)} = 0$ を仮定すると、制約から $v_j^{(1)}$ は0以下でなくてはならず、従って、$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ は0以下となり、$v_j^{(1)}$ が全ての j について0のときのみ0となる。従って、以下 $t \in F^{(1)}$ において、$u_t^{(1)} > 0$ と仮定して良く、$F^{(1)}$ は $F(\mathcal{C})$ の真部分集合となる。

次に、$u^{(1)} = \min_{t \in F^{(1)}}(u_t^{(1)})$ とする。そして、$u_t^{(2)}$ を、$t \notin F^{(1)}$ において $u_t^{(2)} = u_t^{(1)} = 0$、それ以外では $u_t^{(2)} = u_t^{(1)} - u_{(1)}$ とし、$v_e^{(2)}$ も同様に定義する。このとき、$u_t^{(2)}$ と $v_e^{(2)}$ は依然制約条件を満たし、目的関数 $\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}) - u(\pi|F^{(1)}| - \sum_{e \text{ incident to } F^{(1)}} w(e))$ の値は、補題３．１より右辺第二項が真に正であることから、真に増加することがわかる。

さらに、$F^{(1)}$ の真部分集合として $F^{(2)}$ を考えることができ、これを繰り返していくと、最終的には $u^{(k)} = 0$ を満たす実行可能解 $u^{(k)}, v^{(k)}$ が得られる。このとき、目的関数は0以下である一方で、１ステップ前の目的関数よりも真に大きいことより、元の目的関数は有界であることがわかり、証明が終わる。□

次に、先に約束したように、各角度が真に正となることを示す。このため、適当な変数 ϵ を取り、主問題を次のように変更する。ただし以下、$val(e)$ は各辺の分岐の数としておく。

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & val(e_1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & val(e_m)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \epsilon \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \\ w(e_1) \\ \vdots \\ w(e_m) \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \epsilon \end{pmatrix}
\geq \mathbf{0}
$$

の範囲内で、

$$(0,\cdots,0,-1)\cdot(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n,\epsilon)$$

を最小にする。

これに対して、双対問題は以下のようになる。

- 各$t\in F(\mathcal{C})$とその辺eについて、$u_t+v_e\le 0$を満たす。
- $3\sum_{t\in F(\mathcal{C})}u_t+\sum_{e\in E(\mathcal{C})}val(e)v_e\le -1$を満たす。
- 目的関数は$\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\pi\sum_{t\in F(\mathcal{C})}u_t+\sum_{e\in E(\mathcal{C})}w(e)v_e$。

これについて、以下の補題が成り立ち、従って、$\epsilon>0$が言えることがわかる。

補題3．4．　上記の双対問題の目的関数の値は真に負。

証明　目的関数が0をとることを仮定すると、補題3．3からあるuが存在して、$u_t=-v_e=u$となる。しかし、このとき2番目の制約にこれを代入して計算すると、

$$u\Big(3\sum_{t\in F(\mathcal{C})}1-\sum_{e\in E(\mathcal{C})}val(e)\Big).$$

であり、これが0になることから矛盾が出る。□

以上により、補題3．1の条件がそのまま十分となることもわかり、$\mathcal{C}$が局所Euclide構造を持つための必要十分条件が得られた。

定理3．5．　2単体的複体$\mathcal{C}$と、各辺に与えられた重みwについて、局所Euclide構造が入る必要十分条件は、$\mathcal{F}'\subset F(\mathcal{C})$と、$E'$を$F'$の辺となるような$E(\mathcal{C})$の元の集合について

$$\sum_{e\in E'}w(e)\ge\pi|F'|$$

が成り立つことである。

4　完備構造と双曲幾何学

この章では以下のことを証明する。

定理4．1．　与えられた重みwについて、$\mathcal{C}$に局所Euclide構造が入るなら、その中に完備構造が存在し、それは一意である。

これを証明するためには、三次元双曲幾何学を用いる。

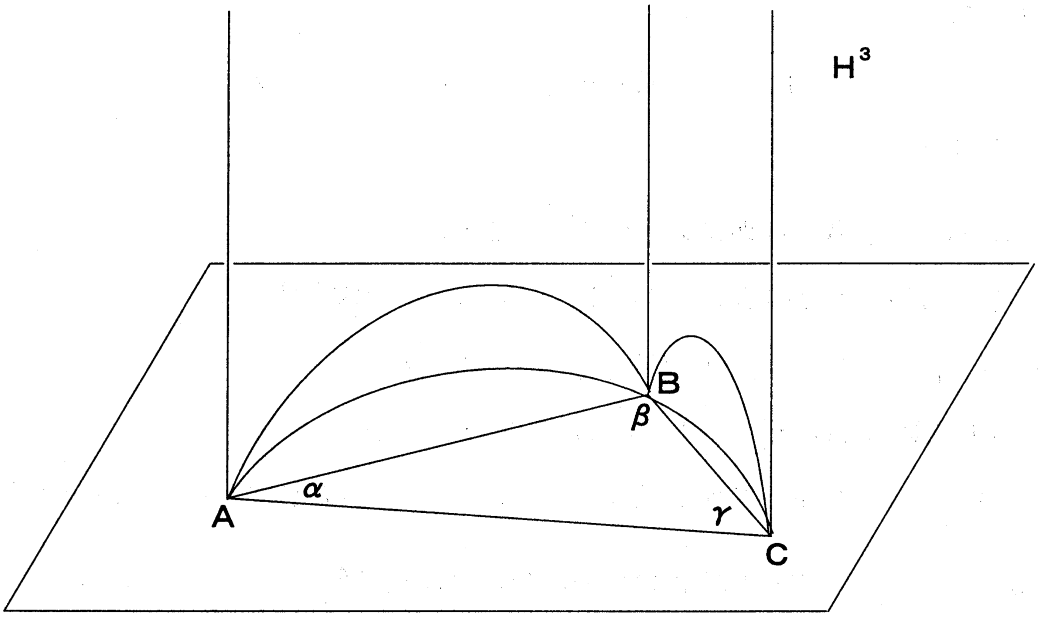

図 4: 上半空間モデルにおける理想四面体

まず、実三次元空間 $\mathbf{R^3}$ を考え、これを $\{(x,y,z)|z \geq 0\}$ に制限する。さらにこれに、計量として $ds^2 = (dx^2+dy^2+dz^2)/z^2$ を与えたものを三次元双曲空間の上半空間モデルと呼ぶ。このとき、$\{(x,y,z)|z=0\} \cup \infty$ は無限遠面となる。

この三次元双曲空間 $\mathbf{H^3}$ について、各点が全て無限遠面にあるような多面体を、理想多面体と呼ぶ。任意の理想多面体について、その一点を無限遠点に移すような $\mathbf{H^3}$ の等長変換が、常に存在する。

さて、この三次元双曲空間の上半空間モデル $\mathbf{H^3}$ の上で、そこに一点を無限遠点にもつ理想四面体をとる。それらの各頂点を A, B, C, ∞ とする。このような理想四面体の無限遠面 C への射影は Euclide 三角形となるが、その A, B, C に対応する角を α, β, γ とする。このとき、理想四面体の体積 V は以下のように書かれる。

$$V = V(\alpha,\beta,\gamma) = L(\alpha)+L(\beta)+L(\gamma)$$

ここで、$L(x)$ はロバチェフスキー関数と呼ばれ、

$$L(x) = -\int_0^x \log(2\sin\theta)d\theta.$$

である。

尚、これら双曲幾何学の基本的な用語の定義及び結果については、[2] 及び [8] などを参照のこと。

注意　通常、被積分項は $\log|2\sin\theta|$ と書かれる。([2]) しかし、θ は Euclide 三角形の内角を表すので、ここでは上記のような表記で構わない。

これを利用し、以下のような関数を考える。

$$\mathcal{V}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)=\sum_{t\in F(\mathcal{C})}V(\alpha_t,\beta_t,\gamma_t)$$

つまり、各２単体を $\mathbf{H}^3$ の無限遠面上に配置し、それぞれについて無限遠点からの錐を取ることにより得られる理想四面体の体積の和を取って $\mathcal{V}$ とする。

これについて、以下のような命題を用意する。

命題４．２． $\mathcal{V}$ は $\mathcal{A}$ 上で、極値を一つだけ持ち、それは最大値を与える。

これを示すために、まず以下の補題が成り立つことを見る。

補題４．３． V は $\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{R}^3|\alpha>0,\beta>0,\gamma>0,\alpha+\beta+\gamma=\pi\}$ 上で凸である。

略証 V のヘッシアンを計算し、$\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{R}^3|\alpha>0,\beta>0,\gamma>0,\alpha+\beta+\gamma=\pi\}$ 上任意の点の接平面で、それが負定値の二次形式を定めることをみればよい。□

上記の補題より、次のことはただちに証明できる。

補題４．４． $\mathcal{V}$ は $\mathcal{A}$ 上で凸である。

命題４．２の略証 上記二つの補題により、$\overline{\mathbf{A}}$ について、$\partial\overline{\mathbf{A}}$ 上に最大値が存在しないことがわかれば、極値は $\mathrm{int}\overline{\mathbf{A}}$ 上に最大値が一つのみであるということがわかり、命題４．２が示される。

実際、$\mathbf{p}\in\partial\overline{\mathbf{A}}$ をとったとき、適当な点 $\mathbf{q}\in\mathrm{int}\overline{\mathbf{A}}$ で、$\mathcal{V}(\mathbf{q})>\mathcal{V}(\mathbf{p})$ なる点が常にとれることがわかり、証明が終わる。□

再び２単体の貼り合わせの議論に戻ろう。$\mathcal{C}$ 上、２単体の順序のついた列 $c^*=\{t_1,t_2,\cdots,t_k=t_1\}$ で、$|i-j|=1$ を満たすなら、$t_i\cap t_j$ は辺となるものをとる。これについて、まず以下のような dilatation と呼ばれる値を定義する。

定義４．５． 適当な２単体 $t_i\in c^*$ について、$AB=t_{i-1}\cap t_i$、$AC=t_i\cap t_{i+1}$ となるように $t_i=ABC$ と記号をつける。このとき、点 A についての t_i の dilatation を $D(t_i,A)=\log|AC|-\log|AB|$ で定義する。

このとき、以下の補題が成り立つことは自明である。

補題４．６． 三角形 $t=ABC$ の角がそれぞれ α、β、γ であるとする。このとき、

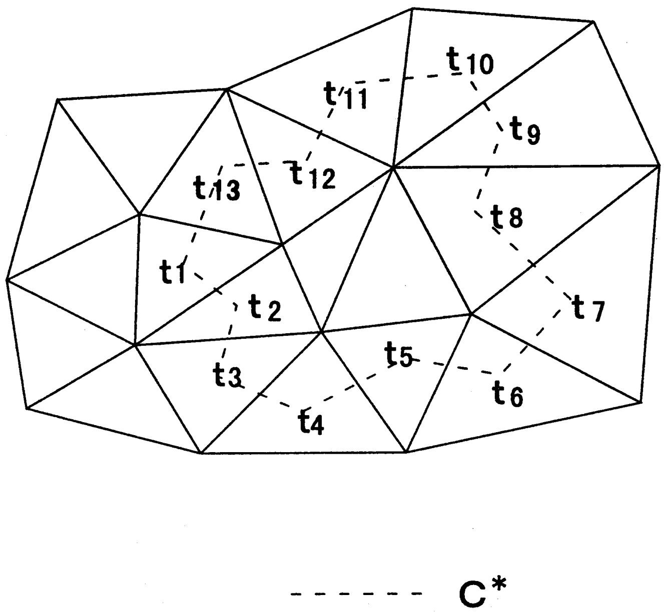

図 5: 2 単体列

$D(t, A) = \log \sin \beta - \log \sin \gamma$ が成り立つ。

さて、これを利用して、先の 2 単体列を評価する値を定義しよう。

定義 4．7． $P_i = t_{i-1} \cap t_i \cap t_{i+1}$ とする。このとき、$\mathcal{A}$ における c^* に沿ったホロノミーを $H(c^*, \mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{k-1} D(t_i, P_i)$ で定義する。

以下の補題は証明はしないが、直観的には明かであろう。

補題 4．8． $\mathcal{C}$ が完備構造を持つ必要十分条件は、$\mathcal{C}$ 上の任意の双対サイクル c^* について、$H(c^*) = 0$ となることである。

このホロノミーと、先に定義した双曲空間における体積についての関係を次の補題で述べる。

補題 4．9． $\mathcal{V}$ が極値をとるとき、$\mathcal{C}$ 上の任意の双対サイクル c^* について、$H(c^*) = 0$ である。

証明 まず、$\mathcal{V}$ を各 2 単体の内角を座標とする、$\mathbf{R}^{3n}$ 上の関数とみる。さらに条件が、各 $t \in F(\mathcal{C})$ について $\alpha_t + \beta_t + \gamma_t = \pi$、各 $e \in E(\mathcal{C})$ について $\sum_{i=1}^{val(e)} \alpha_i = w(e)$ で与えられているとする。

命題 4．2 より、この上で $\mathcal{V}$ は唯一極値を持ち、それが最大値であることがわかっている。その最大値を与える点を M とし、さらに F を以下のように置く。

$$F = \mathcal{V}(\mathcal{A}) - \sum_{t \in F(\mathcal{C})} C_1(t)(\alpha_t + \beta_t + \gamma_t - \pi) - \sum_{e \in E(\mathcal{C})} C_2(e)(\sum_{i=1}^{val(e)} \alpha_i - w(e))$$

このとき、ラグランジュの乗数法より、任意の２単体の内角 α_j について、

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\Big|_M = 0.$$

が、成り立つ。

ある、α_j を適当にとると、α_j を内角に持つ２単体 $t(\alpha_j) \in F(\mathcal{C})$ と、α_j を対角に持つ辺 $e(\alpha_j) \in E(\mathcal{C})$ が一つずつ存在する。従って、上式を実際に計算すると、

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\Big|_M = -\log(2\sin\alpha_j(M)) - C_1(t(\alpha_j)) - C_2(e(\alpha_j)) = 0.$$

今、先に定義した $c^* = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ と $A_i = t_{i-1} \cap t_i \cap t_{i+1}$ について、$e_i = t_{i-1} \cap t_i$、$e_{i+1} = t_i \cap t_{i+1}$ と置いて、上式及び補題４．６の式を使うと点 M においては $D(t_i, A_i) = C_2(e_{i+1}) - C_2(e_i)$ が成り立つ。これを使って各２単体列に関してホロノミーを計算すれば、常に０になることがわかる。□

さらにその逆も言えることがわかる。

補題４．１０． $\mathcal{C}$ 上の任意の双対サイクル c^* について、$H(c^*) = 0$ を満たすとき、$\mathcal{V}$ が極値をとる。

命題４．２、補題４．８、４．９及び４．１０を組み合わせることにより、完備構造の存在とその一意性が示され、定理４．１の証明が終わる。

5 高次元への拡張

[5] 及び [7] から、辺の重み付けを拡張し、本稿のような２単体的複体を扱えるようにしたのは、３単体的複体の２骨格についての議論を行うためであった。先の章までの結果から、まず２単体的複体 $\mathcal{C}$ について以下のことが言える。

定理５．１． [3, Theorem 4.1.] 任意の部分集合 $F' \subset F(\mathcal{C})$ をとり、$E' \subset E(\mathcal{C})$ を F' の辺となっている１単体の集合とする。これらが常に

$$\sum_{e \in E'} w(e) \geq \pi |F'|$$

を満たし、かつ $F' = F(\mathcal{C})$ と $F' = \phi$ においてのみ等号が成立するとき、$\mathcal{C}$ には完備な構造が唯一存在する。

これらを２骨格とみることで、３単体的複体のみならず、一般の高次元単体的複体に関しての幾何構造が議論できる。以下の結果は、それぞれ帰納的に骨格の Euclide 構造を内部に拡張することで、簡単に証明できる。

定理５．２． [3, Theorem 4.2.]　n 次元多様体と同相な単体的複体 $\mathcal{C}_n$ について、その１単体に重みを与える。$\mathcal{C}_n$ の２骨格を $\mathcal{S}$ とする。$\mathcal{S}$ の２単体について任意の部分集合 $F' \subset F(\mathcal{S})$ をとり、$E' \subset E(\mathcal{S})$ を F' の辺となっている１単体の集合とする。これらが常に

$$\sum_{e \in E'} w(e) \geq \pi |F'|$$

を満たし、かつ $F' = F(\mathcal{S})$ と $F' = \phi$ においてのみ等号が成立するとき、$\mathcal{C}_n$ には cone singularity を許す n 次 Euclide 構造が唯一存在する。

以上により主定理の証明が終わった。

6　計算幾何学への応用

この章では、前章までの結果の計算幾何学への応用について紹介する。尚、これらの結果は [5] 及び [7] に基づくものである。

以下では、$\mathcal{C}$ が曲面と同相な場合のみを取り扱う。まず、これについて、次のような定義を行う。

定義６．１．　曲面と同相な２単体複体 $\mathcal{C}$ と、各辺に与えられた重み w について、任意の辺の重みが

$$w(e) < \pi$$

を満たすとき、$\mathcal{C}$ を曲面のドローネ三角形分割と呼ぶ。

定義６．２．　$\mathcal{C}$ 上任意の点 $v \in V(\mathcal{C})$ について、点 v を頂点とする全ての２単体

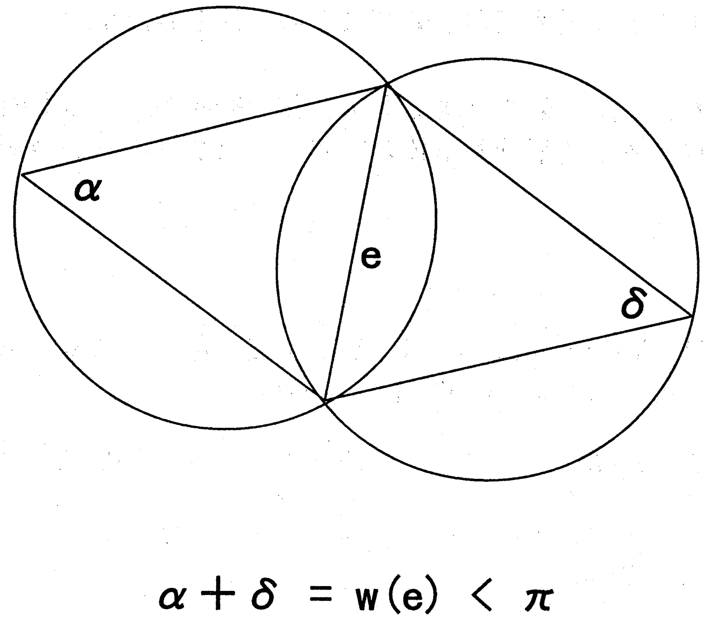

図 6: ドローネ三角形分割と重みの対応

の、点 v における角度の和を cone angle と呼び C_v とする。

注意 $2\pi - C_v$ は離散曲率と呼ばれることもある。

C_v については以下のことが成り立つ。証明は明かであろう。

補題6．3． $C_v = \sum_{e \text{ incident to } v} (\pi - w(e))$

定義6．1について、$\mathcal{C}$ が平面になるとき、ドローネ三角形分割がボロノイ図の双対として定義されるものに一致することは、図より明かであろう。

前章までの結果から、$\mathcal{C}$ が平面の場合について、次の結果が得られることがわかる。

定理6．4． planar な単体的複体 $\mathcal{C}$ が以下の条件を満たすとき、平面上のドローネ三角形分割となる。

1. $w : E(\mathcal{C}) \to (0, \pi)$。
2. 任意の部分集合 $F' \subset F(\mathcal{C})$ と、$E' \subset E(\mathcal{C})$ を F' の辺となっている 1 単体の集合について、$\sum_{e \in E'} w(e) \geq \pi |F'|$ が成り立つ。
3. 任意の $v \in V(\mathrm{int}\mathcal{C})$ について、$C_v = 2\pi$ で、さらに、任意の $v \in V(\partial\mathcal{C})$ について、$C_v < 2\pi$ が成り立つ。

逆に任意の平面上のドローネ三角形分割は上の条件を満たす。

この定理により、上記の条件を満たす w 全体の空間が、平面上の C と同じ組み合わせ型を持つドローネ三角形分割全体の空間に一致することがわかる。

参考文献

[1] P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright, *Numerical linear algebra and optimization Volume 1*, Addison Wesley, (1991).

[2] J. Milnor, *Hyperbolic geometry, the first 150 years*, Bull. A.M.S., **6**(1982),9-24.

[3] KAMEI S., *Singular Euclidean structures on a simplicial complex with weighted edges*, preprint (2000).

[4] I. Rivin, *On the geometry of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Topology **32**(1993),87-92.

[5] I. Rivin, *Euclidean structures on simplicial surfaces and hyperbolic volume*, Ann. of Math. **139** 3 (1994),553-580.

[6] I. Rivin, *A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. **143** 1 (1996)

[7] I. Rivin, *Combinatorial optimization in geometry*, preprint, (1999).

[8] W.P.Thurston, *Geometry and Topology of 3-manifolds*, Princeton Lecture Notes, (1978).